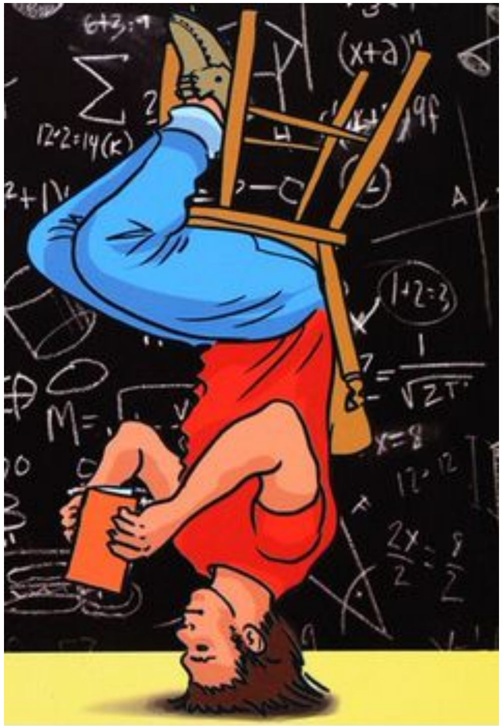
Теория чисел
Задача № 19
часть -3
Числовые последовательности

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Надо мыслить нестандартно



Почему же задача №19 считается
(и, в общем-то, является) самой сложной
на ЕГЭ по математике?
Она нестандартна.
Она требует математической культуры —
умения грамотно строить рассуждения.
Учиться культурно рассуждать можно и
обязательно нужно.
Задача №19 предоставляет для этого
отличную возможность.

Необходимая теория

- **Последовательности;**
- **Арифметическая прогрессия;**
- **Геометрическая прогрессия;**

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

1, 2, 3, …, n – 1, n, п + 1, …

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или y_1, y_2, …, y_n, … или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n;

эта формула называется формулой общего члена.

LOGO

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

LOGO

Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

Примеры:

1. Последовательность простых чисел:

   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …

2. Арифметическая прогрессия:

   $$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. Геометрическая прогрессия:

   $$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

LOGO

Простейшие примеры

Придумайте формулу n-го члена для следующих последовательностей:
а) 1; 3; 5; 7; … ; б) 5; 8; 11; 14; … ; в) 1; 4; 9; 16; … ;
г) 1; - 2; 3; - 4; …

а) $a_n = 1 + 2(n-1)$;
б) $a_n = 5 + 3(n - 1)$;
в) $a_n = n^2$;
г) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

LOGO

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, увеличенному на одно
и то же число, которое называется разностью арифметической прогрессии.

Формула n-ого члена – позволяет вычислить член арифметической прогрессии с любым заданным номером

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

где a_1 – первый член арифметической прогрессии и d – разность арифметической прогрессии

LOGO

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, которое называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-ого члена – позволяет вычислить член геометрической прогрессии с любым заданным номером

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

где b_1 – первый член геометрической прогрессии и q – знаменатель геометрической прогрессии

LOGO

Характеристическое свойство прогрессий

арифметическая

Каждый член последовательности начиная со второго есть среднее арифметическое между предыдущим и последующим членами прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

геометрическая

Каждый член последовательности начиная со второго есть среднее геометрическое между предыдущим и последующим членами последовательности

($b_n > 0$)

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

LOGO

Формулы суммы n первых членов прогрессий

арифметическая

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

геометрическая

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1$$

LOGO

Простейшие примеры

Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 2 р. 80 к. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

1. **Пусть х рублей – стоимость самой дешевой марки.**
2. **Тогда 2,5х рублей – стоимость самой дорогой марки.**
3. **Стоимость всех четырех марок по условию есть сумма членов арифметической прогрессии,** $\frac{x+2{,}5x}{2}\cdot 4 = 2{,}8$ **т. е., х = 0,4.**
4. **Из формулы общего члена прогрессии имеем:**

