систем неравенств (задание 15 ЕГЭ)

Учитель математики МБОУ СОШ №11
Черкасова Марина Александровна

Метод рационализации ***заключается в замене сложного выражения F (x) на более простое выражение G(x), при которой неравенство G(x) $\vee$0 равносильно неравенству F(x) $\vee$0 в области определения выражения F(x).***

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q - выражения с переменной x (h > 0; h ≠ 1; f > 0; g > 0) , a – фиксированное число (a > 0; a ≠ 1).

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h f - 1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ $(g \neq 1,\ f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \quad (h>0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \iff$
  $\iff (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0$
- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \iff (fg-1)(h-1) \vee 0$
- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \iff f - g \vee 0$
- $\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \iff \frac{f-g}{p-q} \vee 0$

Решите систему:

$$\begin{cases} |2x-1|+|2x+1| \le 3-|2x|, \\ 2x(x+1)+\dfrac{874}{875} > (x+1)^2 - x\left(\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{25}\right) \end{cases}$$

Решение.

I. Решим первое неравенство системы

$$|2x-1|+|2x+1|\le 3-|2x|$$

Нули модулей: $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=0$ и $x=\dfrac{1}{2}$.

1) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$

Неравенство примет вид:

$1-2x-2x-1\le 3+2x$,

$-6x\le 3$,

$x\ge -\dfrac{1}{2}$.

$x\notin\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$

$$2)\left[-\frac{1}{2};0\right) \qquad 3)\left[0;\frac{1}{2}\right)$$

$$1-2x+2x+1\le 3+2x, \qquad 1-2x+2x+1\le 3-2x,$$

$$2x\ge -1, \qquad 2x\le 1,$$

$$x\ge -\frac{1}{2}. \qquad x\le \frac{1}{2}.$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2};0\right) \qquad x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$$

4) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

$2x-1+2x+1\le 3-2x,$

$6x\le 3,$

$x\le \frac{1}{2}.$

На рассматриваемом промежутке $x=\frac{1}{2}.$

Итак, решением первого неравенства является промежуток $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

II. Решим второе неравенство системы.

$$2x(x+1)+\frac{874}{875}>(x+1)^2-\frac{12}{175}x;$$

$$2x^2+2x+\frac{874}{875}-x^2-2x-1+\frac{12}{175}x>0;$$

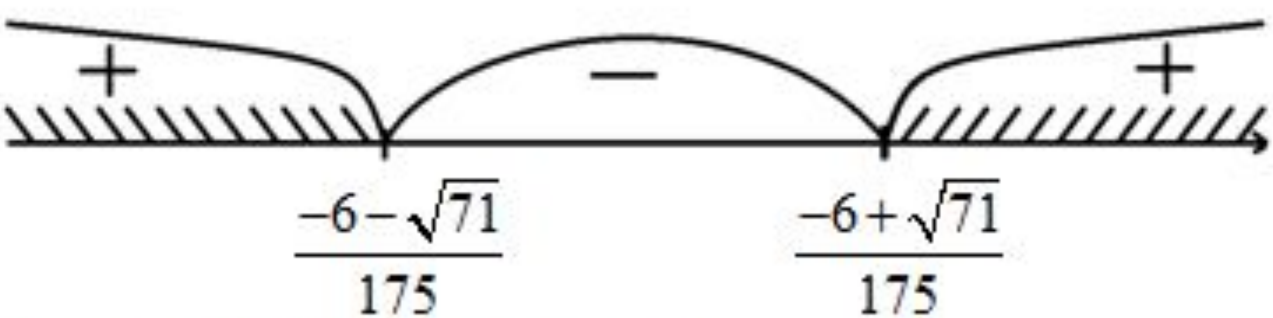
$$x^2+\frac{12}{175}x-\frac{1}{875}>0;$$

$$875x^2+60x-1>0.$$

$875x^2 + 60x - 1 = 0.$

$D = \sqrt{900 + 875}$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{900+875}}{875} = \frac{-30 \pm \sqrt{1775}}{875} = \frac{-30 \pm 5\sqrt{71}}{875} = \frac{-6 \pm \sqrt{71}}{175}.$$



Неравенство $875x^2 + 60x - 1 > 0$

равносильно совокупности неравенств: $x < \frac{-6-\sqrt{71}}{175}$, $x > \frac{-6+\sqrt{71}}{175}$.

III. Для нахождения пересечения обоих неравенств сравним числа: $\frac{-6-\sqrt{71}}{175}$ **и** $-\frac{1}{2}$, $\frac{-6+\sqrt{71}}{175}$ **и** $\frac{1}{2}$.

