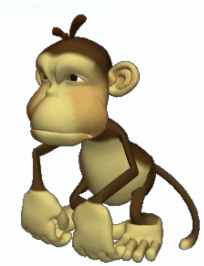
Площадь криволинейной трапеции и интеграл

(урок-практикум)

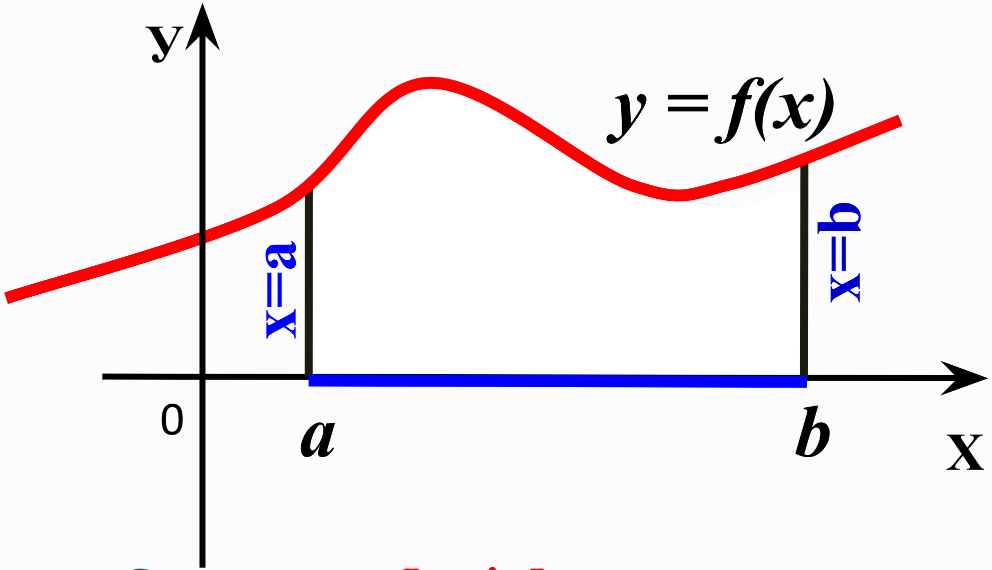
Алгебра и начала анализа. 11 класс
МОУ “Школа №78 г.Донецка”
Учитель ПЕРЕКРЕСТ И.А.

КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЁ ПЛОЩАДЬ



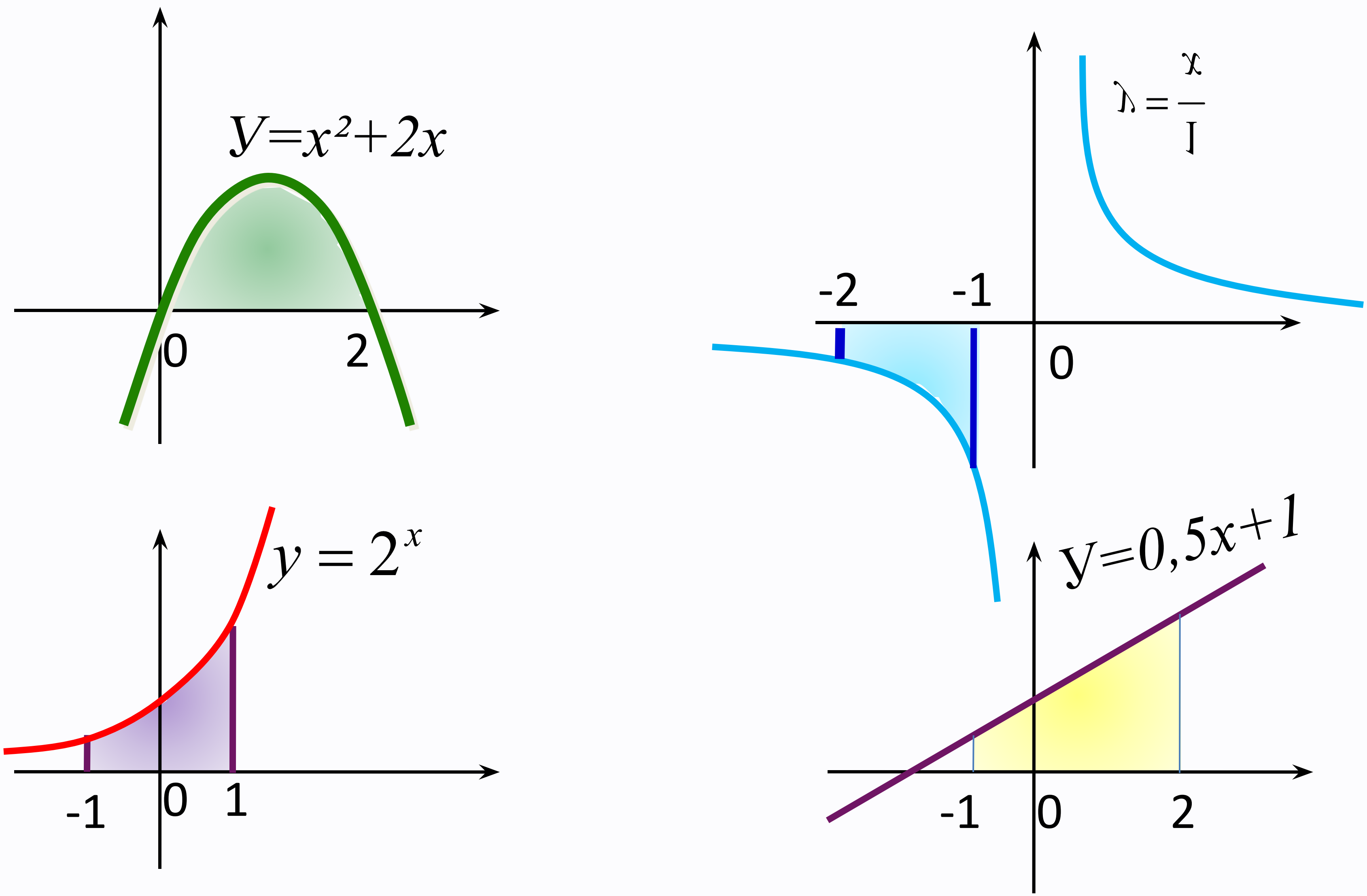
Криволинейная трапеция

<u>Опр.</u> Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знак функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b].

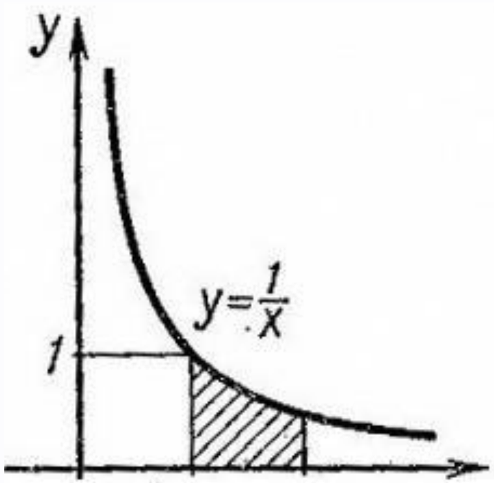


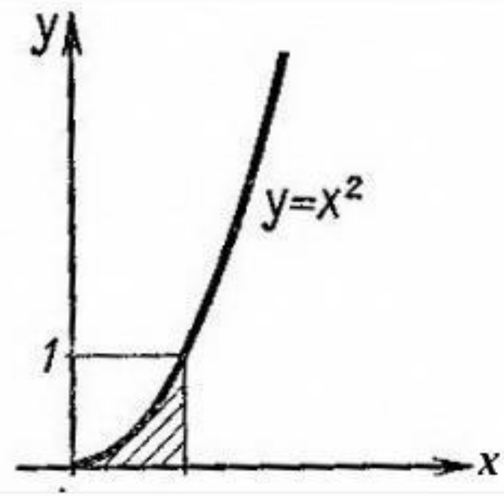
Отрезок [a;b] -*основание* этой криволинейной трапеции

