Математика 11 класс
Модуль «Алгебра и начала математического анализа»

Теоремы, необходимые для решения более сложных логарифмических неравенств ЕГЭ

Климова О.Н., учитель математики высшей квалификационной категории
МБОУ СОШ №108 г. Новосибирска

Теорема 1.

- **Для чисел *a*, *b* и *c* таких, что *a*>0, *a*≠1, *b*>0 и *c*>0, верны следующие утверждения:**

- Неравенство $\log_a b > \log_a c$ и
- $(a-1)(b-c)>0$ равносильны
- Неравенство $\log_a b < \log_a c$ и
- **$(a-1)(b-c)<0$ равносильны**

Пример (разбор в классе)

- Решить неравенство

$$\log_{2x}(2x^2-4x+6)<\log_{2x}(x^2+x)$$

$$\begin{cases}(2x-1)(2x^2-4x+6-x^2-x)\le 0\\ 2x>0\\ x\ne \frac{1}{2}\\ 2x^2-4x+6>0\\ x^2+x>0\end{cases}$$

равносильна

$$\begin{cases}(2x-1)(x^2-5x+6)\le 0\\ x>0\\ x\ne \frac{1}{2}\\ x(x+1)>0\end{cases}$$

равносильна

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)\le 0\\ x>0\\ x\ne \frac{1}{2}\end{cases}$$

равносильна

$$\left\{\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{2}\\ 2\le x\le 3\end{array}\right.$$

Ответ: (0; 1/2) U [2;3].

Теорема 2.

При всех допустимых значениях *a, b, c* и *d* верны следующие утверждения:

- неравенства $\log_a b \log_c d > 0$ и
$(a–1)(b–1)(c-1)(d-1)>0$ **равносильны**;

- Неравенства $\log_a b \log_c d < 0$ и
- $(a–1)(b–1)(c–1)(d–1) <0$ **равносильны**

ПРИМЕР (разбор в классе)

- Решить неравенство: $$\log_{\frac{1}{x}}\frac{x}{x+1}\log_{x-2}(x^2+1)\le 0$$

$$\log_{\frac{1}{x}}\frac{x}{x+1}\log_{x-2}(x^2+1)\le 0$$ РЕШЕНИЕ

$$\begin{cases}(\frac{1}{x}-1)(\frac{x}{x+1}-1)(x-2-1)(x^2+1-1)\le 0\\ \frac{1}{x}>0\\ x\ne 1\\ \frac{x}{x+1}>0\\ x-2>0\\ x-2\ne 1\end{cases}$$

равносильна

$$\begin{cases}\frac{1-x}{x}\times\frac{-1}{x+1}\times(x-3)x^2\le 0\\ x>0\\ x\ne 1\\ x+1>0\\ x>2\\ x\ne 3\end{cases}$$

равносильна

$$\begin{cases}\frac{x(x-1)(x-3)}{(x+1)}\le 0\\ x>2\\ x\ne 3\end{cases}$$

равносильна $2<x<3$

ОТВЕТ: (2;3)

Теорема 3.

- **При всех допустимых значениях *a*, *b*, *c* верны следующие утверждения:**
- неравенство $\log_a b - \log_c b > 0$ и

неравенство $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a)>0$

равносильны;

- Неравенство $\log_a b - \log_c b < 0$
- и неравенство $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a)<0$ **равносильны.**

ПРИМЕР

- Решите неравенство (самостоятельно)

$$\log_x(x-1) - \log_{x+1}(x-1) < 0$$