МОУ «Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов № 36» г. о. Саранск,
учитель математики Евтухович Ирина Владимировна

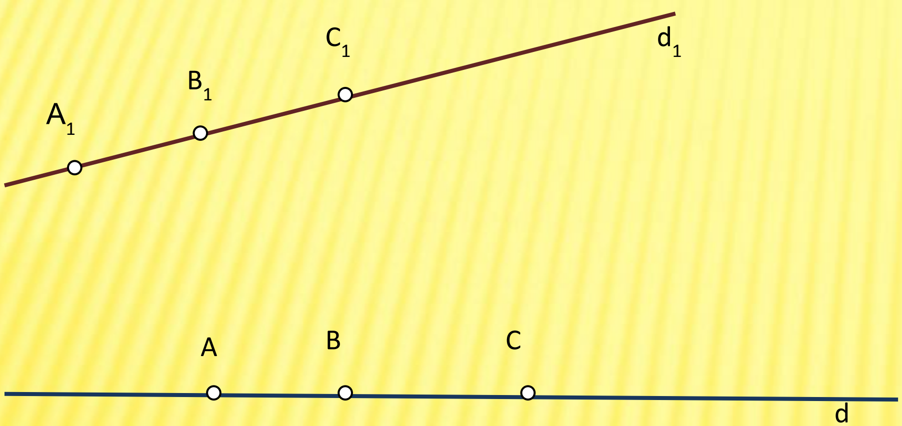
ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ, ГЕОМЕТРИЯ, 9 КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

I. Свойства движения

Теорема 1

При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, причем порядок взаимного расположения точек на прямой сохраняется.



Докозательство:

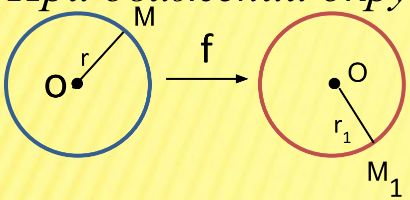
1. Пусть точки A, B и C принадлежат прямой d, причем
 A-B-C →AB+BC=AC
2. f(A)=A_1, f(B)=B_1, f(C)=C_1, т.к. f- движение, то A_1B_1=AB, B_1C_1=BC, A_1C_1=AC → A_1B_1+ B_1C_1= =AB+BC=AC= A_1C_1→
A_1B_1+ B_1C_1= A_1C_1→ A_1, B_1 и C_1 принадлежат некоторой прямой d_1 и A_1-B_1- C_1.

Следствие 1

При движении прямые переходят в прямые , лучи - в лучи, отрезок заданной длины - в отрезок той же длины.

Теорема 2

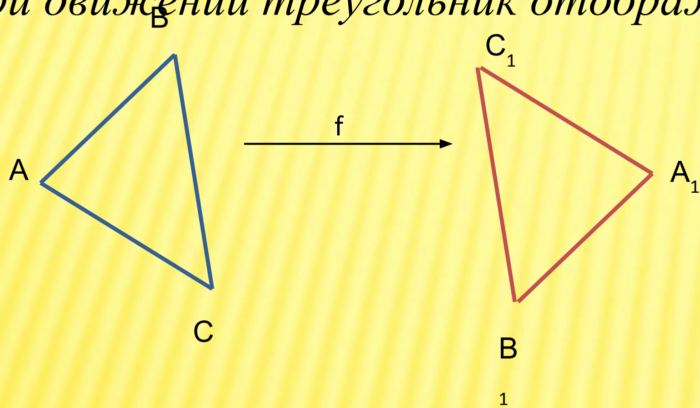
При движении окружность переходит в окружность того же радиуса.



1. f- некоторое движение, $f(O)=O_1$
2. M- произвольная точка окружности, следовательно $f(M)= M_1$, по определению движения $O_1 M_1=OM=r$, таким образом при заданном движении окружность с центром O и радиусом r перейдет в окружность с центром O_1 и тем же радиусом r.

Теорема 3

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.



При движении отрезок переходит в отрезок равный данному. Следовательно, треугольник переходит в треугольник равный данному (по третьему признаку).

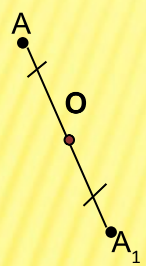
Следствие 2

При движении угол переходит в равный ему угол, фигура переходит в равную фигуру.

II. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Определение.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O, если точка O принадлежит отрезку AA_1 и этой точкой отрезок AA_1 делится пополам.



$\mathbf{Z_o(A)=A_1}$

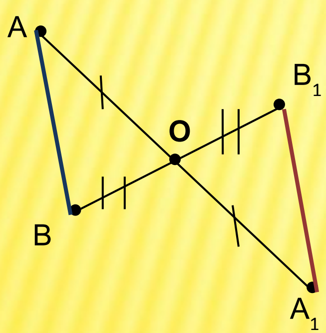
O- центр симметрии

A и A_1 – центрально симметричные.

