

Теория чисел
Задача № 19
часть -3
Числовые
последовательности

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

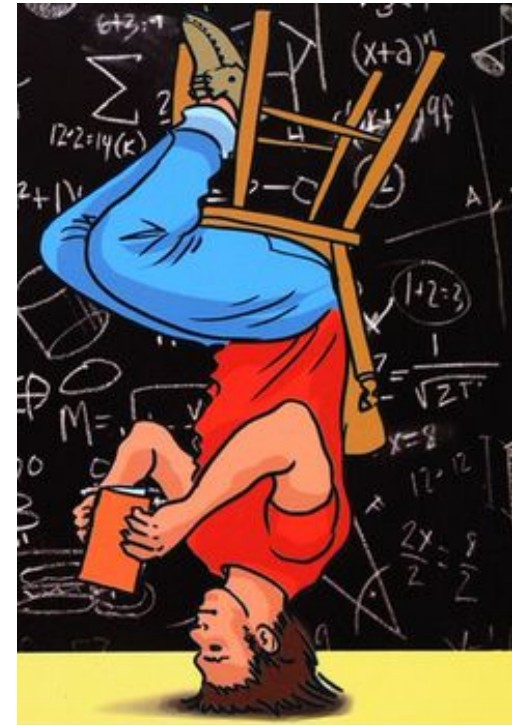
Надо мыслить нестандартно

Почему же задача №19 считается (и, в общем-то, является) самой сложной на ЕГЭ по математике?

Она нестандартна.

Она требует математической культуры — умения грамотно строить рассуждения. Учиться культурно рассуждать можно и обязательно нужно.

Задача №19 предоставляет для этого отличную возможность.



Необходимая теория

- **Последовательности;**
- **Арифметическая прогрессия;**
- **Геометрическая прогрессия;**

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел \mathbf{N} :

1, 2, 3, ..., $n - 1$, n , $n + 1$, ...

Функцию $y = f(x)$, $x \in \mathbf{N}$ называют функцией натурального аргумента или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется **общим членом** последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n ;
эта формула называется **формулой общего члена**.

Примеры числовых последовательностей

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$ – ряд натуральных чисел;

$2, 4, 6, 8, 10, \dots$ – ряд чётных чисел;

$1, 4, 9, 16, 25, \dots$ – ряд квадратов натуральных чисел;

$5, 10, 15, 20, \dots$ – ряд натуральных чисел, кратных 5;

$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$ – ряд вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$;

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. заданием аналитической формулы.
3. заданием рекуррентной формулы.

Пример

1. Последовательность простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

2. Арифметическая прогрессия:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. Геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Простейшие примеры

Придумайте формулу n -го члена для следующих последовательностей:

а) 1; 3; 5; 7; ... ; б) 5; 8; 11; 14; ... ; в) 1; 4; 9; 16; ... ;

г) 1; - 2; 3; - 4; ...

а) $a_n = 1 + 2(n - 1)$;

б) $a_n = 5 + 3(n - 1)$;

в) $a_n = n^2$;

г) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, увеличенному на одно

и то же число, которое называется разностью арифметической прогрессии.

Формула n-ого члена – позволяет вычислить член арифметической прогрессии с любым заданным номером

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

где a_1 – первый член арифметической прогрессии и d – разность арифметической прогрессии

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, которое называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-ого члена – позволяет вычислить член геометрической прогрессии с любым заданным номером

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

где b_1 – первый член геометрической прогрессии и q – знаменатель геометрической прогрессии

Характеристическое свойство прогрессий

арифметическая

*Каждый член
последовательности
начиная со второго есть
среднее арифметическое
между предыдущим и
последующим членами
прогрессии*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

геометрическая

*Каждый член
последовательности начиная
со второго есть среднее
геометрическое между
предыдущим и последующим
членами последовательности*
 $(b_n > 0)$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Формулы суммы n первых членов прогрессий

арифметическая

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

геометрическая

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1$$

Простейшие примеры

Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 2 р. 80 к. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

1. Пусть x рублей – стоимость самой дешевой марки.
2. Тогда $2,5x$ рублей – стоимость самой дорогой марки.
3. Стоимость всех четырех марок по условию есть сумма членов

арифметической прогрессии, $\frac{x + 2,5x}{2} \cdot 4 = 2,8$ т. е., $x = 0,4$.

