

**систем  
неравенств  
(задание 15  
ЕГЭ)**

**Учитель математики МБОУ СОШ №11  
Черкасова Марина Александровна**


Метод рационализации заключается в замене сложного выражения  $F(x)$  на более простое выражение  $G(x)$ , при которой неравенство  $G(x) \neq 0$  равносильно неравенству  $F(x) \neq 0$  в области определения выражения  $F(x)$ .

Выделим некоторые выражения  $F$  и соответствующие им рационализирующие выражения  $G$ , где  $f, g, h, p, q$  - выражения с переменной  $x$  ( $h > 0; h \neq 1; f > 0; g > 0$ ),  $a$  - фиксированное число ( $a > 0; a \neq 1$ ).

№	Выражение $F$	Выражение $G$
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
1б	$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2a	$\log_h f - 1$	$(h - 1)(f - h)$
2б	$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ ( $g \neq 1, f \neq 1$ )	$(f - 1)(g - 1) \times$ $\times (h - 1)(g - f)$
4	$h^f - h^g$ ( $h > 0$ )	$(h - 1)(f - g)$
4a	$h^f - 1$	$(h - 1)f$
5	$f^h - g^h$ ( $f > 0; g > 0$ )	$(f - g)h$
6	$ f  -  g $	$(f - g)(f + g)$

## *Некоторые следствия (с учетом области определения неравенства):*

- $\log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (h - 1)(f - 1)(p - 1)(q - 1) \vee 0$
- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg - 1)(h - 1) \vee 0$
- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$
- $\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f - g}{p - q} \vee 0$



**Решите систему:**

$$\begin{cases} |2x - 1| + |2x + 1| \leq 3 - |2x|, \\ 2x(x + 1) + \frac{874}{875} > (x + 1)^2 - x \left( \frac{1}{35} + \frac{1}{25} \right) \end{cases}$$

## Решение.

### I. Решим первое неравенство системы

$$|2x-1| + |2x+1| \leq 3 - |2x|$$

Нули модулей:  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{2}$ .

$$1) \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right)$$

Неравенство примет вид:

$$1 - 2x - 2x - 1 \leq 3 + 2x,$$

$$-6x \leq 3,$$

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$x \notin \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right)$$

$$2) \left[ -\frac{1}{2}; 0 \right)$$

$$1 - 2x + 2x + 1 \leq 3 + 2x,$$

$$2x \geq -1,$$

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$x \in \left[ -\frac{1}{2}; 0 \right)$$

$$3) \left[ 0; \frac{1}{2} \right)$$

$$1 - 2x + 2x + 1 \leq 3 - 2x,$$

$$2x \leq 1,$$

$$x \leq \frac{1}{2}.$$

$$x \in \left[ 0; \frac{1}{2} \right)$$

$$4) \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$$

$$2x - 1 + 2x + 1 \leq 3 - 2x,$$

$$6x \leq 3,$$

$$x \leq \frac{1}{2}.$$

На рассматриваемом промежутке  $x = \frac{1}{2}$ .

Итак, решением первого неравенства является промежуток  $\left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$