Т.к. точка A - произвольная точка плоскости, то отображение Z_o задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно точки O (центральной симметрией).

Теорема

Симметрия относительно точки является движением.



Доказательство:

Точки A, B и O не лежат на одной прямой

1. $Z_o(A)=A_1$, $Z_o(B)=B_1 \rightarrow AO=A_1O$, $BO=B_1O$, $\angle AOB=\angle A_1OB_1$- как вертикальные;
2. Следовательно, $\Delta AOB=\Delta A_1OB_1$ по двум сторонам и углу между ними (I признак);
3. Из равенства треугольников следует, что $AB=A_1B_1$.

Точки A, B и O лежат на одной прямой

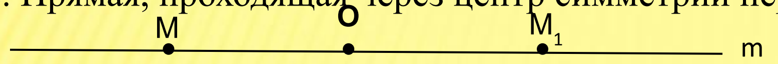
$A_1B_1=|OB_1-OA_1|=|OB-OA|=AB$ или

$A_1B_1=A_1O+OB_1=OA+OB=AB$, а следовательно Z_o- движение.

Свойства центральной симметрии

1. Центр симметрии точка О, единственная неподвижная точка, т.е. $Z_o(O) = O$

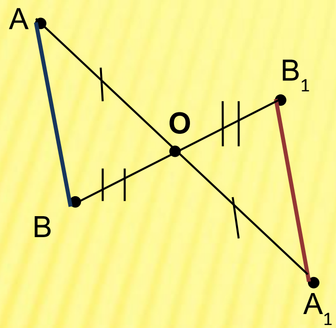
2. Прямая, проходящая через центр симметрии переходит в себя.



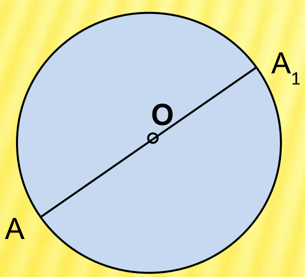
$M \in m \rightarrow M_1 \in m$

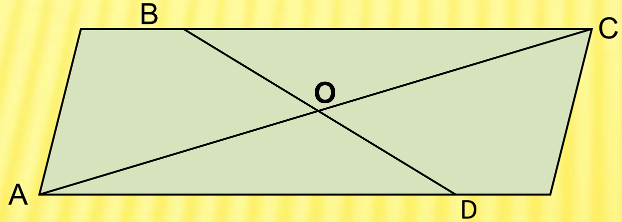
3. Прямая, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей прямую (следует из равенства накрест лежащих углов при прямых AB и A_1B_1, секущей BB_1)

$O \notin AB$; $Z_o(AB) = A_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$



4. Центральная симметрия изменяет направление $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_1B_1}$





$Z_o(A) = A_1$, $Z_o(A_1) = A$

$Z_o(A) = C$, $Z_o(B) = D$, $Z_o(C) = A$, $Z_o(D) = B$

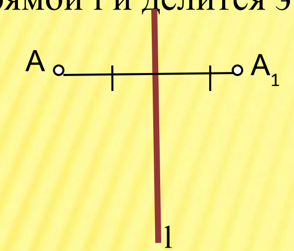
Определение:

Если некоторая фигура при симметрии относительно точки О переходит в себя , то точка О называется центром симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно точки О.

$Z_o(Ф) = Ф$

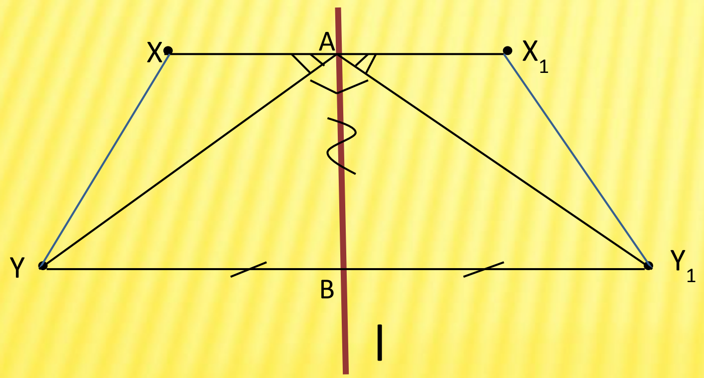
III. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ.

Определение.
Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l, если отрезок AA_1 перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам.