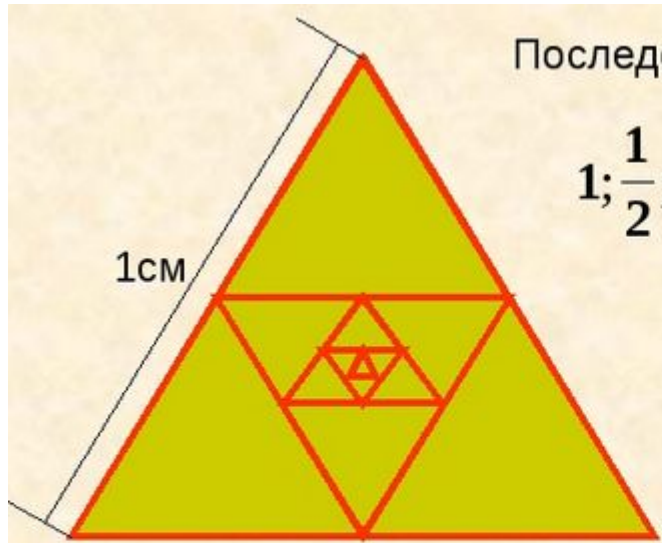
4. Из формулы общего члена прогрессии имеем:

$$a_4 = a_1 + 3d, \quad 2,5 = x + 3d, \quad 1 = 0,4 + 3d, \quad d = 0,2.$$

$$a_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6, \quad a_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8.$$

Ответ: 0,4; 0,6; 0,8; 1.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии



Последовательность длин сторон треугольников:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots \quad q = \frac{1}{2} < 1$$

$$n \rightarrow \infty; a \rightarrow 0$$

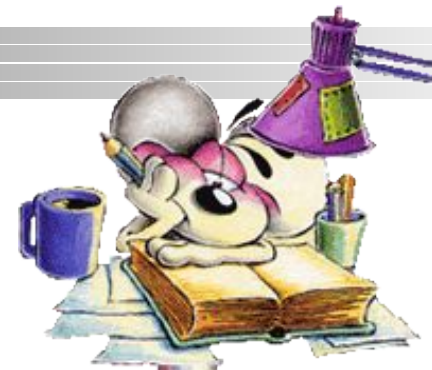
$$q = -\frac{1}{3}; \quad 1; \quad -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \quad -\frac{1}{3^3}; \dots; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; \dots$$

$$b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$$

$$|q| < 1$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

Простейшие примеры



1. Про арифметическую прогрессию (a_n) известно, что $a_5 = 8$, $a_{52} = 12$. Найдите разность арифметической прогрессии.

- 1) 0,5 2) 14 3) 11 4) 2

2. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 3^{2n}$.
Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

- 1) -3 2) 18 3) 3 4) 9

3. Члены некоторой бесконечной арифметической прогрессии изображены (рис.1) точками на координатной плоскости. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

- 1) -7 2) 6 3) 12 4) 18

4. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии 4; 8; ...

- 1) 556 2) 508 3) 658 4) 524

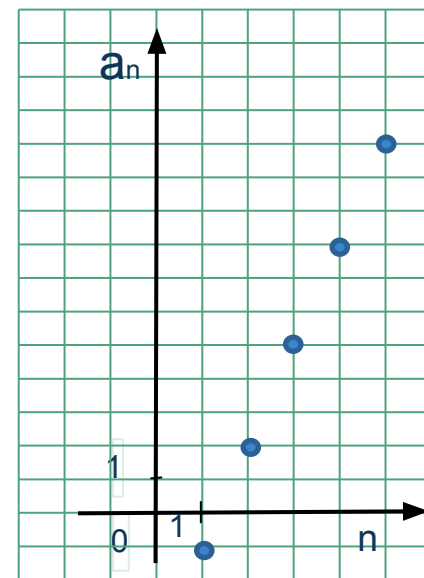


Рис.
1

Простейшие примеры

5. Последовательность a_n задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 1$.
Найдите номер члена последовательности, равного 7.
Ответ: 4

6. В геометрической прогрессии (b_n)
 $b_1 = 8$, $b_3 = 24$. Найдите b_5 . (для $q > 0$)

Ответ: 72

7. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 11. Третий её член на 6 больше первого. Найдите второй и четвёртый члены этой прогрессии.

Ответ: 1 и 7



Простейшие примеры

8. За 16 дней Карл украл у Клары 472 коралла. Каждый день он крал на 3 коралла больше, чем в предыдущий день. Сколько кораллов украл Карл в последний день.

9. В сборнике по подготовке к экзамену - 240 задач. Ученик планирует начать их решение 2 мая, а закончить 16 мая, решая каждый день на две задачи больше, чем в предыдущий день. Сколько задач ученик запланировал решить 12 мая?