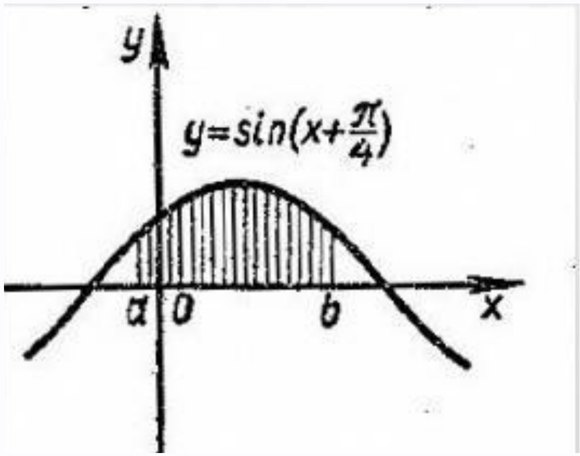
Различные виды криволинейных трапеций

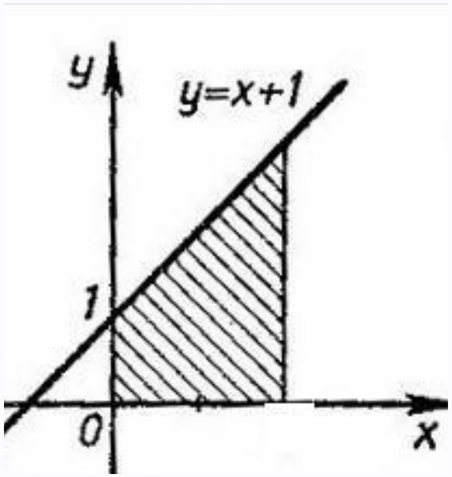


Различные виды криволинейных трапеций

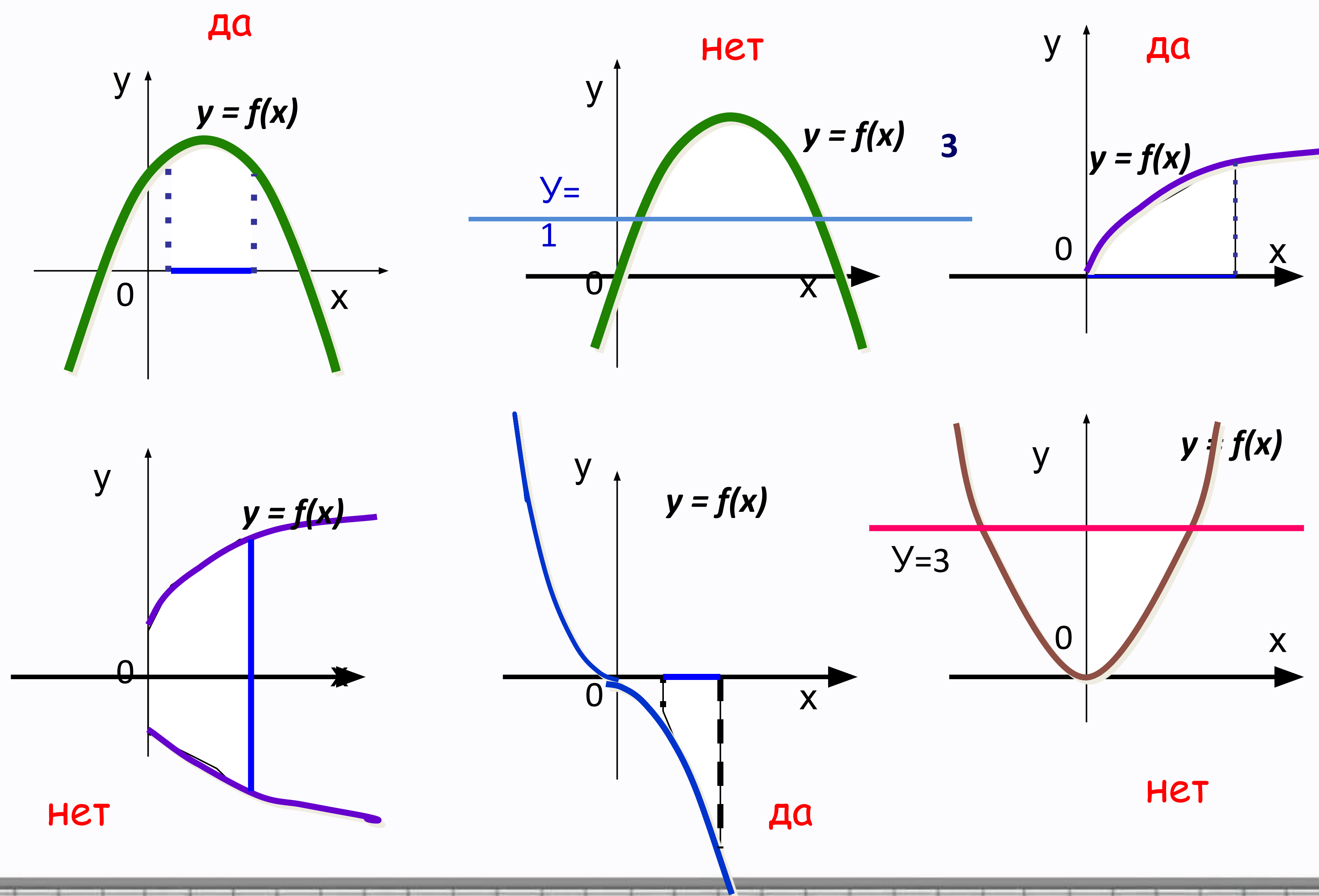






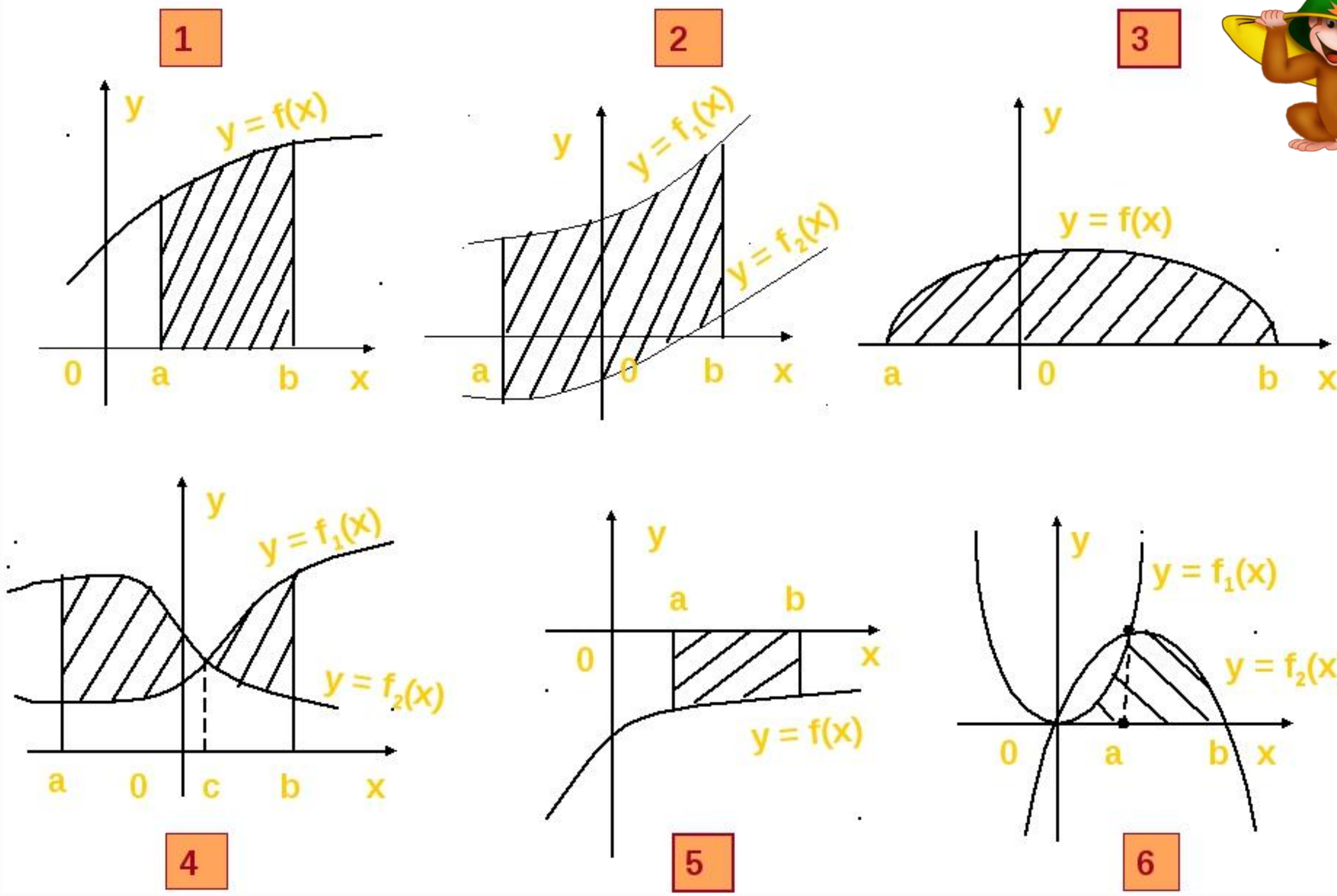


Являются ли криволинейными трапециями фигуры?