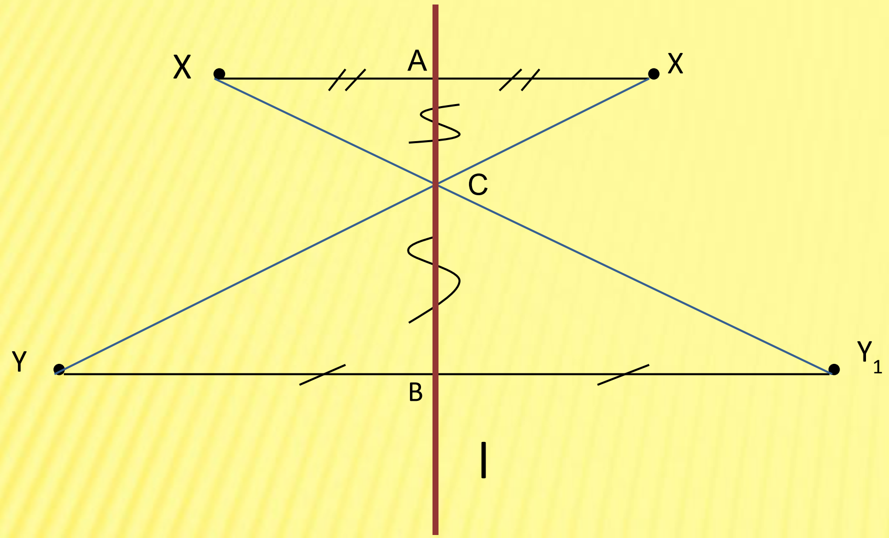
$S_l(A)= A_1$
A и A_1 - симметричные точки.
l- ось симметрии
Т.к. точка A - произвольная точка плоскости, то отображение S_l задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно прямой l (осевой симметрией).

Теорема
Симметрия относительно прямой является движение
X и Y -произвольные точки плоскости, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой l.



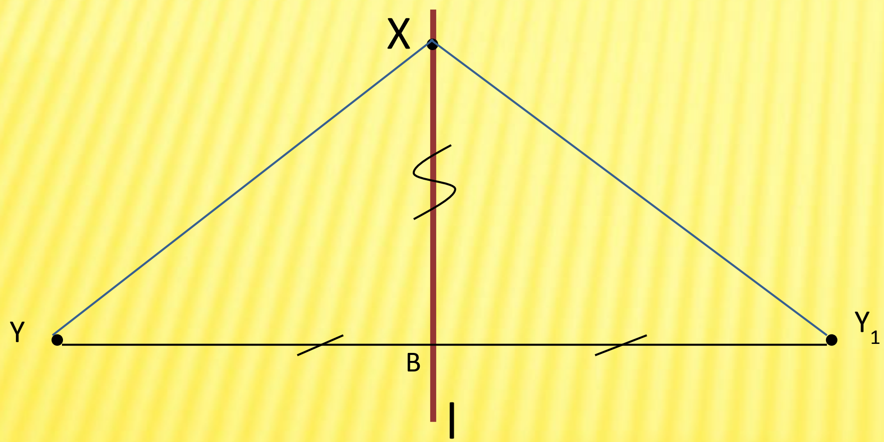
1. $S_l(X)= X_1$, $S_l(Y)= Y_1$, $XX_1 \cap l=A$, $YY_1 \cap l=B$
2. ΔABY и ΔABY_1 - прямоугольные (по определению осевой симметрии)
   $\Delta ABY = \Delta ABY_1$ - по двум катетам → $AY=AY_1$ и $\angle YAB=\angle Y_1AB$
3. Рассмотрим ΔXAY и ΔX_1AY_1:
   $XA=X_1A$ (по определению осевой симметрии)
   $AY=AY_1$ (по доказанному)
   $\angle XAY=\angle X_1AY_1$ (как разность прямых и равных углов)
   Следовательно, $\Delta XAY = \Delta X_1AY_1$ (по двум сторонам и углу между ними,I признак)
4. Из равенства треугольников следует равенство отрезков XY и X_1Y_1.

X и Y -произвольные точки плоскости, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой l.



Равенство отрезков XY и X_1Y_1 следует из равенства по двум катетам прямоугольных треугольников X_1CA и XCA, YCB и Y_1CB.

X и Y -произвольные точки плоскости, одна из точек лежит на прямой l.



$S_l(X)= X$, $S_l(Y)= Y_1 \rightarrow \Delta XYB=\Delta XY_1B$ (по двум катетам) $\rightarrow XY= XY_1$