**II. Решим второе неравенство системы.**

$$2x(x+1) + \frac{874}{875} > (x+1)^2 - \frac{12}{175}x;$$

$$2x^2 + 2x + \frac{874}{875} - x^2 - 2x - 1 + \frac{12}{175}x > 0;$$

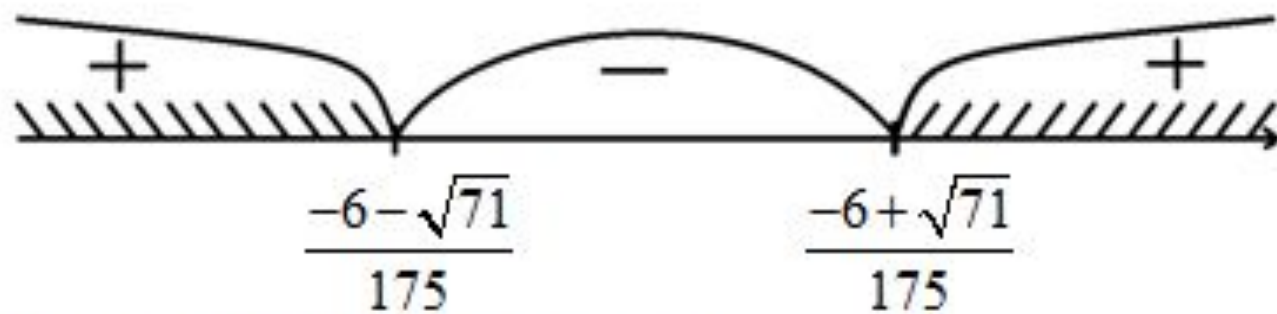
$$x^2 + \frac{12}{175}x - \frac{1}{875} > 0;$$

$$875x^2 + 60x - 1 > 0.$$

$$875x^2 + 60x - 1 = 0.$$

$$D = \sqrt{900 + 875}$$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 875}}{875} = \frac{-30 \pm \sqrt{1775}}{875} = \frac{-30 \pm 5\sqrt{71}}{875} = \frac{-6 \pm \sqrt{71}}{175}.$$



Неравенство  $875x^2 + 60x - 1 > 0$

равносильно совокупности неравенств:  $x < \frac{-6 - \sqrt{71}}{175}, x > \frac{-6 + \sqrt{71}}{175}$ .

**III. Для нахождения пересечения обоих неравенств**

**сравним числа:**  $\frac{-6 - \sqrt{71}}{175}$  и  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{-6 + \sqrt{71}}{175}$  и  $\frac{1}{2}$ .

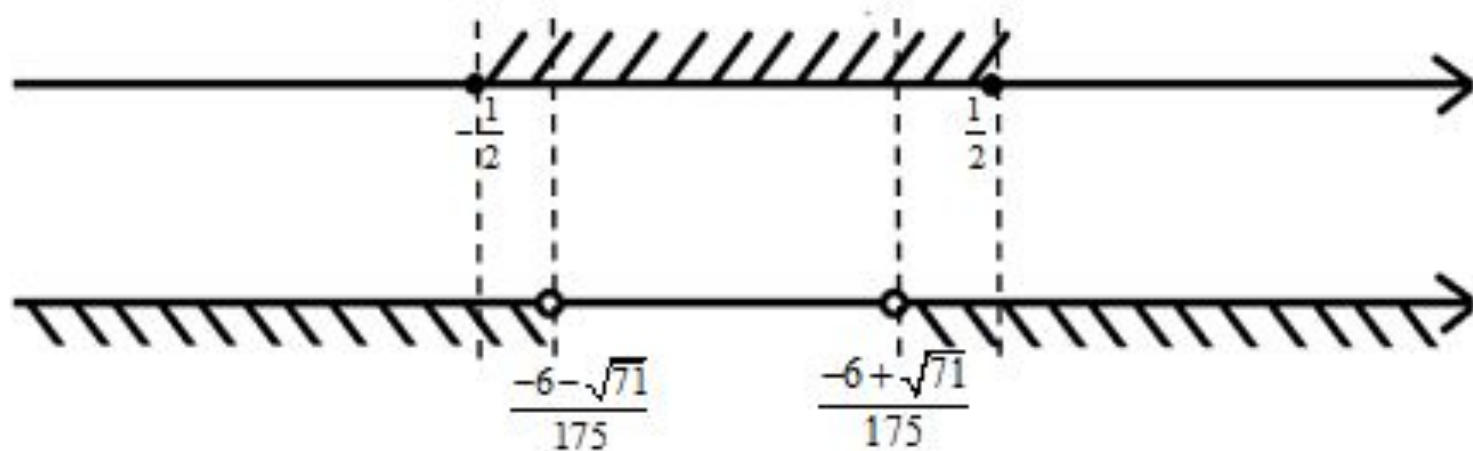
Докажем, что  $\frac{-6 - \sqrt{71}}{175} > -\frac{1}{2}$ .