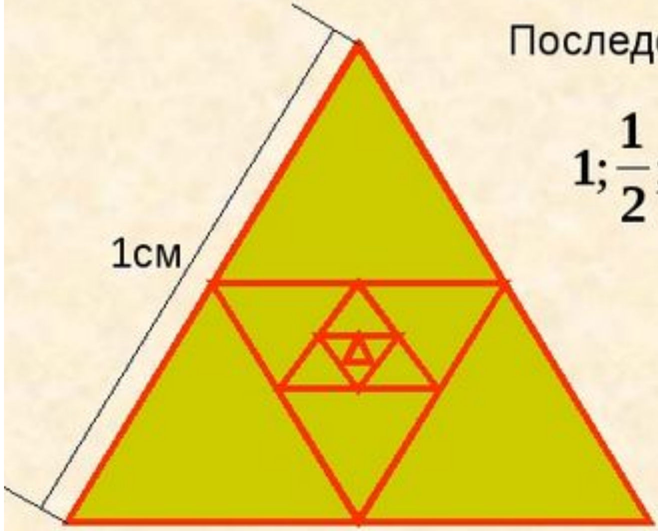
   $a_4=a_1+3d$, 2,5 = x + 3d, 1 = 0,4 + 3d, d = 0,2.

   a_2= 0,4 +0,2 = 0,6, a_3= 0,6 + 0,2 = 0,8.

Ответ: 0,4; 0,6; 0,8; 1.

LOGO

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии



Последовательность длин сторон треугольников:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{2^{n-1}}; \ldots \qquad q = \frac{1}{2} < 1$$

$$n \to \infty; a \to 0$$

$$q = -\frac{1}{3}; \qquad 1; \ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \ -\frac{1}{3^3}; \ldots; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; \ldots$$

$$b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$$

$$|q| < 1$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

LOGO

Простейшие примеры

1. Про арифметическую прогрессию (a_n) известно, что $a_5 = 8$, $a_{52} = 12$. Найдите разность арифметической прогрессии.

1) 0,5 2) 14 3) 11 4) 2

2. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 3^{2n}$

Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

1) -3 2) 18 3) 3 4) 9

3. Члены некоторой бесконечной арифметической прогрессии изображены (рис.1) точками на координатной плоскости. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) -7 2) 6 3) 12 4) 18

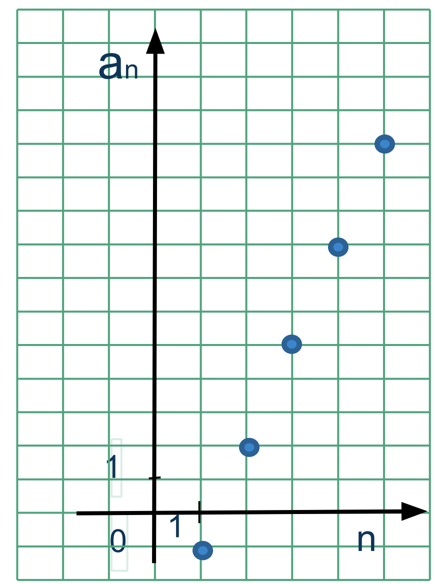


Рис. 1

4. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии 4; 8; …

1) 556 2) 508 3) 658 4) 524

LOGO

Простейшие примеры

5.Последовательность a_n задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 1.$
Найдите номер члена последовательности, равного 7.
Ответ: 4

6. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 8$, $b_3 = 24$. Найдите b_5. (для $q > 0$)

Ответ: 72

7. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 11. Третий её член на 6 больше первого. Найдите второй и четвёртый члены этой прогрессии.

Ответ: 1 и 7

Простейшие примеры

8. За 16 дней Карл украл у Клары 472 коралла. Каждый день он крал на 3 коралла больше, чем в предыдущий день. Сколько кораллов украл Карл в последний день.

9.В сборнике по подготовке к экзамену-240 задач. Ученик планирует начать их решение 2 мая, а закончить 16 мая, решая каждый день на две задачи больше, чем в предыдущий день. Сколько задач ученик запланировал решить 12 мая?

10.В амфитеатре расположены 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

8.Решение:

$S_{16}=\frac{1}{2}(2\cdot a_1 + 3\cdot 15)\cdot 16;$

$472 = 16a_1 + 360;$

$a_1 = (472-360):16=7.$

$a_{16} = 7+3\cdot(16-1)=52.$

Ответ: 52 коралла украл Карл в последний день.

9.Решение:

$240=\frac{1}{2}(2a_1 + 2\cdot 14)\cdot 15;$

$240:15= a_1 + 14;$

$a_1 = 2;$

$a_{11} = 2+2\cdot 10 = 22.$

Ответ:22 задачи надо решить 12 мая.