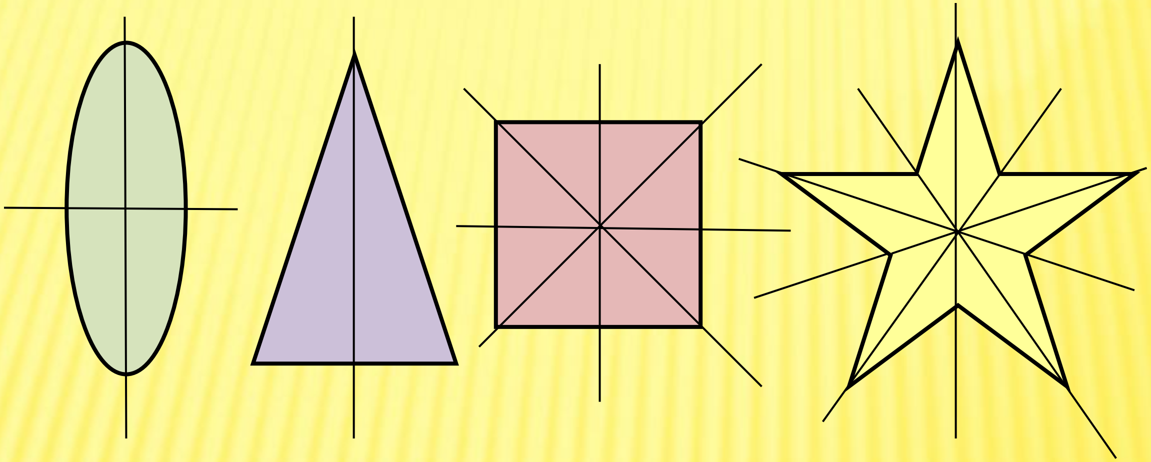
Т.о. осевая симметрия - движение

Свойства осевой симметрии

1. $S_l(l)=l$ - любая точка оси симметрии - неподвижна (переходит сама в себя);
2. Прямая перпендикулярная оси симметрии переходит сама в себя;
3. Соответствующие прямые пересекаются на оси симметрии или параллельны;

Определение

Если некоторая фигура при симметрии относительно прямой m переходит в себя, то прямая m называется осью симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно прямой m.

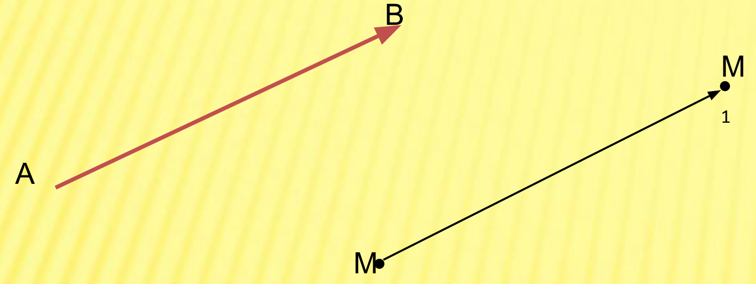


$S_m(Ф)=Ф$

IV. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС.

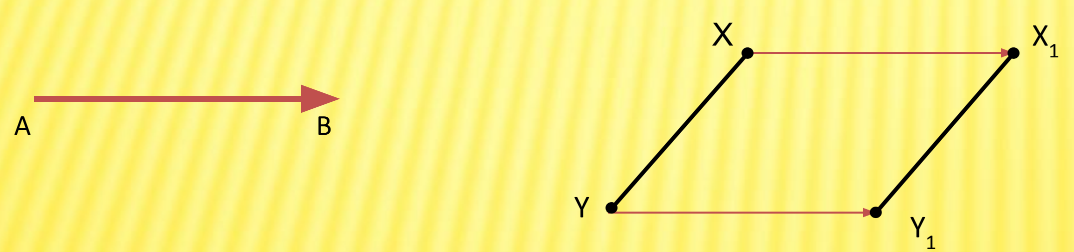
Определение.

Параллельным переносом на заданный вектор $\overrightarrow{AB}$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости M переходит в M_1 так, что $\overline{MM_1}=\overline{AB}$ и обозначается $P_{AB}(M)=M_1$.



Теорема

Параллельный перенос является движением

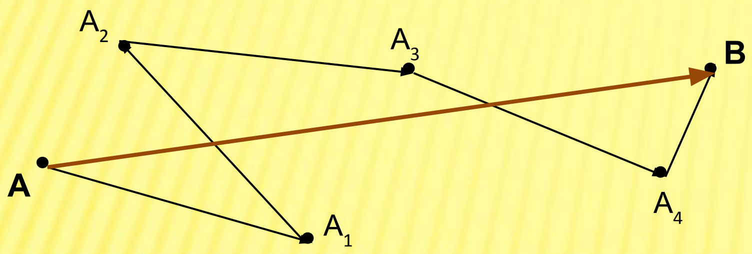


1. $P_{AB}(X)=X_1$, $P_{AB}(Y)=Y_1 \rightarrow XX_1 \| AB$, $XX_1=AB$; $YY_1 \| AB$, $YY_1=AB$
2. Следовательно, $XX_1 \| YY_1$ и $XX_1=YY_1$
3. YXX_1Y_1- параллелограмм по признаку
4. По свойству параллелограмма $XY=X_1Y_1$, значит **параллельный перенос - движение.**