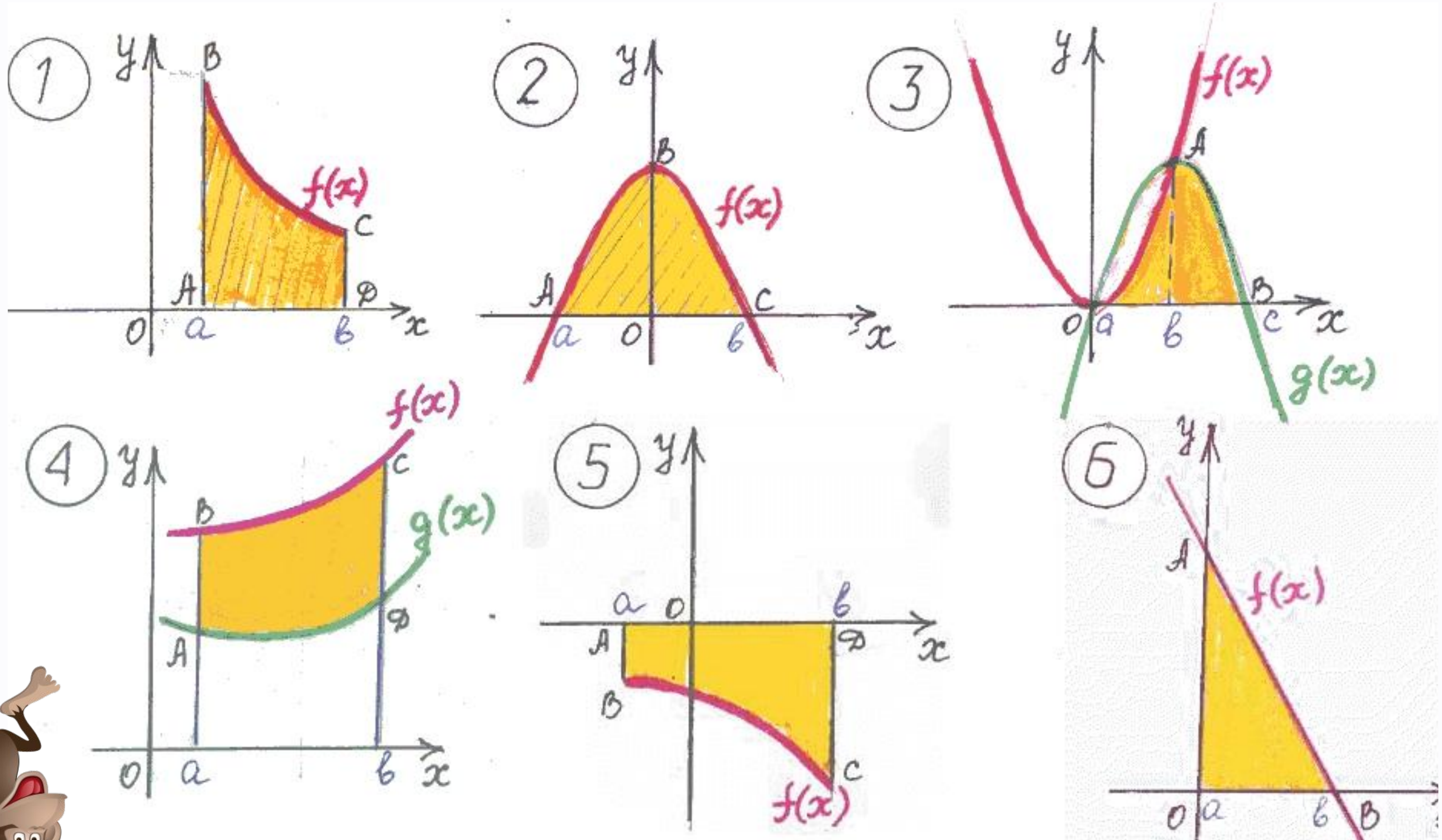
Самостоятельно решить:

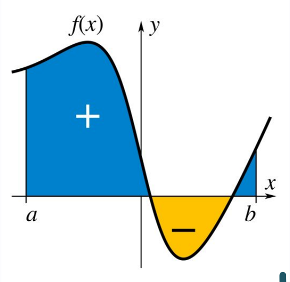
ЗАДАНИЕ 1. Указать фигуры, которые являются криволинейными трапециями



Лист 1

ЗАДАНИЕ 2. Указать фигуры, которые не являются криволинейными трапециями





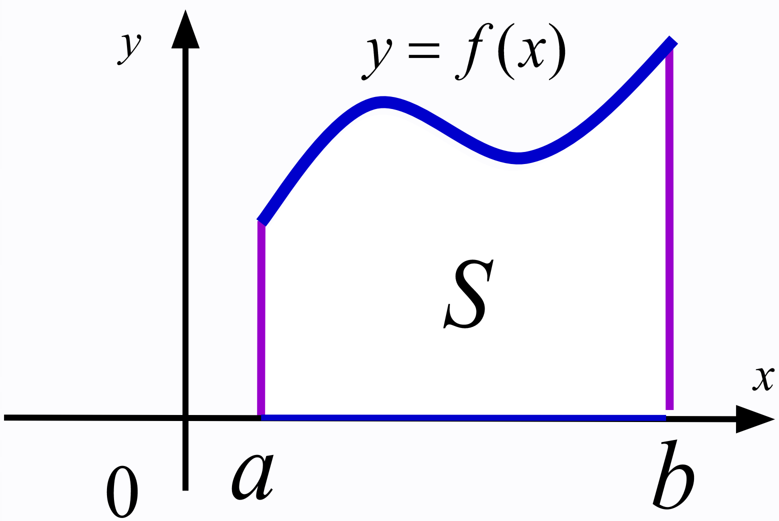
Не криволинейная трапеция

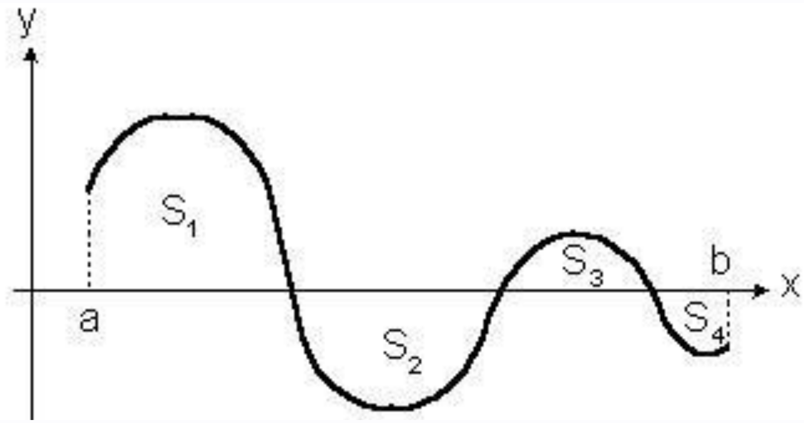
Можно разбить на 3 криволинейных трапеции

КАК НАЙТИ ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ?

$$S = F(b) - F(a)$$

F(x) – любая первообразная функции **f(x)**.

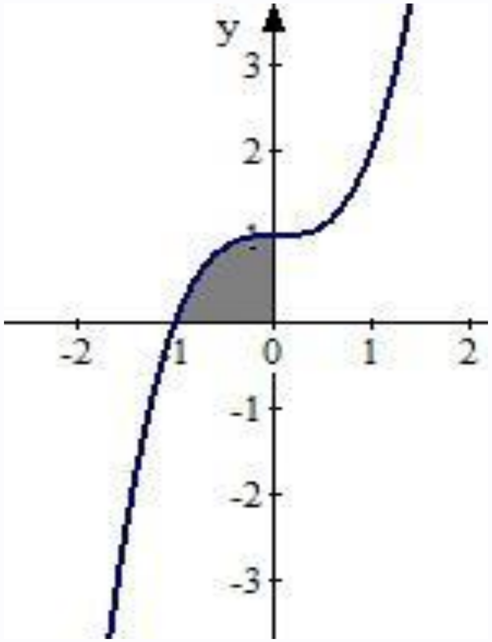




$$\int f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

Пример использования формулы $S = F(b) - F(a)$

для нахождения площади криволинейной трапеции



-Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3+1$, $y=0$, $x=0$.