Действительно,  $\frac{-6 - \sqrt{71}}{175} > -\frac{1}{2}$ .

т.к.  $\frac{6 + \sqrt{71}}{175} < \frac{1}{2}$ ,  $12 + 2\sqrt{71} < 175$ ,  $2\sqrt{71} < 163$ .

$2\sqrt{71} < 2\sqrt{81} = 18$ .  $18 < 163$ , значит,  $2\sqrt{71} < 163$ .

Аналогично доказывается, что  $\frac{-6 + \sqrt{71}}{175} < \frac{1}{2}$ .



Пресечением решений обоих неравенств системы является множество

$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{-6 - \sqrt{71}}{175}\right) \cup \left(\frac{-6 + \sqrt{71}}{175}; \frac{1}{2}\right].$$

**Ответ:**  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{-6 - \sqrt{71}}{175}\right) \cup \left(\frac{-6 + \sqrt{71}}{175}; \frac{1}{2}\right].$

**Решите систему неравенств**

$$\begin{cases} \log_{2x+3} x^2 < 1 \\ \sqrt{4-x^2} + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \geq 0 \end{cases}.$$

**Решение.**

**I. Рассмотрим первое неравенство системы.**

Найдем ограничения на  $x$ .

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ 2x + 3 \neq 1; \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

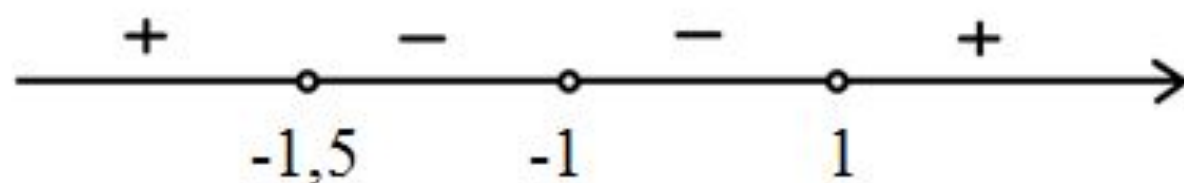
$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x+3);$$

$$\log_{2x+3} \frac{x^2}{2x+3} < 0$$

$$(2x+3-1) \cdot \left( \frac{x^2}{2x+3} - 1 \right) < 0;$$

$$(2x+3-1) \cdot \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{2x+3} \right) < 0$$

$$\frac{(x+1) \cdot (x+1)(x-3)}{x + \frac{3}{2}} < 0$$



С учетом ограничений на  $x$  получим:  
 $-1,5 < x < -1$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $0 < x < 3$ .

## II. Решим второе неравенство.

Рассмотрим его на двух промежутках отдельно:  $[-2;0)$  и  $(0;2]$ .

$$1) \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ \sqrt{4-x^2} - 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ \sqrt{4-x^2} \geq 1; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ 4-x^2 \geq 1; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ x^2 \leq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}; \end{cases} \quad -\sqrt{3} \leq x < 0.$$

$$2) \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} + 1 \geq 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq 2.$$

Объединив оба результата, получим:  $-\sqrt{3} \leq x < 0$ ,  $0 < x \leq 2$ .

III. Пресечением решений двух неравенств системы будем иметь:

$$-1,5 < x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x \leq 2.$$

**Ответ:**  $(-1,5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;2]$ .



**Решите систему:**

$$\begin{cases} (\sqrt{4-x^2} - 2) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) \geq 0 \\ \frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x - 2^x} \leq 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^x \end{cases}$$

