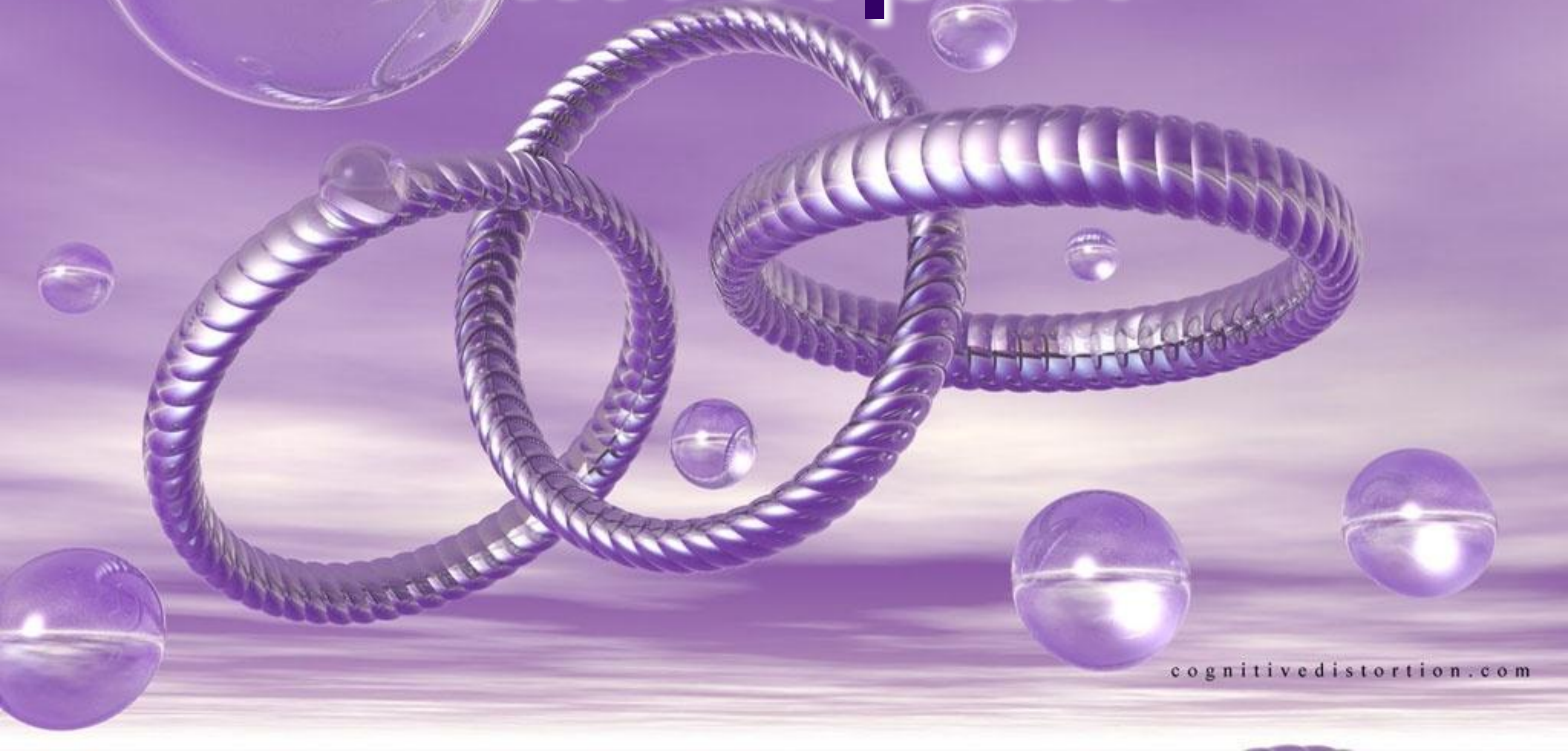
Первообразная
Интеграл



Содержание

Понятие первообразной

Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ если выполняется равенство:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операция, обратная дифференцированию

Операция нахождения первообразной функции называется интегрированием.

Интегрирование – математическое действие, обратное дифференцированию, то есть нахождению производной.

Интегрирование позволяет по производной функции найти саму функцию.

Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x;$

   $F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4;$

   $F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

Таблица первообразных

	$f(x)$	$F(x)$	
	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	
	$\sqrt{x}$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	
	$\cos x$	$\sin x+C$	
	$\sin x$	$-\cos x+C$	
	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	
	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	

Неопределенный интеграл

Множество всех первообразных называют неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначают

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где C – произвольная постоянная (const).

Примеры

$$\int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$(-\cos x + C)' = \sin x$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\,x + C;$$

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

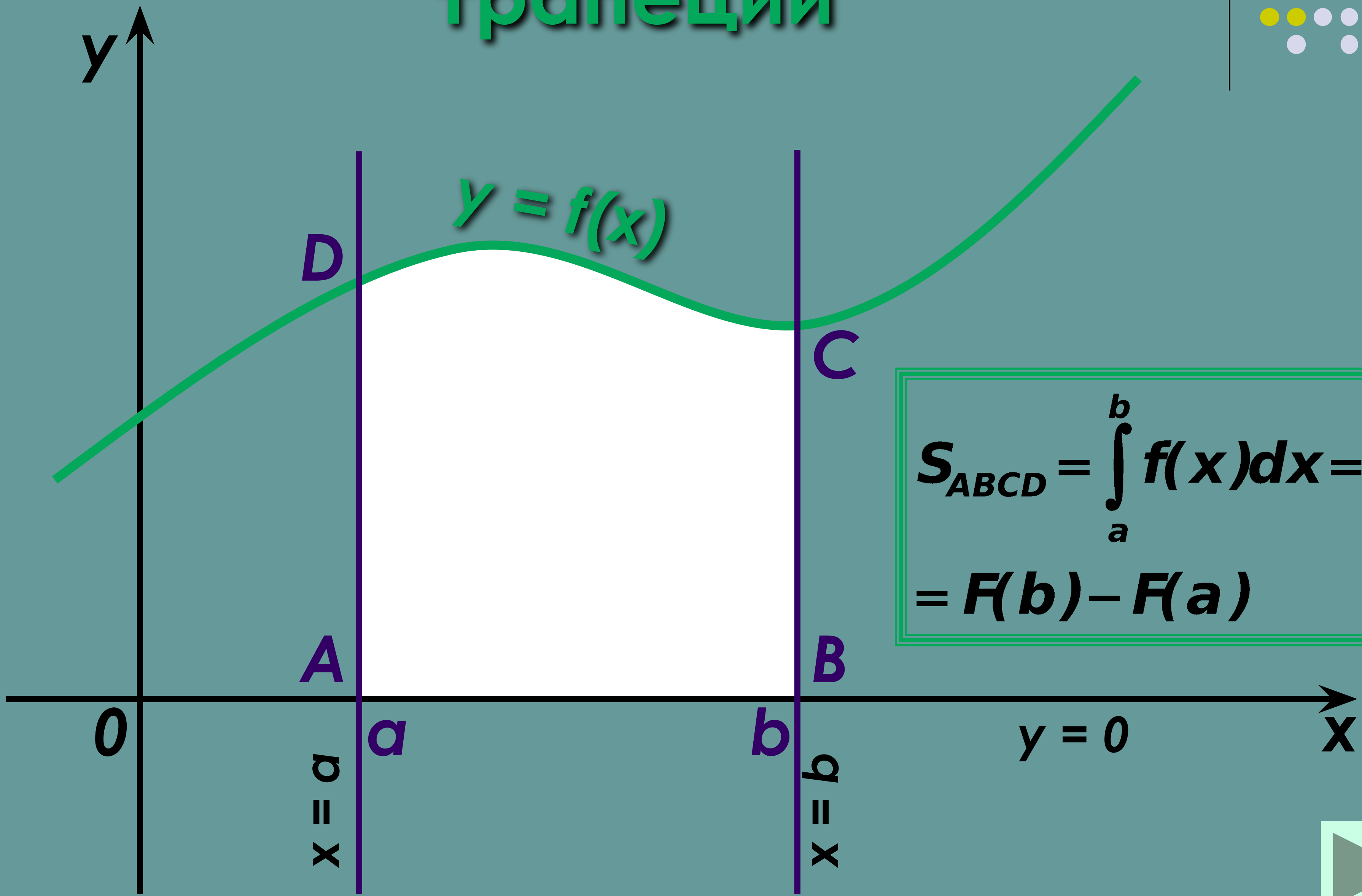
и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