10. В амфитеатре расположены 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

8. Решение:

$$S_{16} = \frac{1}{2} (2 \cdot a_1 + 3 \cdot 15) \cdot 16;$$

$$472 = 16 a_1 + 360;$$

$$a_1 = (472 - 360) : 16 = 7.$$

$$a_{16} = 7 + 3 \cdot (16 - 1) = 52.$$

Ответ: 52 коралла украл Карл в последний день.

9. Решение:

$$240 = \frac{1}{2} (2 a_1 + 2 \cdot 14) \cdot 15;$$

$$240 : 15 = a_1 + 14;$$

$$a_1 = 2;$$

$$a_{11} = 2 + 2 \cdot 10 = 22.$$

Ответ: 22 задачи надо решить 12 мая.

10. Решение:

$$280 = a_1 + 20 \cdot (10 - 1);$$

$$a_1 = 280 - 20 \cdot 9 = 100;$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} (100 + 280) \cdot 10 = 1900.$$

Ответ: 1900 человек вмещает амфитеатр.

А теперь задачи уровня ЕГЭ...

Все члены конечной числовой последовательности натуральные числа. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

- 1) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- 2) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- 3) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Решение: 1) нет. Если $a_1 + 13a_1 = 14a_1 = 6075$ – число не кратно 14;

Если $a_1 + \frac{a_1}{13} = \frac{14a_1}{13} = 6075$; $14a_1 = 13 \cdot 6075$ – число не кратно 14.

2) да. Например, $a_1 + \frac{a_1}{13} + a_1 = 6075$; $27a_1 = 13 \cdot 6075$ – число кратно 27.

(или $a_1 + 13a_1 + a_1 = 15a_1 = 6075$ - число кратно 15)

3) Рассмотрим последовательность $1 + 13 + 1 + 13 + \dots = 6075$; таких пар $6075 : 14 = 433$ (ост 13), но в этой последовательности два подряд числа 13 стоять не могут, такой последовательности не существует. Рассмотрим последовательность $13 + 1 + 13 + 1 + \dots$ таких пар $6075 : 14 = 433$ (ост 13), и последнее число 13, значит число членов последовательности $433 \cdot 2 + 1 = 867$

А теперь задачи уровня ЕГЭ...

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, $n \geq 3$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найти все возможные n , если сумма значений всех данных чисел равна 111.

Решение: а) да. Например: $a_1 = 1$; $a_2 = 6$; $a_3 = 11$ - сумма этих чисел равна 18

б) Допустим, имеем прогрессию $1, 2, 3, \dots, n$, тогда сумма всех членов этой прогрессии $\frac{1+n}{2} \cdot n < 800$; $n^2 + n - 1600 < 0$; $n = 39$ – наибольшее значение n .

Проверим: $\frac{1+39}{2} \cdot 39 = 780 < 800$, если бы $n = 40$, то $\frac{1+40}{2} \cdot 40 = 820 > 800$.

в) $111 = 3 \cdot 37$; $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 3 \cdot 37$; $(a_1 + a_n) \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 37$. Для n возможны варианты 3 и 6. Если $n = 3$, то $3a_1 + 3d = 74$ – число не кратно 3. $n \neq 3$

Вывод: $n = 6$. Такая прогрессия существует: $1, 8, 15, \dots, 36$ и

$$\frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{1+36}{2} \cdot 6 = 111$$

А теперь задачи уровня ЕГЭ...

Возрастающие арифметические прогрессии состоят из натуральных чисел.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и b_1, b_2, \dots, b_n .

- а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$
б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Ответ: а) да; б) нет; в) 98.

Решение. а) Подойдут прогрессии 1, 4, 7, 10, ... и 1, 3, 5, 7, ... В самом деле, $1 \cdot 1 + 7 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 3$. Покажем, как найти пример. Пусть a — второй член прогрессии с разностью x , b — второй член прогрессии с разностью y . Тогда должно выполняться равенство $(a - x)(b - y) + (a + x)(b + y) = 3ab$; $2xy = ab$: Теперь можно подобрать $x = 3$, $y = 2$, $a = 4$, $b = 3$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда найдутся такие натуральные числа x , y , $a > 2x$ и $b > 2y$, что $(a - 2x)(b - 2y) + 2(a + x)(b + y) = 3ab$:

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $6xy = 0$. Противоречие.

в) Как и в предыдущем пункте, пусть $a > 2x$ и $b > 2y$ — третьи члены прогрессий с разностями x и y соответственно. По условию, $(a - 2x)(b - 2y) + 2(a + x)(b + y) \leq 300$; $3ab + 6xy \leq 300$; $ab \leq 100 - 2xy$: Следовательно, $ab \leq 98$. В случае прогрессий 5, 6, 7, ... и 12, 13, 14, ..., произведение третьих членов равно 98.



N

Z

Q

I

R