**Решение.**

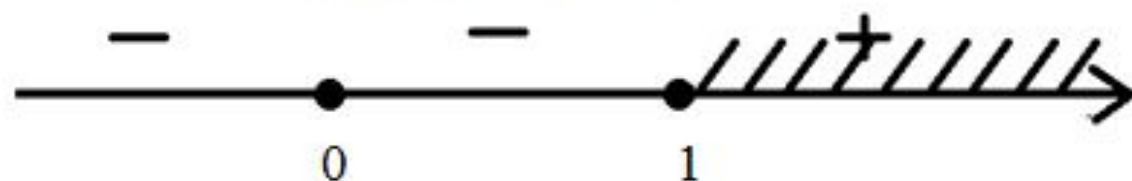
**I. Рассмотрим первое неравенство.**

Найдем ограничения на значения  $x$ .

$$\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ 2x + 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > -1 \\ x > -3 \end{cases} \quad -1 < x \leq 2.$$

$$\left(\sqrt{4-x^2} - 2\right)\left(\sqrt{4-x^2} + 2\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+2}\right) \cdot \left(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+2}\right)}{\sqrt{2x+2} \cdot \sqrt{x+3}} \geq 0;$$

$$\left(4 - x^2 - 4\right) \cdot \frac{x+3 - 2x - 2}{\sqrt{2x+2} \cdot \sqrt{x+3}} \geq 0; \quad x^2 \cdot (x-1) \geq 0.$$



Получим:  $x = 0$  или  $x \geq 1$ .

С учетом полученных ограничений на значения  $x$  будем иметь:

$$x = 0 \text{ или } 1 \leq x \leq 2.$$

Итак, множество решений первого неравенства  $\{0\} \cup [1;2]$ .

## II. Решим второе неравенство системы.

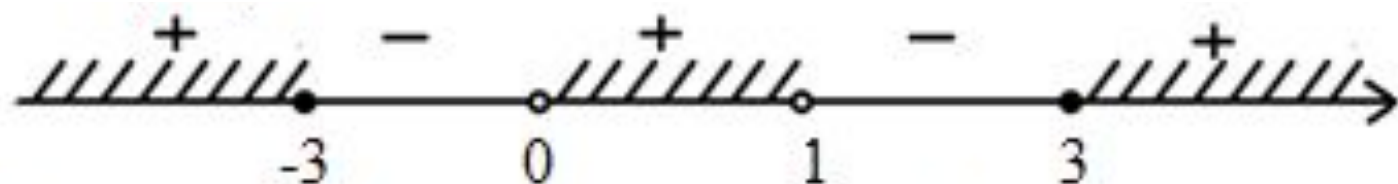
Введем новую переменную  $t = \frac{3^x}{2^x}$ .

Тогда  $3^x = 2^x \cdot t$  и второе неравенство примет вид:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{2^x \cdot t}{2^x t - 2^x} \leq 1 + \frac{2^x}{2^x \cdot t}; \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{t}{t-1} \leq \frac{2^x(t+1)}{2^x t};$$

$$\frac{8t}{9(t-1)} - \frac{t+1}{t} \leq 0; \quad \frac{8t^2 - 9(t^2 - 1)}{9t(t-1)} \leq 0;$$

$$\frac{t^2 - 9}{t(t-1)} \geq 0; \quad \frac{(t-3) \cdot (t+3)}{t(t-1)} \geq 0;$$



Получим:  $t \leq -3, 0 < t < 1, t \geq 3$ .

Возвращаясь к переменной  $x$ , будем иметь:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq -3, \text{ что не имеет смысла;}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < 1, x < 0;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 3, \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 3}, x \geq \log_{\frac{3}{2}} 3.$$

Таким образом, решением второго неравенства

$$\text{является множество } (-\infty; 0) \cup \left[ \log_{\frac{3}{2}} 3; +\infty \right).$$

III. Однако, пересечение решений обоих неравенств системы окажется пустым, т.к.  $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2$ .

Докажем, что  $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2$ .

$$\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2, \quad \log_{\frac{3}{2}} 3 > \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4}, \quad 3 > \frac{9}{4}, \quad 3 > 2,25 \text{ (неравенство верно).}$$

Ответ: система решений не имеет.