Решение.

Изобразим схематично фигуру, площадь которой надо найти (рис.)

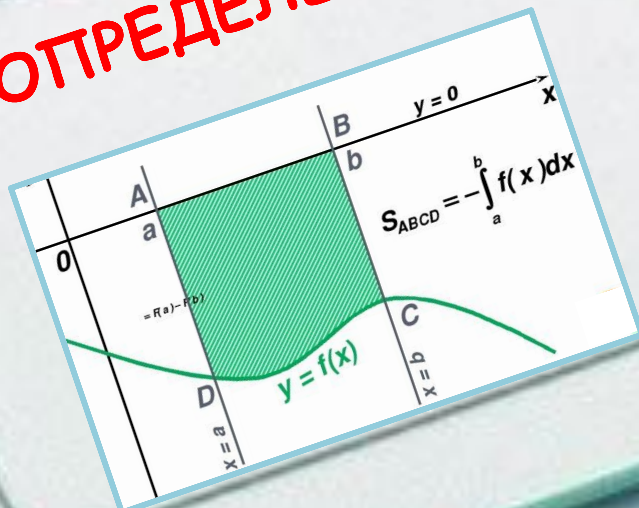
Найдём одну из первообразных ($C=0$).

$F(x) = x^4/4 + x.$

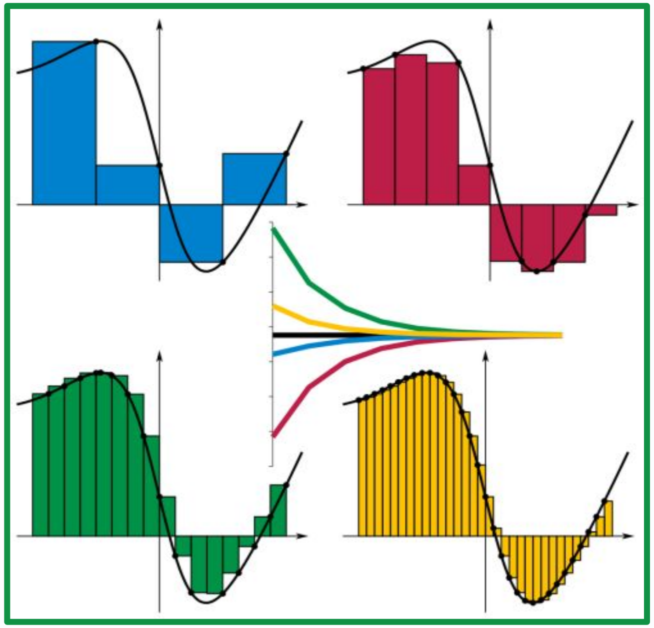
$S = F(0) - F(-1) = (0+0) - (1/4 - (-1))=$

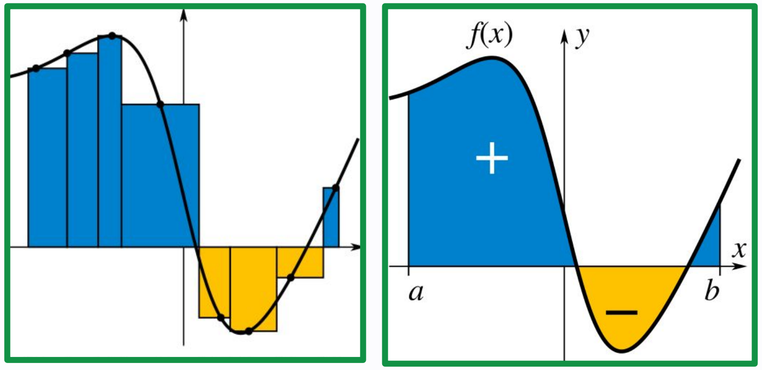
$= -1/4 + 1 = \frac{3}{4}$ (ед.кв.)

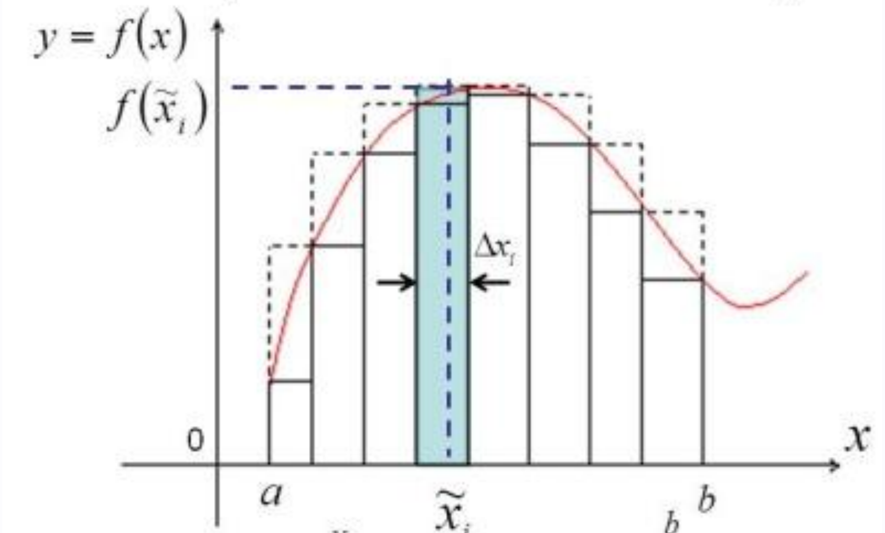
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ



ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ



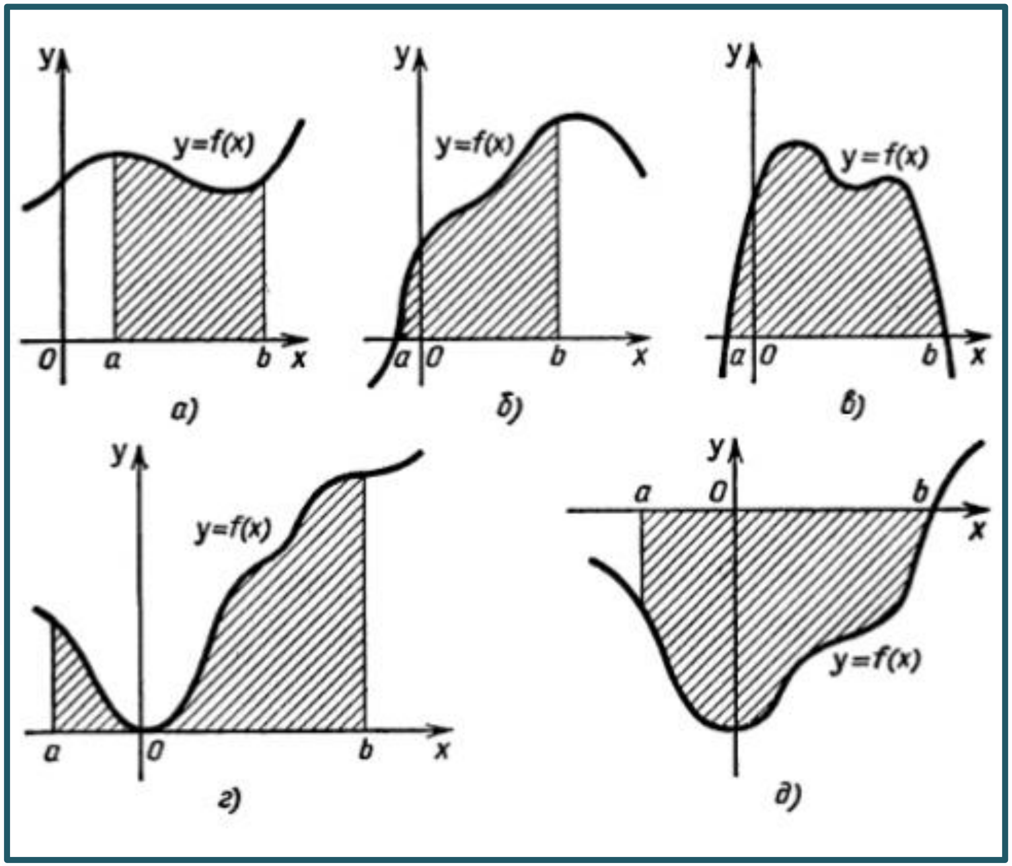




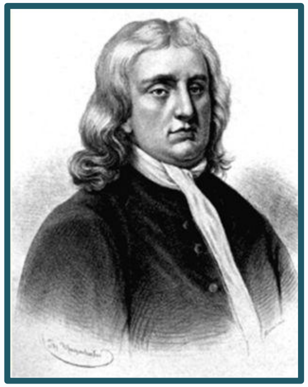
$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\tilde{x}_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ – ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ



Формула Ньютона-Лейбница



И.Ньютон
1643—1727

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\mathbf{S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Г.Лейбниц
1646—1716

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$1^\circ. \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

$2^\circ. \int_a^a f(x)dx = 0.$

$3^\circ. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

$4^\circ. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$

$5^\circ. \int_a^b C * f(x)dx = C * \int_a^b f(x)dx,$ *где* C - постоянная.

