Занимательная математика

АЛГЕБРА

8 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ: СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если $a>b$ и $b>c$ то $a>c$.

Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Свойства числовых неравенств.

Ребята, с неравенствами мы уже сталкивались, например, когда только начинали знакомиться с понятием корня квадратного. Интуитивно понятно, что с помощью неравенств можно оценить какое из данных чисел больше или меньше. Для математического описания достаточно добавить специальный символ, который будет означать либо больше, либо меньше.

Запись на математическом языка $a>b$ означает, что число a больше числа b, что в свою очередь значит a-b положительное число.

Запись на математическом языка $a<b$ означает, что число a меньше числа b, что в свою очередь значит a-b отрицательное число.

Как и практически все математические объекты неравенства имеют некоторые свойства, изучением таких свойств мы и займемся на этом уроке.

Свойства числовых неравенств.

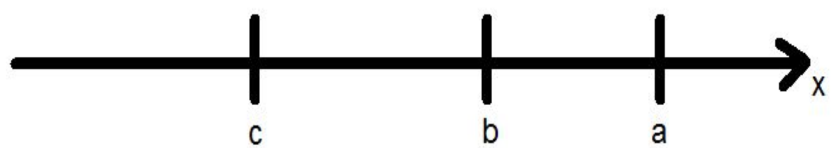
Свойство 1. Если a>b и b>c то a>c.

Доказательство. Вроде бы очевидно, что 10>5 и 5>2 и конечно 10>2. Но математика любит строгие доказательства для самого общего случая.

Если a>b то a-b положительное число, если b>c то b-c положительное число, давайте сложим два полученных положительных числа
a-b+b-c=a-c

Сумма двух положительных чисел есть положительное число, но тогда a-c также положительное число, из чего следует a>c. Свойство доказано.

Более наглядно данное свойство можно показать используя числовую прямую, если a>b, то число a на числовой прямой будет лежать правее b, и соответственно b>c число b будет лежать правее числа c.



Как хорошо видно из рисунка, точка a в таком случае находится правее точки c, что и означает a>c.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 2. Если $a>b$, то $a+c>b+c$. Иначе говоря, если число a больше числа b, то какое бы мы число не прибавили (положительное или отрицательное) к этим числам, то знак неравенства будет так же сохраняться. Доказывается данное свойство очень легко, нужно так же выполнить вычитание и та переменная, которую прибавляли, исчезнет, и получится верное исходное неравенство.

Свойство 3.

а) Если обе части неравенства умножить на положительное число, то знак неравенства сохраняется.

Если $a>b$ и $c>0$, тогда $ac>bc$.

б) Если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства следует поменять на противоположный.

Если $a>b$ и $c<0$, тогда $ac<bc$.

Если $a<b$ и $c<0$, тогда $ac>bc$.

При делении следует действовать тем же образом. (делим на положительное число знак сохраняется, делим на отрицательно число знак меняем)

Свойства числовых неравенств.

Свойство 4. Если a>b и c>d, то a+c>b+d.

Доказательство. Из условия a-b – положительное число. c-d –положительное число. Тогда сумма (a-b)+(c-d) тоже положительное число, поменяем местами некоторые слагаемые (a+c)-(b+d) от перемены мест слагаемых сумма не изменяется, значит (a+c)-(b+d) положительное число и a+c>b+d свойство доказано.

Свойство 5. Если a,b,c,d – положительные числа и a>b, c>d то ac>bd.

Доказательство. Так как a>b и c>0, то используя свойство 3 ac>bc. Так как c>d и b>0, то опять же используя свойство 3 cb>bd.

И так ac>bc и bc >bd, тогда используя свойство 1, получаем ac>bd как раз то, что требовалось доказать.

Определение. Неравенства вида a>b и c>d (a<b и c<d) называются неравенствами одинакового смысла.

Неравенства вида a>b и c<d (a<b и c>d) называются неравенствами противоположного смысла.

Тогда *свойство 5* можно перефразировать, при умножение неравенств одного смысла у которых левые и правые части положительные получается неравенство того же смысла.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 6. Если a>b (a>0, b>0), то $a^n > b^n$- любое натуральное число. То есть если обе части неравенства положительные числа, и их возвести в одну и туже натуральную степень, то получится неравенство того же смысла.