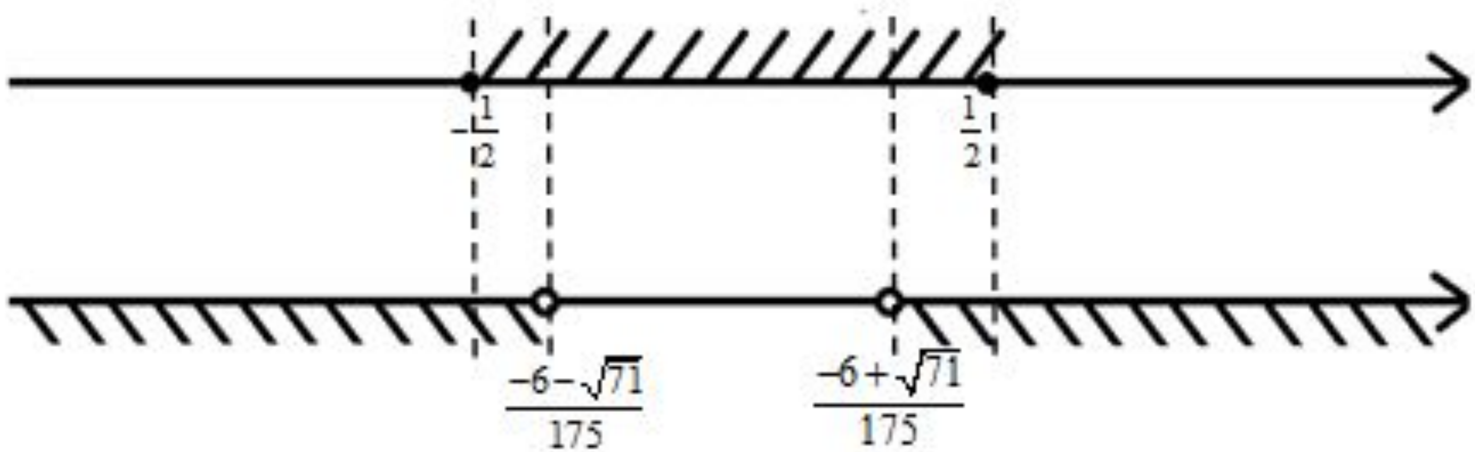
Докажем, что $\frac{-6-\sqrt{71}}{175} > -\frac{1}{2}$.

Действительно, $\frac{-6-\sqrt{71}}{175} > -\frac{1}{2}$,

т.к. $\frac{6+\sqrt{71}}{175} < \frac{1}{2}$, $12+2\sqrt{71} < 175$, $2\sqrt{71} < 163$.

$2\sqrt{71} < 2\sqrt{81} = 18$. $18 < 163$, значит, $2\sqrt{71} < 163$.

Аналогично доказывается, что $\frac{-6+\sqrt{71}}{175} < \frac{1}{2}$.



Пресечением решений обоих неравенств системы является множество

$$\left[-\frac{1}{2};\frac{-6-\sqrt{71}}{175}\right)\cup\left(\frac{-6+\sqrt{71}}{175};\frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{-6-\sqrt{71}}{175}\right)\cup\left(\frac{-6+\sqrt{71}}{175};\frac{1}{2}\right].$

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{2x+3} x^2 < 1 \\ \sqrt{4-x^2} + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \geq 0 \end{cases}.$

Решение.

I. Рассмотрим первое неравенство системы.

Найдем ограничения на x.

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3\neq 1; \\ x\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-\dfrac{3}{2} \\ x\neq -1\ . \\ x\neq 0 \end{cases}$$

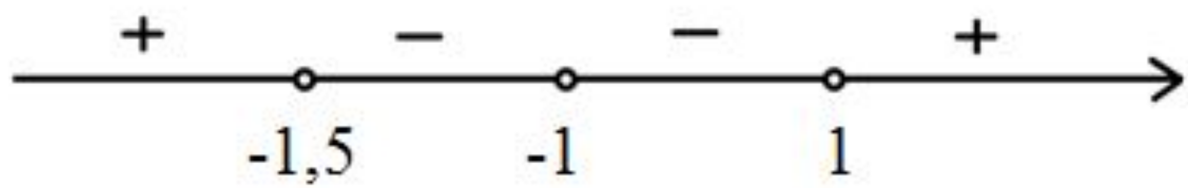
$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3);$$

$$\log_{2x+3} \frac{x^2}{2x+3} < 0$$

$$(2x+3-1)\cdot\left(\frac{x^2}{2x+3}-1\right) < 0;$$

$$(2x+3-1)\cdot\left(\frac{x^2-2x-3}{2x+3}\right) < 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x+1)(x-3)}{x+\dfrac{3}{2}} < 0$$



С учетом ограничений на x получим:

$-1{,}5 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 3$.

II. Решим второе неравенство.

Рассмотрим его на двух промежутках отдельно: $[-2;0)$ и $(0;2]$.