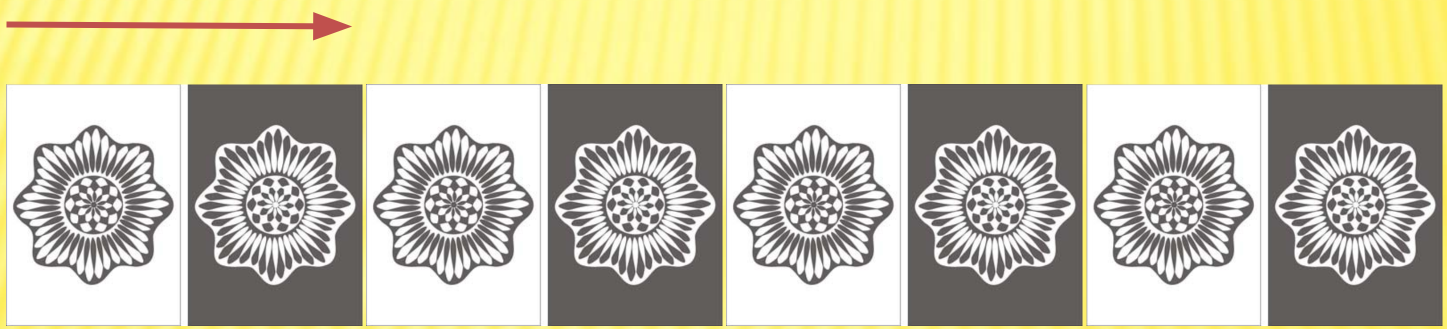
Свойства параллельного переноса

1. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек;
2. Прямые, параллельные направлению переноса, переходят в себя;
3. Параллельный перенос сохраняет направление, т.е. если $A \to A_1$ и $B \to B_1$,то лучи AB и A_1B_1 сонаправлены. Обратно: движение, сохраняющее направление является параллельным переносом.
4. Композиция (последовательное выполнение) двух параллельных переносов - параллельный перенос, причем параллельные переносы - перестановочны: $P_{\bar a} \circ P_{\bar b} = P_{\bar b} \circ P_{\bar a} = P_{\overline{a+b}}$

Следствие: Любую композицию параллельных переносов можно заменить одним параллельным переносом (по правилу многоугольника)



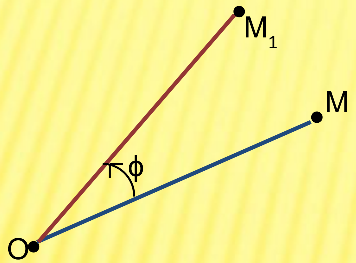
Орнамент. Это узор, который получается, если некоторую фигуру подвергнуть параллельному переносу несколько раз.



V. ПОВОРОТ.

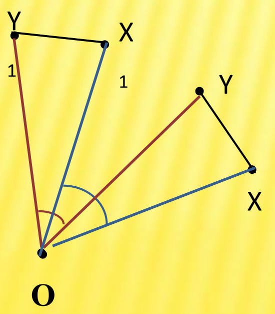
Определение.
Отметим на плоскости точку О (центр поворота) и угол ϕ (угол поворота).

Преобразование плоскости, при котором каждая точка М плоскости переходит в точку M_1 такую, что угол между лучами ОМ и OM_1 равен ϕ, а $OM=OM_1$, называется поворотом около точки О на угол ϕ.
ϕ>0 - если поворот совершается против часовой стрелки
ϕ<0 - если поворот совершается по часовой стрелки



R_O^{φ} (M)=M_1, ϕ>0

Теорема.
Поворот является движением.



1. R_O^{φ}(X) = X_1, $R_O^{\varphi}(Y) = Y_1$ → $OX=OX_1$, $OY=OY_1$
2. ∠XOY=ϕ-∠X_1OY, ∠X_1OY_1=ϕ-∠X_1OY →∠XOY=∠X_1OY_1
3. Значит, Δ XOY=Δ X_1OY_1- по двум сторонам и углу между ними, тогда XY= X_1Y_1

Т.к. точки X и Y произвольные, следовательно, **поворот- движение**

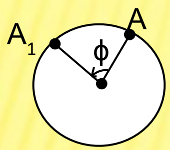
Свойства поворота.

1. Поворот вокруг точки О на 180° является центральной симметрией относительно точки О.

R_O^{φ} (O)=O.

2. Центр вращения - единственная неподвижная точка,

Окружности с центрами в точке О (центре поворота) - переходят сами в себя.



3. Если R_O^{φ} (A)=A_1 , R_O^{φ} (B)=B_1 , то угол между AB и A_1B_1 равен ϕ;

4. Композиция двух вращений с общим центром на углы α и β соответственно является вращением с тем же центром на угол α+β. При этом вращения перестановочны.

$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\beta} \circ R_O^{\alpha} = R_O^{\alpha+\beta}$$

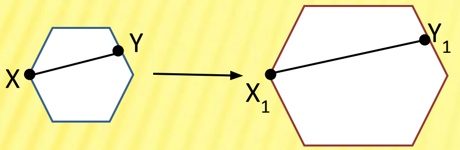
5. Тождественное преобразование можно рассматривать как поворот на нулевой угол.

6. Композиция двух вращений с центрами O_1 и O_2 на углы α и β, соответственно, является вращением с новым центром О на угол α+β, если α+β≠360°, и параллельным переносом, если α+β=360°.

VI. ПОДОБИЕ.

Определение.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и тоже число раз.



$P_k(F)=F_1$, P_k - подобие с коэффициентом k

$f: X \longrightarrow X_1$

$f: Y \longrightarrow Y_1$, $X_1Y_1= k \cdot XY$, где $k>0$ -является одним и тем же для всех точек X и Y.

k - коэффициент подобия, а фигуры $F \backsim F_1$ (подобны).