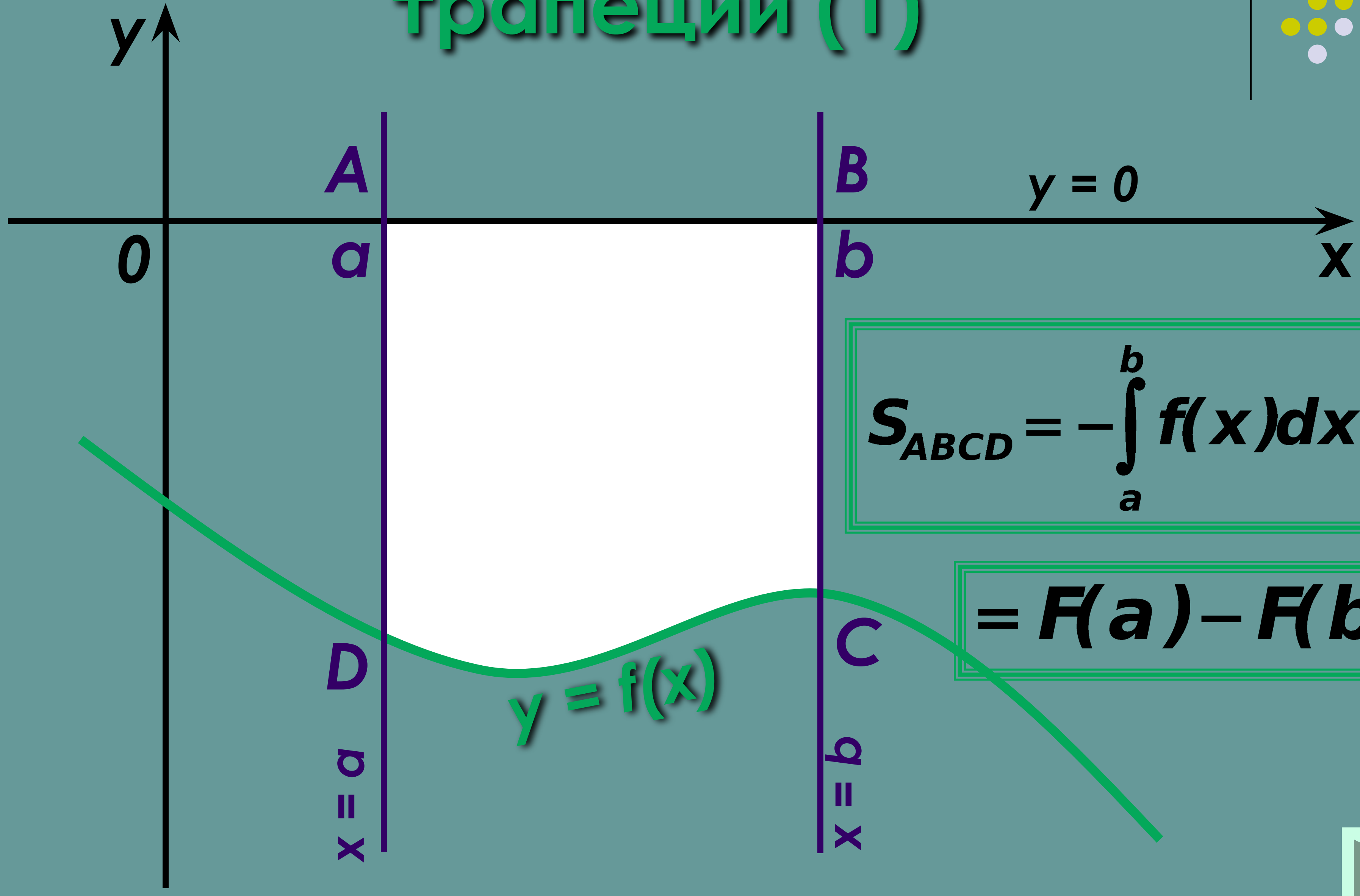
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