Применение свойств определенного интеграла в вычислениях (образцы)

а) $\int_1^3 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \cos x\right)dx = (3\operatorname{tg}x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$

$= 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3\operatorname{tg}0 - (\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$

г) $\int_0^1 (e^x + 2^x)dx = \left(e^x + \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 = e^1 - e^0 + \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} =$

$= e - 1 + \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = e - 1 + \frac{1}{\ln 2}.$

д) $\int_1^2 (2x-4)^3dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-4)^4}{4}\Big|_1^2 = 0 - 2 = -2$

Вычислить интегралы:

Вариант 1

1) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^6}$.

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$.

3) $\int_{0}^{\ln 3} e^{3x} \, dx$.

4) $\int_{0}^{3} \left[x^2 + (x-3)^3\right] dx$.

5) $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx$.

6) $\int_{-1}^{0} (x+1)(x^2+2x-3)\, dx$.

Вариант 2

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^4}$.

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx$.

3) $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x} \, dx$.

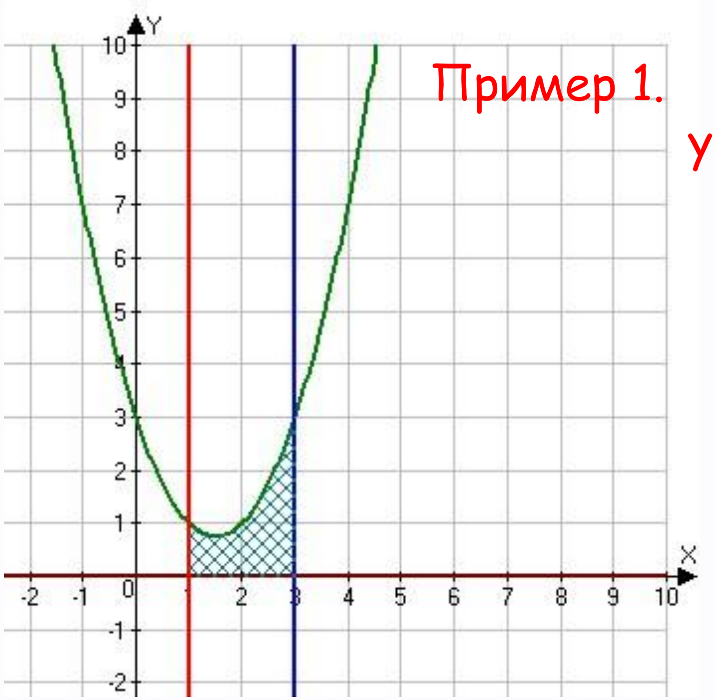
4) $\int_{-2}^{1} \left[(x-1)^3 + (x+2)^2\right] dx$.

5) $\int_{2}^{7} \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx$.

6) $\int_{0}^{2} (x-2)(x^2-4x+5)\, dx$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

С помощью определённого интеграла найти площадь криволинейных трапеций, изображенных на рисунках (образцы)



Пример 1. Фигура ограничена линиями

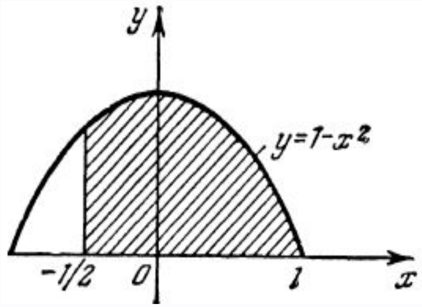
$y = x^2 - 3x + 3, \ x = 1, \ x = 3$ (рис.)

Решение.

$$S = \int_1^3 (x^2 - 3x + 3)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x \right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1 \right) =$$

$$= \left(18 - \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{11}{6} \right) = \frac{18\cdot 2 - 27}{2} - \frac{11}{6} = \frac{9}{2} - \frac{11}{6} = \frac{8}{3} \textit{кв.ед.}$$



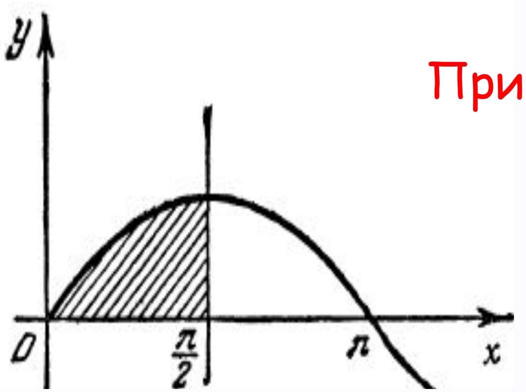
Пример 2. Фигура ограничена линиями

$y = 1 - x^2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = 0$ (рис.)

Решение.

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{2}{3} + \frac{11}{24} = \frac{27}{24}$$ (ед.кв.)



Пример 3. Фигура ограничена линиями

$y = \sin x$, $x = \pi/2$, осью Ox (рис.)

Решение.

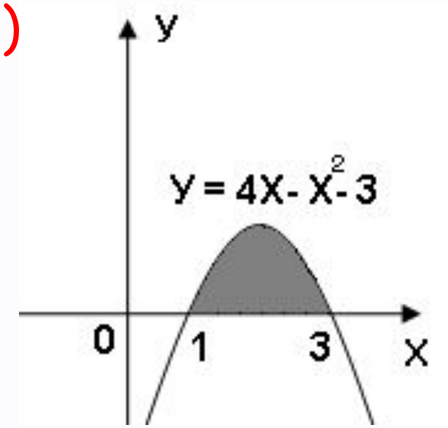
$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$ (ед.кв.)

ТРЕНИНГ «От простого к сложному».

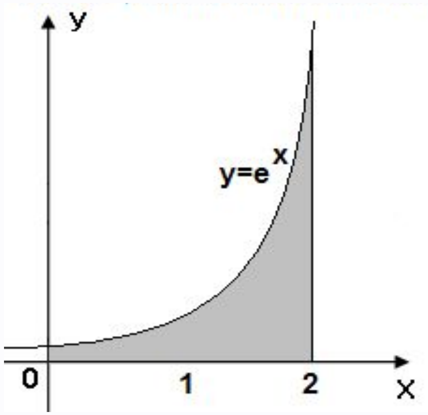
По готовым рисункам найти площади фигур.

(Вариант 1 – задания с нечётными номерами, Вариант 2 – с чётными)

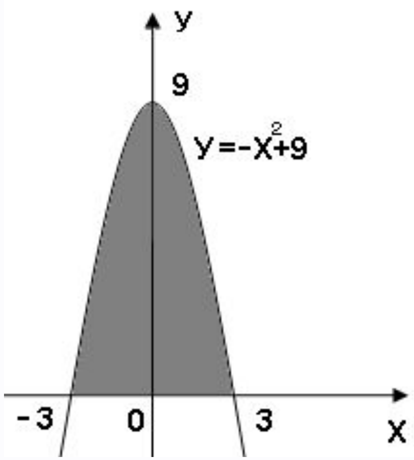
1)



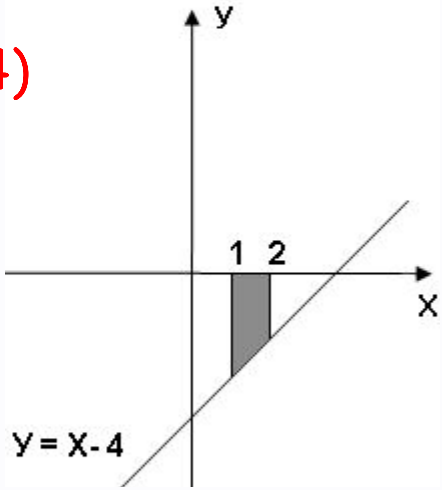
2)



