

*Тема урока: „
Преобразование
логарифмических
выражений”.*

Определение логарифма

Логарифмом числа b по основанию a , при $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ при } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Например:

$$\log_2 16 = 4, \text{ т.к. } 2^4 = 16$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \text{ т.к. } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Логарифм по основанию 10 называется **десятичным логарифмом** и обозначается $lg b$.

Логарифм по основанию e ($e \approx 2,7$) называется **натуральным логарифмом** и обозначается $ln b$.

Основное логарифмическое тождество:

- $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Например:

$$3^{\log_3 18} = 18$$

$$8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 5^3 = 125$$

Свойства логарифмов

$$1) \log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$2) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$3) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$$

$$4) \log_a b^r = r \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$5) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

$$6) \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Полезно знать!

Другие свойства логарифмов:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

- $\log_a n b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

- $\log_a n b = \frac{1}{n} \log_a b$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Примеры:

$$1) \log_2 6 + \log_2 \left(10 \frac{2}{3}\right) = \log_2 6 + \log_2 \frac{32}{3} = \log_2 \frac{6 \cdot 32}{3} = \log_2 64 = 6$$

$$2) \log_2 \frac{1}{0,125} = \log_2 (0,5)^{-3} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_2 2^3 = 3$$

$$3) \lg 0,1 \sqrt[3]{100} = \lg \left(10^{-1} \cdot 10^{\frac{2}{3}}\right) = \lg 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \lg 10 = -\frac{1}{3}$$

$$4) \log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

5) Известно, что $\log_5 2 = a$. Найти $\log_2 80$.

Решение: $\log_2 80 = \log_2 (16 \cdot 5) = \log_2 16 + \log_2 5 =$
 $= 4 + \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{a} = \frac{4a + 1}{a}.$

6) Найти $\lg 45$, если $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$.

Решение: $\lg 45 = \lg (9 \cdot 5) = \lg 9 + \lg 5 = \lg 3^2 + \lg \frac{10}{2} =$
 $= 2\lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = 2a + 1 - b.$

Решите самостоятельно.

1) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

2) $\left(\frac{1}{36}\right)^{\log_6 5}$

3) Найдите $\log_7 245$, если известно, что $\log_7 5 = b$.

4) $\log_5 150 \sqrt[3]{5} + \log_{25} \frac{1}{36}$