10.Решение:

$280= a_1 + 20\cdot(10-1);$

$a_1= 280 - 20\cdot 9 = 100;$

$S_{10} = \frac{1}{2}(100+280)\cdot 10 =1900.$

Ответ:1900 человек вмещает амфитеатр.

LOGO

А теперь задачи уровня ЕГЭ…

Все члены конечной числовой последовательности натуральные числа. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

1) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
2) Может ли последовательность состоять из двух членов?
3) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Решение: 1) нет. Если $a_1 + 13a_1 = 14a_1 = 6075$ – число не кратно 14;

Если $a_1 + \frac{a_1}{13} = \frac{14a_1}{13} = 6075$; $14a_1 = 13 \cdot 6075$ – число не кратно 14.

2) да. Например, $a_1 + \frac{a_1}{13} + a_1 = 6075$; $27a_1 = 13 \cdot 6075$ – число кратно 27.

(или $a_1 + 13a_1 + a_1 = 15a_1 = 6075$ - число кратно 15)

3) Рассмотрим последовательность 1 + 13 + 1 +13 + … = 6075; таких пар $6075 : 14 = 433(\text{ост } 13)$, но в этой последовательности два подряд числа 13 стоять не могут, такой последовательности не существует. Рассмотрим последовательность 13 + 1 + 13 + 1 +… таких пар $6075 : 14 = 433(\text{ост } 13)$, и последнее число 13, значит число членов последовательности $433 \cdot 2 + 1 = 867$

LOGO

А теперь задачи уровня ЕГЭ…

Даны *n* различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, *n* ≥ 3.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение *n*, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найти все возможные *n*, если сумма значений всех данных чисел равна 111.

Решение: а) да. Например: $a_1 = 1$; $a_2 = 6$; $a_3 = 11$- сумма этих чисел равна 18

б) Допустим, имеем прогрессию 1, 2, 3, …,n, тогда сумма всех членов этой прогрессии $\frac{1+n}{2}\cdot n < 800$; $n^2 + n - 1600 < 0$; n = 39 – наибольшее значение n.

Проверим: $\frac{1+39}{2}\cdot 39 = 780 < 800$, если бы $n = 40$, то $\frac{1+40}{2}\cdot 40 = 820 > 800$.

в) 111= $3\cdot 37$; $\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = 3\cdot 37$; $(a_1 + a_n)\cdot n = 2\cdot 3\cdot 37$. Для n возможны варианты 3 и 6. Если $n = 3$, то $3a_1 + 3d = 74$ – число не кратно 3. n$\neq$ 3

Вывод: $n = 6$. Такая прогрессия существует: 1, 8, 15, …, 36 и $\frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = \frac{1+36}{2}\cdot 6 = 111$

LOGO

А теперь задачи уровня ЕГЭ…

Возрастающие арифметические прогрессии состоят из натуральных чисел.

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3?$

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leqslant 300?$

Ответ: а) да; б) нет; в) 98.

Решение. а) Подойдут прогрессии 1, 4, 7, 10, . . . и 1, 3, 5, 7,. . . В самом деле, $1 \cdot 1+7 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 3$. Покажем, как найти пример. Пусть a — второй член прогрессии с разностью x, b — второй член прогрессии с разностью y. Тогда должно выполняться равенство $(a - x)(b - y) + (a + x)(b + y) = 3ab$; $2xy = ab$: Теперь можно подобрать $x = 3$, $y = 2$, $a = 4$, $b = 3$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда найдутся такие натуральные числа x, y, $a > 2x$ и $b > 2y$, что $(a - 2x)(b - 2y) + 2(a + x)(b + y) = 3ab$:

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $6xy = 0$. Противоречие.

в) Как и в предыдущем пункте, пусть $a > 2x$ и $b > 2y$ — третьи члены прогрессий с разностями x и y соответственно. По условию, $(a - 2x)(b - 2y) + 2(a + x)(b + y) \leq 300$; $3ab + 6xy \leq 300$; $ab \leq 100 - 2xy$: Следовательно, $ab \leq 98$. В случае прогрессий 5, 6, 7, . . . и 12, 13, 14, . . . , произведение третьих членов равно 98.

LOGO


N
Z
Q
R
I