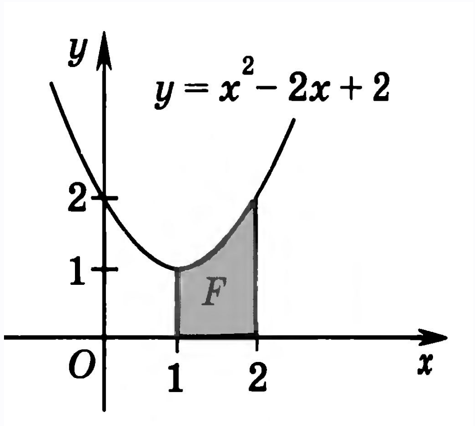
3)



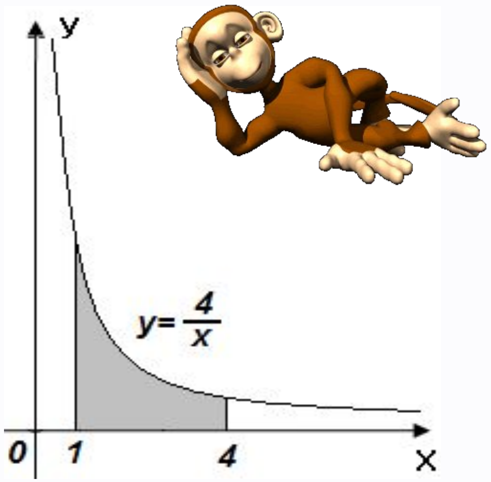
4)



5)

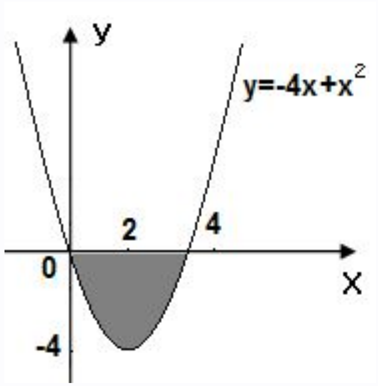


6)

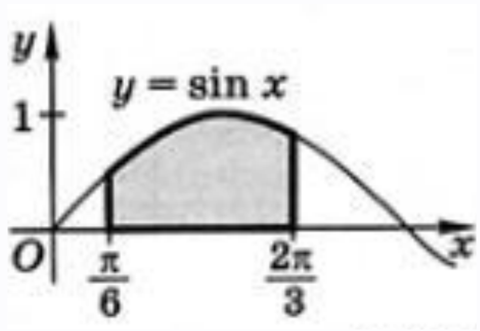


Лист 1

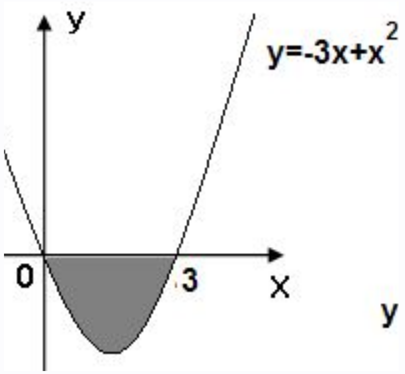
7)



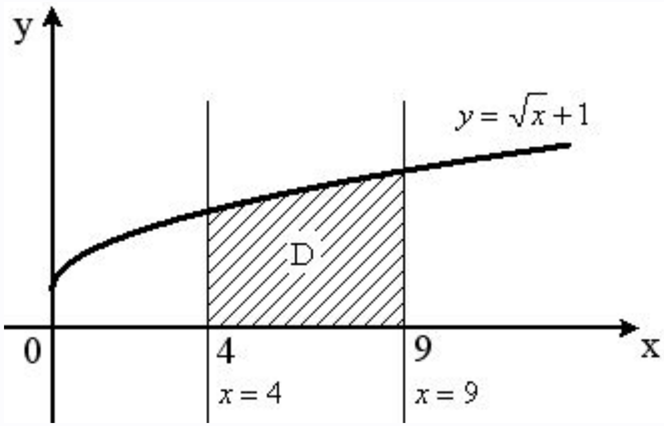
8)



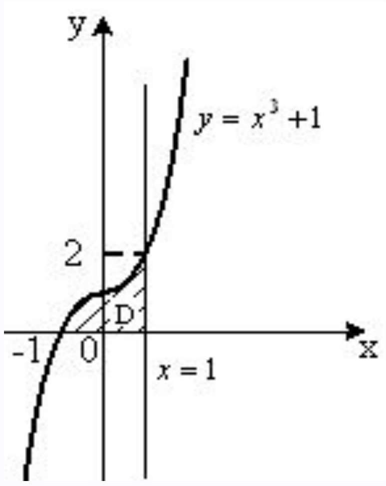
9)



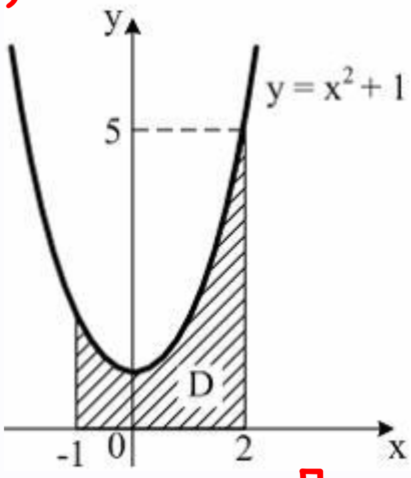
10)



11)

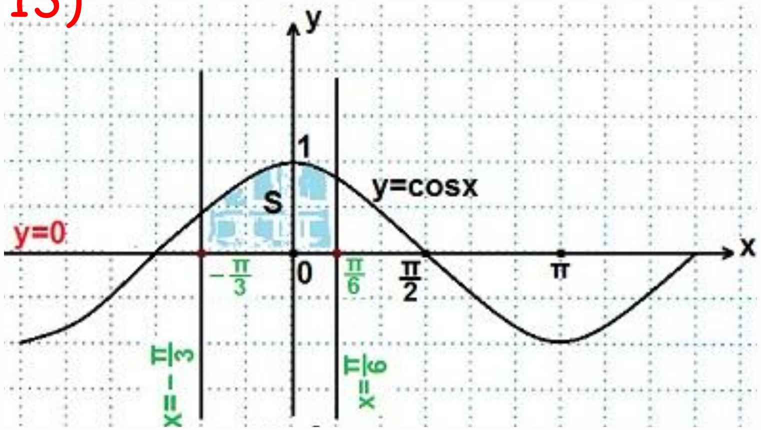


12)

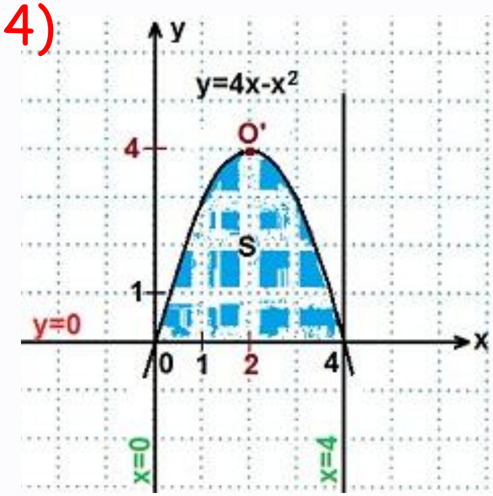


Лист 2

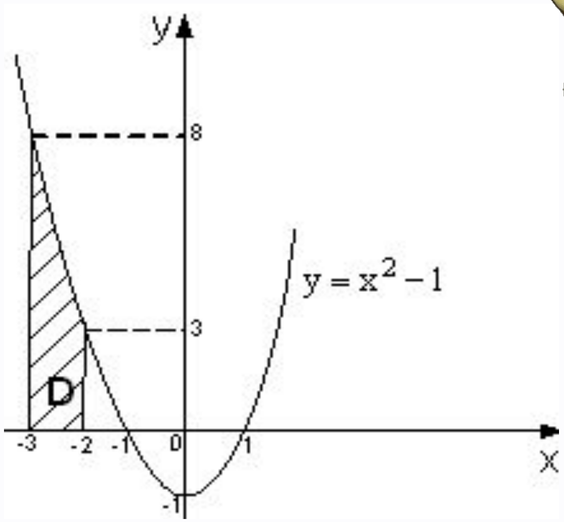
13)



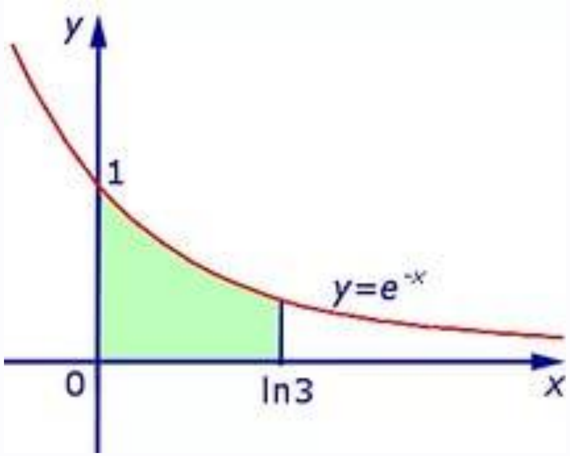
14)