Подобие не является движением, т.к. расстояния изменяются.

Свойства подобия.

1. Преобразование подобия переводит прямую в прямую, отрезок - в отрезок, луч - в луч.
Действительно, если точки A,B,C лежат на одной прямой, то AC=AB+BC, тогда $A_1B_1= k \cdot AB=K \cdot (AC+CB)=k \cdot AC+k \cdot CB=A_1C_1+C_1B_1 \rightarrow A_1,C_1,B_1$ -лежат на прямой и порядок расположения точек сохраняется.
2. Преобразование подобия сохраняет углы.
3. Преобразование подобия переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.
4. Преобразование подобия переводит окружность в окружность.
5. Преобразование, обратное преобразованию подобия с коэффициентом k, есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$
6. Композиция преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k=k_1 \cdot k_2$

VII. ГЕОМОТЕТИЯ.

Определение.

Зададим точку O и число $k\neq 0$. Точки M и M_1 являются соответствующими в гомотетии если $\overrightarrow{OM_1}=k\cdot\overrightarrow{OM}$.

$H_{o,k}(M)=M_1$, где O- центр гомотетии, k- коэффициент гомотетии.

$k>0$ $K<0$

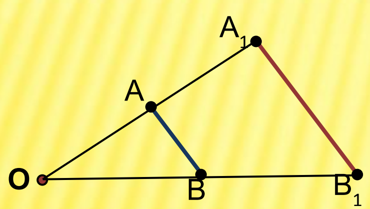
Частные случаи гомотетии:

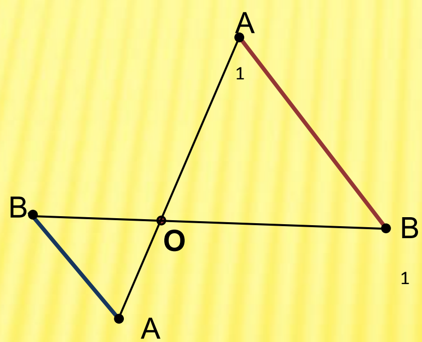
$k=1$ - тождественное преобразование

$k=-1$ - центральная симметрия относительно точки O.

Теорема.

Гомотетия является подобием.





k>0 k<0

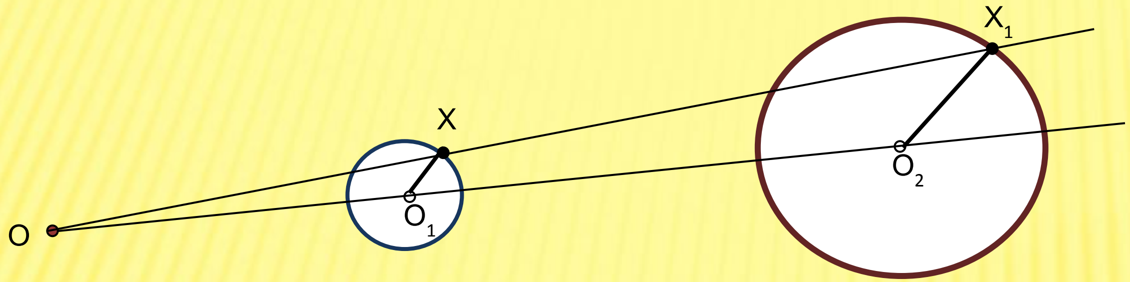
1. $H_{o,k}(A)=A_1$, $H_{o,k}(B)=B_1 \rightarrow \overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}$
2. $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}-k\cdot\overrightarrow{OA}=k\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\cdot\overrightarrow{AB}$

Следовательно, гомотетия является подобием

Из подобия следует, что расстояние между соответствующими точками не сохранилось, таким образом, **гомотетия не является движением.**

Свойства гомотетии:

1. Гомотетия переводит прямую в прямую, отрезок- в отрезок;
2. Гомотетия с $k>0$ переводит луч в себя (в сонаправленный луч), а гомотетия с $k<0$ переводит луч в противоположно направленный луч;
3. Гомотетия сохраняет углы;



4. Гомотетия переводит окружность в окружность

$H_{o,k}(O_1)=O_2$, $H_{o,k}(X)=X_1 \rightarrow OO_2=k\cdot OO_1$, $OX_1=k\cdot OX_2$, $\angle O$- общий $\rightarrow \Delta OO_1X$ подобен ΔOO_2X_1 по второму признаку$\rightarrow$ $O_2X_1=k\cdot O_1X$;