Так же заметим, если n нечетное число, то тогда для любых по знаку чисел a и b свойство 6 выполняется.

Свойство 7. Если a>b (a>0, b>0), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Доказательство. Чтобы доказать данное свойство в разности $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ мы должны получить отрицательное число.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{-(a-b)}{ab}$$

Мы знаем что a-b положительное число, и произведение двух положительных чисел тоже положительное число, т.е. ab>0. Тогда

$\frac{-(a-b)}{ab}$рицательное число.

Свойство доказано.

Свойства числовых неравенств.

Свойство 8. Если a>0, то тогда выполняется неравенство

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} - \text{неотрицательное число.}$$

Свойство доказано.

Свойство 9. Неравенство Коши. (Среднее арифметическое больше либо равно среднего геометрического)

Если a и b неотрицательные числа, то выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} - \text{неотрицательное число.}$$

Свойство доказано.

Свойства числовых неравенств.

Пример 1. Известно что $-1.5<a<2.1$ и $3.1<b<5.3$. Найти оценки чисел

а) 3a **б)**-2b **в)**a+b **г)**a-b **д)** **е)** b^2‹) a^3 $\frac{1}{b}$

Решение.

а) Воспользуемся свойством 3, так как умножаем на положительное число то знак неравенства не меняется

$$-1.5\cdot 3<a\cdot 3<2.1\cdot 3$$
$$-4.5<3a<6.3$$

б) Опять же используя свойство 3, умножая на отрицательное число следует менять знак неравенства

$$-2\cdot 3.1>-2\cdot b>-2\cdot 5.3$$
$$-10.3<-2b<-6.2$$

в) Сложив неравенства одинаково смысла получим неравенство того же смысла

$$-1.5+3.1<a+b<2.1+5.3$$
$$1.6<a+b<7.4$$

Свойства числовых неравенств.

г) Сначала умножим все части неравенства 3.1<b<5.3 на минус один, получится неравенство противоположного смысла

-5.3<-b<-3.1

Теперь выполним операцию сложения

$$-1.5-5.3<a-b<2.1-3.1$$

$$-6.8<a-b<-1$$

д) Все части неравенства положительны, возведя их в квадрат получим неравенство того же смысла

$$3.1^2 < b^2 < 5.3^2$$

$$9.61 < b^2 < 28.09$$

е) Степень неравенства нечетная, тогда можно смело возводить в степень и не менять знак

$$(-1.5)^3 < a^3 < 2.1^3$$

$$-3.375 < a^3 < 9.261$$

ж) Воспользуемся свойством 7.

$$\frac{1}{5.3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3.1} \qquad \frac{10}{53} < \frac{1}{b} < \frac{10}{31}$$

Свойства числовых неравенств.

Пример 2. Сравните числа

а) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и $2+\sqrt{8}$ $\quad$ $\pi+\sqrt{8}$ и $4+\sqrt{10}$

Решение.

а) Возведем каждое из чисел в квадрат

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=5+2\sqrt{35}+7=12+\sqrt{140}$$

$$(2+\sqrt{8})^2=4+4\sqrt{8}+8=12+\sqrt{128}$$

Вычислим разность квадратов этих квадратов

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2-(2+\sqrt{8})^2=12+\sqrt{140}-12-\sqrt{128}=\sqrt{140}-\sqrt{128}$$

Очевидно, получили положительное число, что означает

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2>(2+\sqrt{8})^2$$

Так как оба числа положительных, то

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}\ >\ 2+\sqrt{8}$$

б) $\pi<4$ и $\sqrt{8}<\sqrt{10}$, тогда $\pi+\sqrt{8}<4+\sqrt{10}$

Свойства числовых неравенств.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Известно что -2.2<a<3.1 и 1.2<b<3.7. Найти оценки чисел

а) 4a **б)**-3b **в)**a+b **г)**a-b **д)** **е)** b^4 ж) a^3 $\frac{1}{b}$

2. Сравните числа

а) $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3+\sqrt{7}$ $\pi+\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{3}$