1) $\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ \sqrt{4-x^2} - 1 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ \sqrt{4-x^2} \ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ 4-x^2 \ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ x^2 \le 3; \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \le x < 0, \\ -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}; \end{cases}$ $-\sqrt{3} \le x < 0$.

2) $\begin{cases} 0 < x \le 2 \\ \sqrt{4-x^2} + 1 \ge 0 \end{cases}$ $0 < x \le 2$.

Объединив оба результата, получим: $-\sqrt{3} \le x < 0$, $0 < x \le 2$.

III. Пресечением решений двух неравенств системы будем иметь:
$-1{,}5 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x \le 2$.

Ответ: $(-1.5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;2]$.

Решите систему: $$\begin{cases} \left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)\ge 0 \\ \dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{3^x}{3^x-2^x}\le 1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \end{cases}$$

Решение.

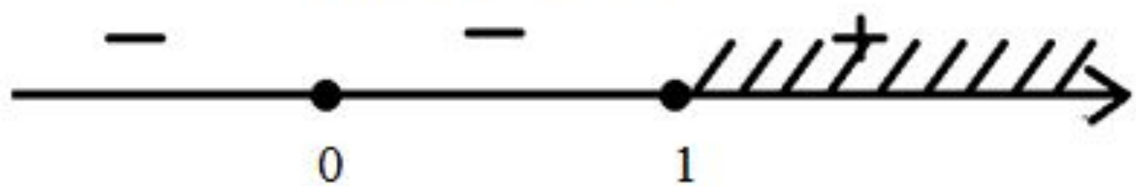
I. Рассмотрим первое неравенство.

Найдем ограничения на значения x.

$$\begin{cases} x^2-4\le 0 \\ 2x+2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x>-1 \\ x>-3 \end{cases} \quad -1<x\le 2.$$

$$\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}\right)}{\sqrt{2x+2}\cdot\sqrt{x+3}}\ge 0;$$

$$\left(4-x^2-4\right)\cdot\frac{x+3-2x-2}{\sqrt{2x+2}\cdot\sqrt{x+3}}\ge 0; \qquad x^2\cdot(x-1)\ge 0.$$



Получим: $x=0$ или $x\ge 1$.

С учетом полученных ограничений на значения x будем иметь:

$x=0$ или $1\le x\le 2$.

Итак, множество решений первого неравенства $\{0\}\cup[1;2]$.

II. Решим второе неравенство системы.

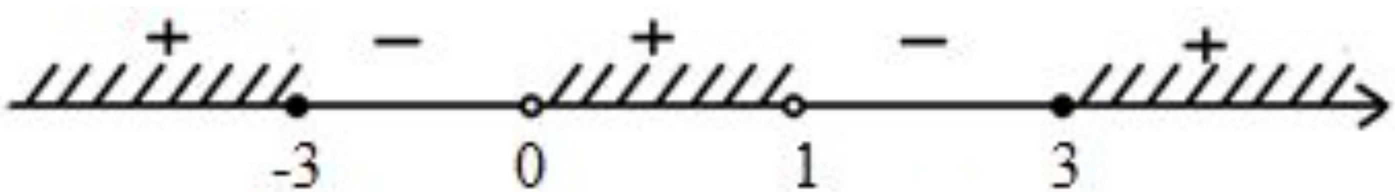
Введем новую переменную $t = \dfrac{3^x}{2^x}$.

Тогда $3^x = 2^x \cdot t$ и второе неравенство примет вид:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{2^x \cdot t}{2^x t - 2^x} \le 1 + \frac{2^x}{2^x \cdot t}; \qquad \frac{8}{9} \cdot \frac{t}{t-1} \le \frac{2^x (t+1)}{2^x t};$$

$$\frac{8t}{9(t-1)} - \frac{t+1}{t} \le 0; \quad \frac{8t^2 - 9(t^2-1)}{9t(t-1)} \le 0;$$

$$\frac{t^2-9}{t(t-1)} \ge 0; \qquad \frac{(t-3)\cdot(t+3)}{t(t-1)} \ge 0;$$



Получим: $t \le -3$, $0 < t < 1$, $t \ge 3$.

Возвращаясь к переменной x, будем иметь:

$\left(\frac{3}{2}\right)^x \le -3$, что не имеет смысла;

$\left(\frac{3}{2}\right)^x < 1,\ x < 0;$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x \ge 3,\ \left(\frac{3}{2}\right)^x \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 3},\ x \ge \log_{\frac{3}{2}} 3.$

Таким образом, решением второго неравенства

является множество $(-\infty;0) \cup \left[\log_{\frac{3}{2}} 3;+\infty\right).$

III. Однако, пересечение решений обоих неравенств системы окажется пустым, т.к. $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2$.

Докажем, что $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2$.

$\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2$, $\log_{\frac{3}{2}} 3 > \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4}$, $3 > \frac{9}{4}$, $3 > 2{,}25$ (неравенство верно).

Ответ: система решений не имеет.