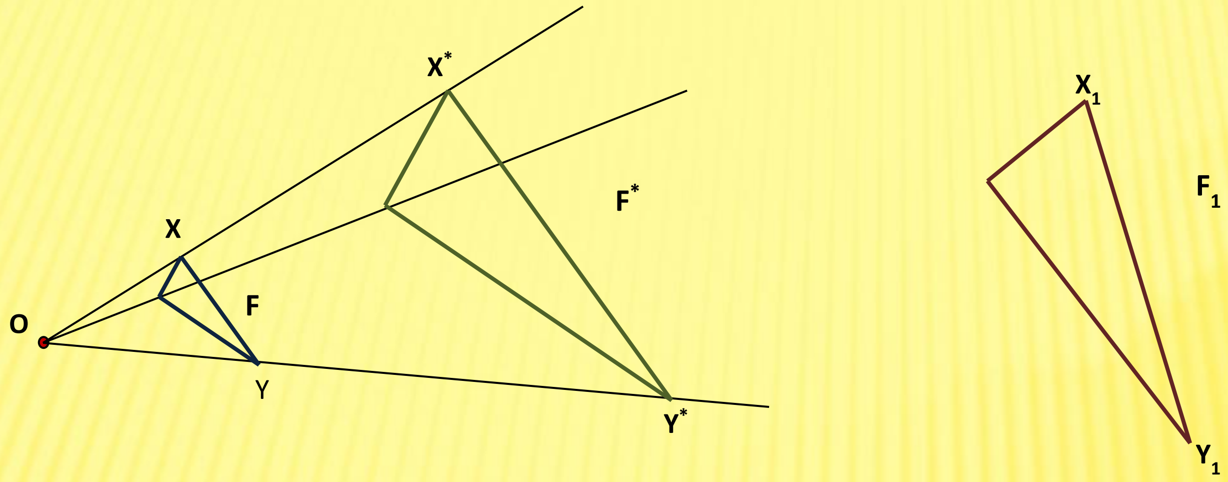
т.к. X произвольная точка окружности, следовательно, окружность переходит в окружность;

5.Преобразование, обратное гомотетии с коэффициентом $k\neq 0$, есть гомотетия с тем же центром гомотетии и коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$

6.При $k\neq 1$ гомотетия переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную прямую, отрезок - в параллельный отрезок. Прямые, проходящие через центр гомотетии, отображаются на себя (Следует из подобия и из определения гомотетии);

7.Композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k=k_1 \cdot k_2$;

8.Преобразование подобия с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.



Пусть P_k (F)=F_1, где k>0→ P_k (X)=X_1 и P_k (Y)=Y_1→ X_1Y_1=k· XY (из определения подобия);

$H_{o,k}$(F)=F^* ,k>0 и O- произвольная→ $H_{o,k}$(X)=X^*, $H_{o,k}$(Y)=Y^*→ X^*Y^*=k· XY (из определения гомотетии);

Таким образом, для любых точек X^*;Y^* фигуры $\mathbf{F}^*$верно равенство X_1Y_1= X^*Y^*,

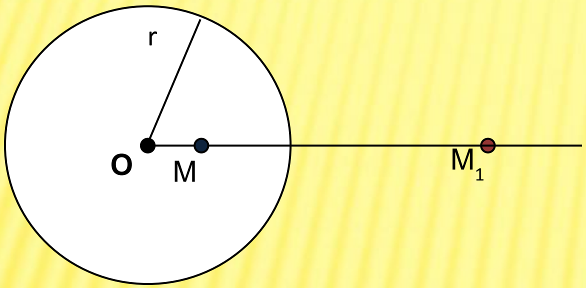
которое означает, что фигуры $\mathbf{F}^*$**и** $\mathbf{F_1}$ равны, а значит, существует движение, переводящее фигуру $\mathbf{F}^*$в фигуру $\mathbf{F_1}$.

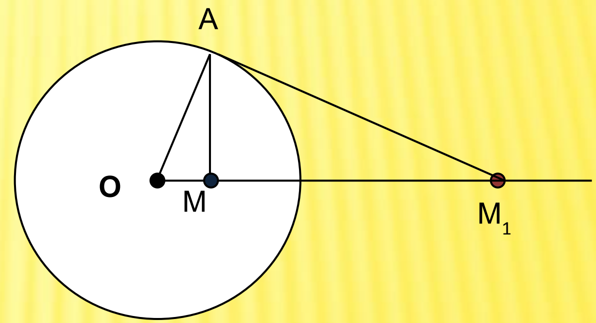
VIII. ИНВЕРСИЯ.

Определение.

Пусть на плоскости задана окружность (O;r) с выколотым центром O. Инверсией $\mathbf{I}_{\mathbf{o,k}}$ с полюсом O и степенью $k=r^2$ называется взаимно - однозначное преобразование $M \rightarrow M_1$ такое, что $OM \cdot OM_1 = r^2$ (точки O,M , M_1 -лежат на одной прямой).

