

Занимательная математика

АЛГЕБРА
8 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ
НЕРАВЕНСТВ

Если $a > b$ и $b > c$ то $a > c$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Свойства числовых неравенств.

Ребята, с неравенствами мы уже сталкивались, например, когда только начинали знакомиться с понятием корня квадратного. Интуитивно понятно, что с помощью неравенств можно оценить какое из данных чисел больше или меньше. Для математического описания достаточно добавить специальный символ, который будет означать либо больше, либо меньше.

Запись на математическом языке $a > b$ означает, что число a больше числа b , что в свою очередь значит $a - b$ положительное число.

Запись на математическом языке $a < b$ означает, что число a меньше числа b , что в свою очередь значит $a - b$ отрицательное число.

Как и практически все математические объекты неравенства имеют некоторые свойства, изучением таких свойств мы и займемся на этом уроке.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 1. Если $a > b$ и $b > c$ то $a > c$.

Доказательство. Вроде бы очевидно, что $10 > 5$ и $5 > 2$ и конечно $10 > 2$. Но математика любит строгие доказательства для самого общего случая.

Если $a > b$ то $a - b$ положительное число, если $b > c$ то $b - c$ положительное число, давайте сложим два полученных положительных числа
 $a - b + b - c = a - c$

Сумма двух положительных чисел есть положительное число, но тогда $a - c$ также положительное число, из чего следует $a > c$. Свойство доказано.

Более наглядно данное свойство можно показать используя числовую прямую, если $a > b$, то число a на числовой прямой будет лежать правее b , и соответственно $b > c$ число b будет лежать правее числа c .



Как хорошо видно из рисунка, точка a в таком случае находится правее точки c , что и означает $a > c$.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$. Иначе говоря, если число a больше числа b , то какое бы мы число не прибавили (положительное или отрицательное) к этим числам, то знак неравенства будет так же сохраняться. Доказывается данное свойство очень легко, нужно так же выполнить вычитание и та переменная, которую прибавляли, исчезнет, и получится верное исходное неравенство.

Свойство 3.

а) Если обе части неравенства умножить на положительное число, то знак неравенства сохраняется.

Если $a > b$ и $c > 0$, тогда $ac > bc$.

б) Если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства следует поменять на противоположный.

Если $a > b$ и $c < 0$, тогда $ac < bc$.

Если $a < b$ и $c < 0$, тогда $ac > bc$.

При делении следует действовать тем же образом. (делим на положительное число знак сохраняется, делим на отрицательно число знак меняем)

Свойства числовых неравенств.

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство. Из условия $a - b$ – положительное число. $c - d$ – положительное число. Тогда сумма $(a - b) + (c - d)$ тоже положительное число, поменяем местами некоторые слагаемые $(a + c) - (b + d)$ от перемены мест слагаемых сумма не изменяется, значит $(a + c) - (b + d)$ положительное число и $a + c > b + d$ свойство доказано.

Свойство 5. Если a, b, c, d – положительные числа и $a > b$, $c > d$ то $ac > bd$.

Доказательство. Так как $a > b$ и $c > 0$, то используя свойство 3 $ac > bc$. Так как $c > d$ и $b > 0$, то опять же используя свойство 3 $cb > bd$.

И так $ac > bc$ и $bc > bd$, тогда используя свойство 1, получаем $ac > bd$ как раз то, что требовалось доказать.

Определение. Неравенства вида $a > b$ и $c > d$ ($a < b$ и $c < d$) называются неравенствами одинакового смысла.

Неравенства вида $a > b$ и $c < d$ ($a < b$ и $c > d$) называются неравенствами противоположного смысла.

Тогда *свойство 5* можно перефразировать, при умножение неравенств одного смысла у которых левые и правые части положительные получается неравенство того же смысла.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 6. Если $a > b$ ($a > 0, b > 0$), то $a^n > b^n$ - любое натуральное число. То есть если обе части неравенства положительные числа, и их возвести в одну и ту же натуральную степень, то получится неравенство того же смысла.

Так же заметим, если n нечетное число, то тогда для любых по знаку чисел a и b свойство 6 выполняется.