15)

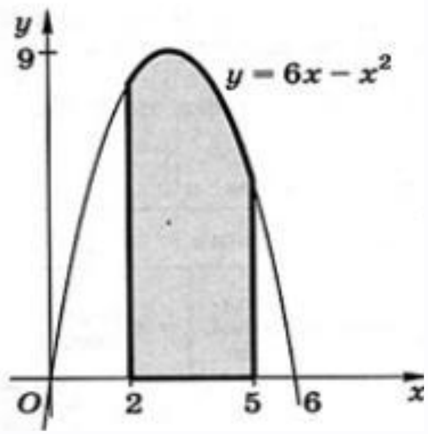


16)

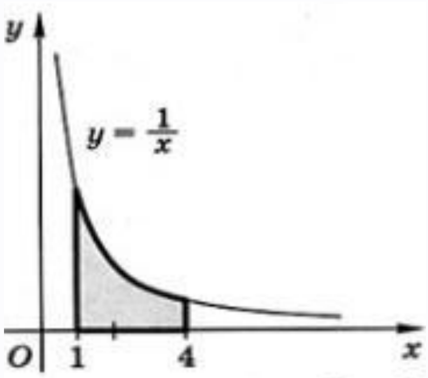


Лист 3

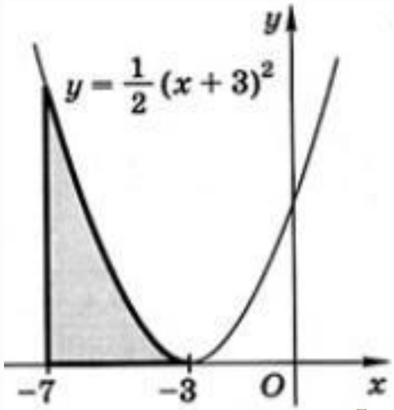
17)



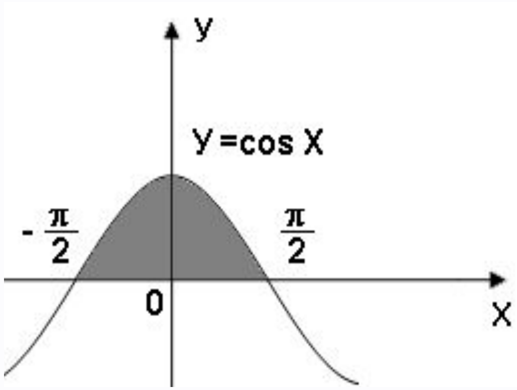
18)



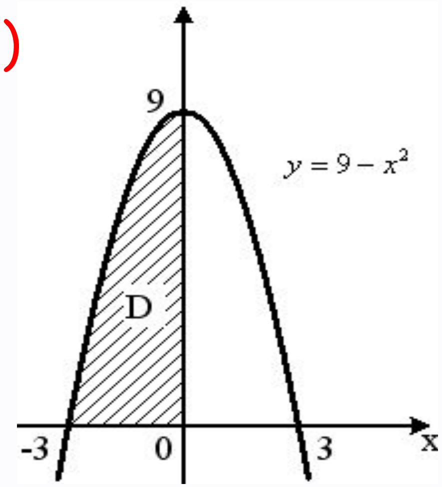
19)



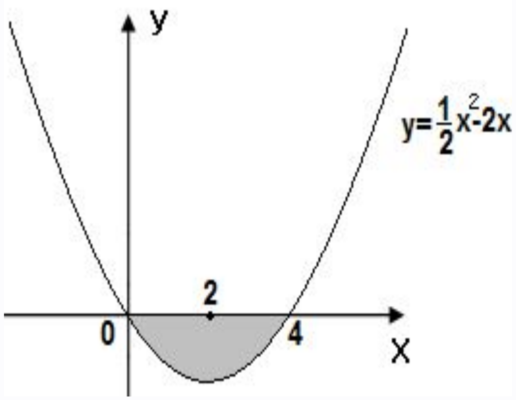
20)



21)

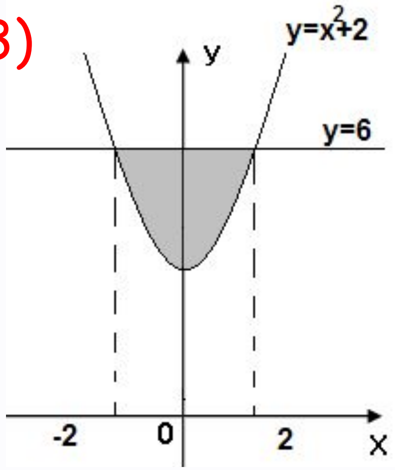


22)

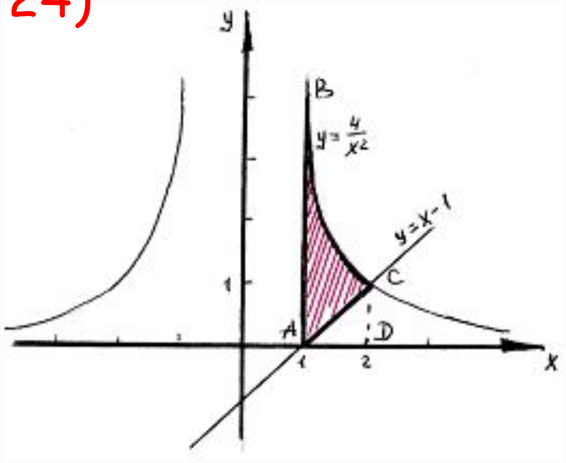


Лист 4

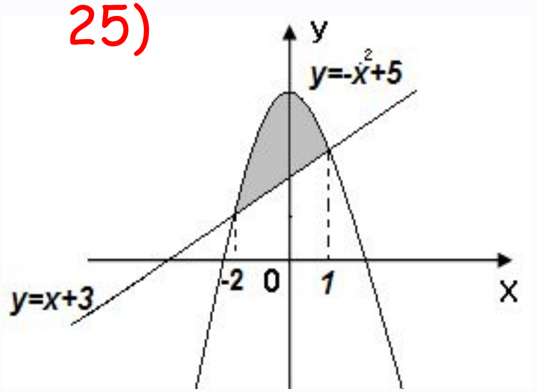
23)



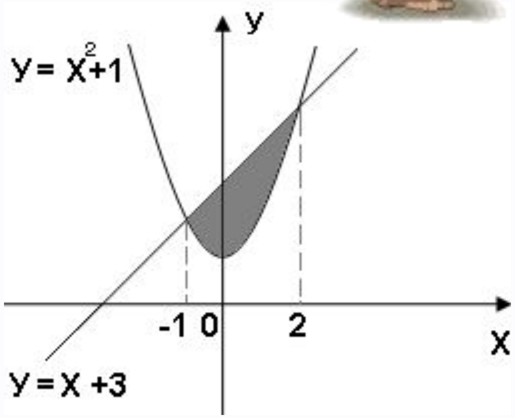
24)



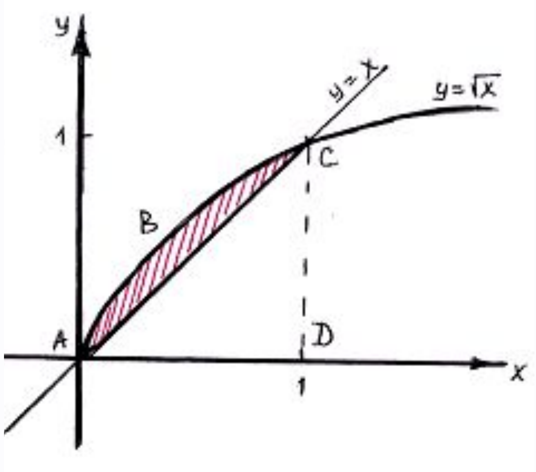
25)



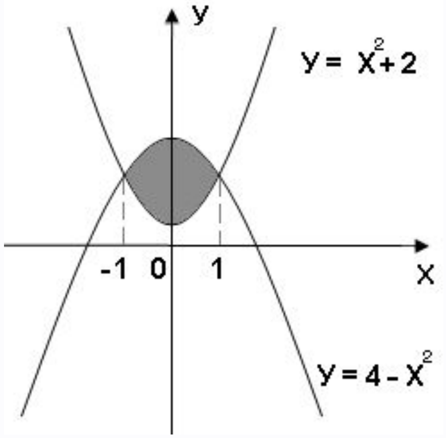
26)