Точка O выколота, т. к. не имеет образа





Построение соответствующих в инверсии точек:

1. Точка M внутри круга инверсии. MA $\perp$ OM; OA- радиус; $AM_1 \perp OA$ (AM_1- касательная); $M_1 = OM \cap AM_1$ ($OM \cdot OM_1 = r^2$,т.к. катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу);

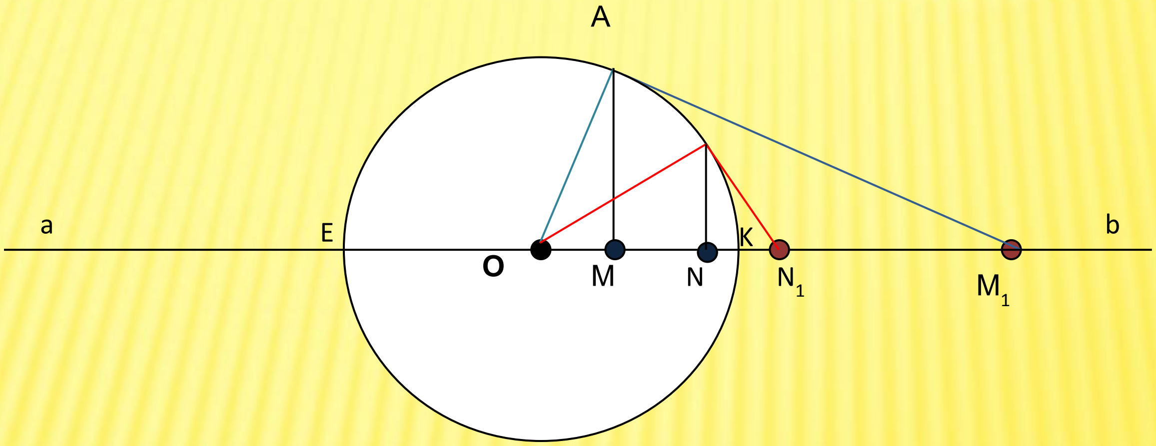
2. Точка M - вне круга инверсии. Построения выполняются в обратном порядке: проводится касательная к окружности и из точки касания опускается перпендикуляр.

Свойства инверсии:

1.Если при инверсии точка М переходит в M_1, то точку M_1 эта инверсия переводит в точку М (инверсия - инволютивное преобразование, т.е. I^2=е -тождественное преобразование)

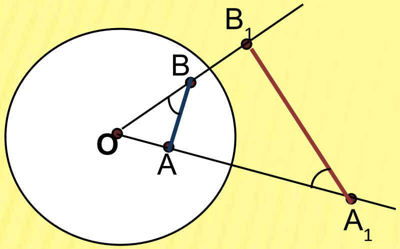
$\mathbf{I}_{\mathbf{o,k}}(M)=M_1$, то $\mathbf{I}_{\mathbf{o,k}}(M_1)=M$;

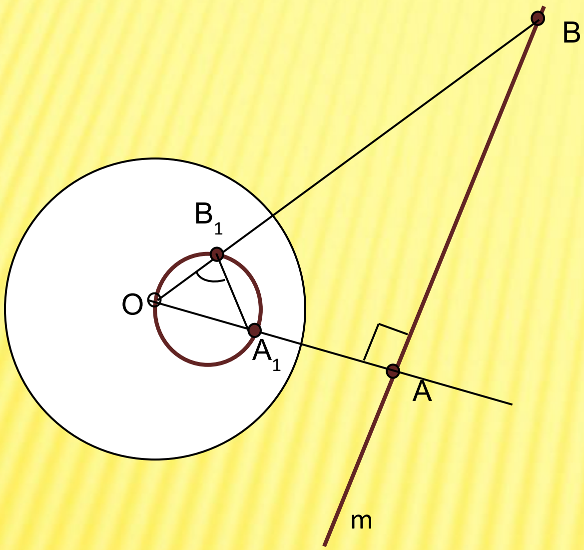
2.При инверсии точки, расположенные внутри круга инверсии, переходят в точки, расположенные вне круга инверсии.
Точки, расположенные вне круга инверсии, переходят во внутренние точки круга.
Точки окружности инверсии переходят в себя.
3.Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя



Полуинтервал (ОК]→луч [Кb), полуинтервал (ОЕ]→луч [Еа), К→К, Е→Е

4. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.





1.Если $\mathbf{I}_{o,k}(A)=A_1,\mathbf{I}_{o,k}(B)=B_1$

$\Rightarrow OA\cdot OA_1=OB\cdot OB_1=r^2$

$\Rightarrow OA:OB=OB_1:OA_1$ и $\angle AOB=\angle B_1OA_1$

$\Rightarrow\Delta AOB \backsim \Delta B_1OA_1$(IIпризнак)

$\Rightarrow\angle OBA=\angle OA_1B_1$

2.Рассмотрим окружность инверсии

(O,r) и прямую m, не проходящую через точку O и точку B $\in$ m,

проведем $OA\perp m$,

построим точку A_1 и B_1

такие, что $\mathbf{I}_{o,k}(A)=A_1$, $\mathbf{I}_{o,k}(B)=B_1$

По пункту (1) $\Delta AOB \backsim \Delta B_1OA_1$ и $\angle OAB=\angle OB_1A_1=90^0\Rightarrow B_1$ лежит

на окружности S с диаметром OA_1.