Свойство 7. Если $a > b$ ($a > 0, b > 0$), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Доказательство. Чтобы доказать данное свойство в разности мы должны получить отрицательное число. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = \frac{-(a - b)}{ab}$$

Мы знаем что $a - b$ положительное число, и произведение двух положительных чисел тоже положительное число, т.е. $ab > 0$. Тогда

$$\frac{-(a - b)}{ab} \text{ отрицательное число.}$$

Свойство доказано.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 8. Если $a > 0$, то тогда выполняется неравенство

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a - 1)^2}{a} - \text{неотрицательное число.}$$

Свойство доказано.

Свойство 9. Неравенство Коши. (Среднее арифметическое больше либо равно среднего геометрического)

Если a и b неотрицательные числа, то выполняется неравенство

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} - \text{неотрицательное число.}$$

Свойство доказано.

Свойства числовых неравенств.

Пример 1. Известно что $-1.5 < a < 2.1$ и $3.1 < b < 5.3$. Найти оценки чисел
а) $3a$ б) $-2b$ в) $a+b$ г) $a-b$ д) b^2 е) a^3 ж) $\frac{1}{b}$

Решение.

а) Воспользуемся свойством 3, так как умножаем на положительное число то знак неравенства не меняется

$$\begin{aligned} -1.5 \cdot 3 < a \cdot 3 < 2.1 \cdot 3 \\ -4.5 < 3a < 6.3 \end{aligned}$$

б) Опять же используя свойство 3, умножая на отрицательное число следует менять знак неравенства

$$\begin{aligned} -2 \cdot 3.1 > -2 \cdot b > -2 \cdot 5.3 \\ -10.3 < -2b < -6.2 \end{aligned}$$

в) Сложив неравенства одинаково смысла получим неравенство того же смысла

$$\begin{aligned} -1.5 + 3.1 < a + b < 2.1 + 5.3 \\ 1.6 < a + b < 7.4 \end{aligned}$$

Свойства числовых неравенств.

г) Сначала умножим все части неравенства $3.1 < b < 5.3$ на минус один, получится неравенство противоположного смысла

$$-5.3 < -b < -3.1$$

Теперь выполним операцию сложения

$$-1.5 - 5.3 < a - b < 2.1 - 3.1$$

$$-6.8 < a - b < -1$$

д) Все части неравенства положительны, возведя их в квадрат получим неравенство того же смысла

$$3.1^2 < b^2 < 5.3^2$$

$$9.61 < b^2 < 28.09$$

е) Степень неравенства нечетная, тогда можно смело возводить в степень и не менять знак

$$(-1.5)^3 < a^3 < 2.1^3$$

$$-3.375 < a^3 < 9.261$$

ж) Воспользуемся свойством 7.

$$\frac{1}{5.3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3.1}$$

$$\frac{10}{53} < \frac{1}{b} < \frac{10}{31}$$

Свойства числовых неравенств.

Пример 2. Сравните числа

а) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ и $2 + \sqrt{8}$ $\pi + \sqrt{8}$ и $4 + \sqrt{10}$

Решение.

а) Возведем каждое из чисел в квадрат

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 = 5 + 2\sqrt{35} + 7 = 12 + \sqrt{140}$$

$$(2 + \sqrt{8})^2 = 4 + 4\sqrt{8} + 8 = 12 + \sqrt{128}$$

Вычислим разность квадратов этих квадратов

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - (2 + \sqrt{8})^2 = 12 + \sqrt{140} - 12 - \sqrt{128} = \sqrt{140} - \sqrt{128}$$

Очевидно, получили положительное число, что означает

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 > (2 + \sqrt{8})^2$$

Так как оба числа положительных, то

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} > 2 + \sqrt{8}$$

б) $\pi < 4$ и $\sqrt{8} < \sqrt{10}$, тогда $\pi + \sqrt{8} < 4 + \sqrt{10}$

Свойства числовых неравенств.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Известно что $-2.2 < a < 3.1$ и $1.2 < b < 3.7$. Найти оценки чисел

а) $4a$ б) $-3b$ в) $a+b$ г) $a-b$ д) b^4 е) a^3 ж) $\frac{1}{b}$

2. Сравните числа

а) $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$ $\pi + \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{3}$