27)



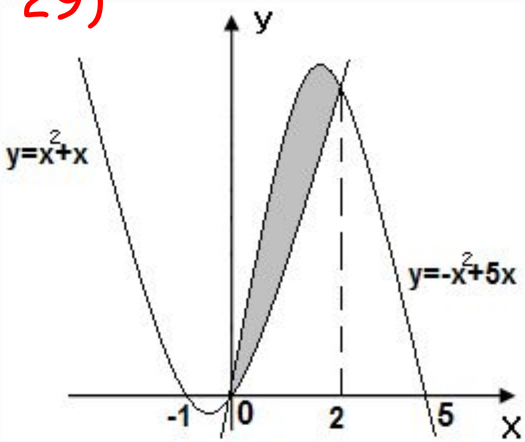
28)



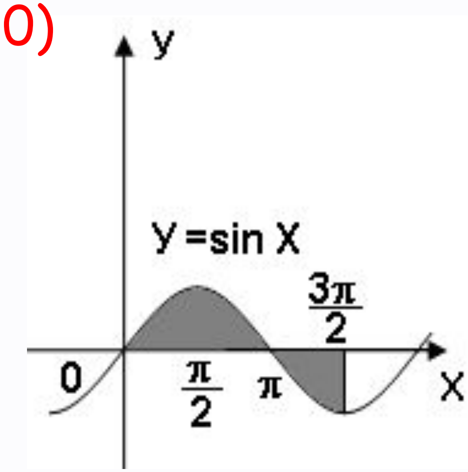
Лист 5

По готовым рисункам найти площади фигур , составив комбинации площадей криволинейных трапеций

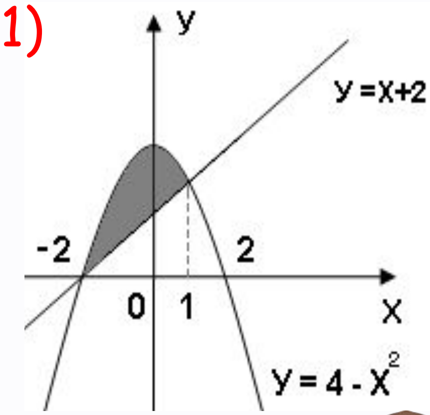
29)



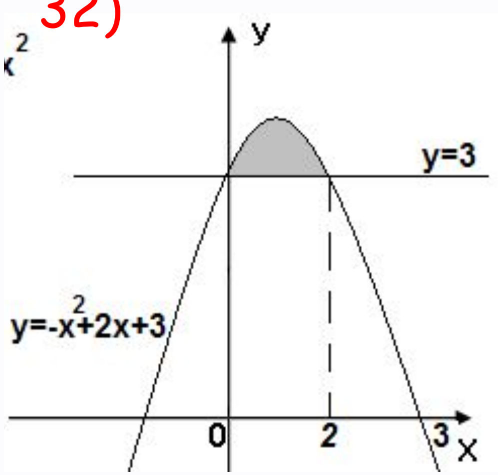
30)



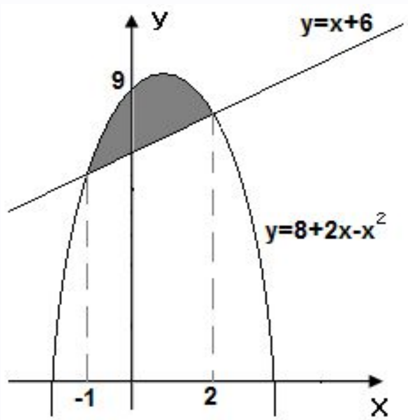
31)



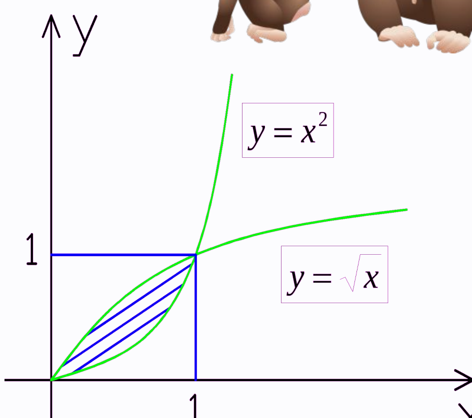
32)



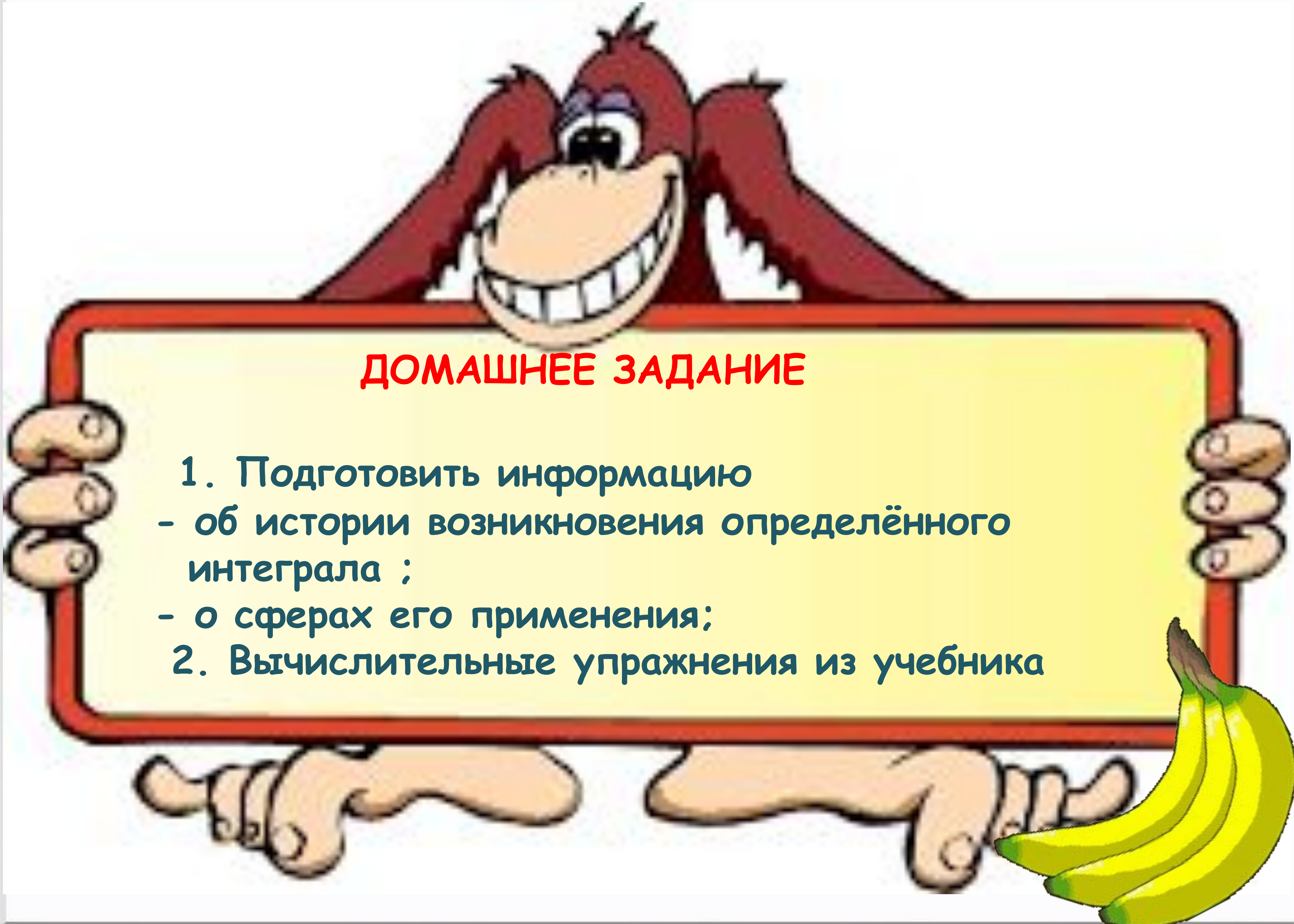
33)



34)



Лист 6


ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ
1. Подготовить информацию
- об истории возникновения определённого интеграла ;
- о сферах его применения;
2. Вычислительные упражнения из учебника