Площадь криволинейной трапеции



$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx =$$
$$= F(b) - F(a)$$

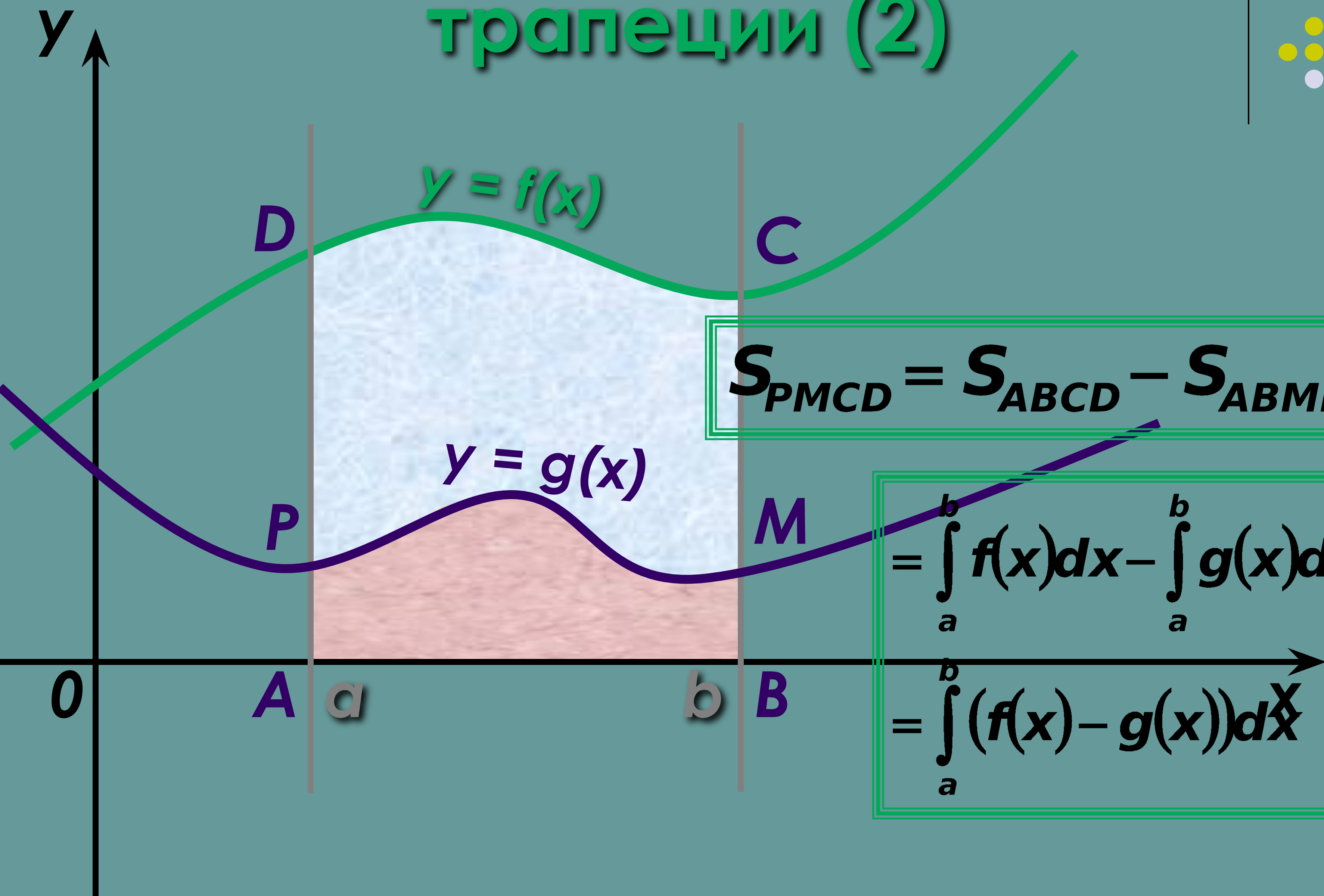
Площадь криволинейной трапеции (1)



$$S_{ABCD} = -\int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(a) - F(b)$$

Площадь криволинейной трапеции (2)

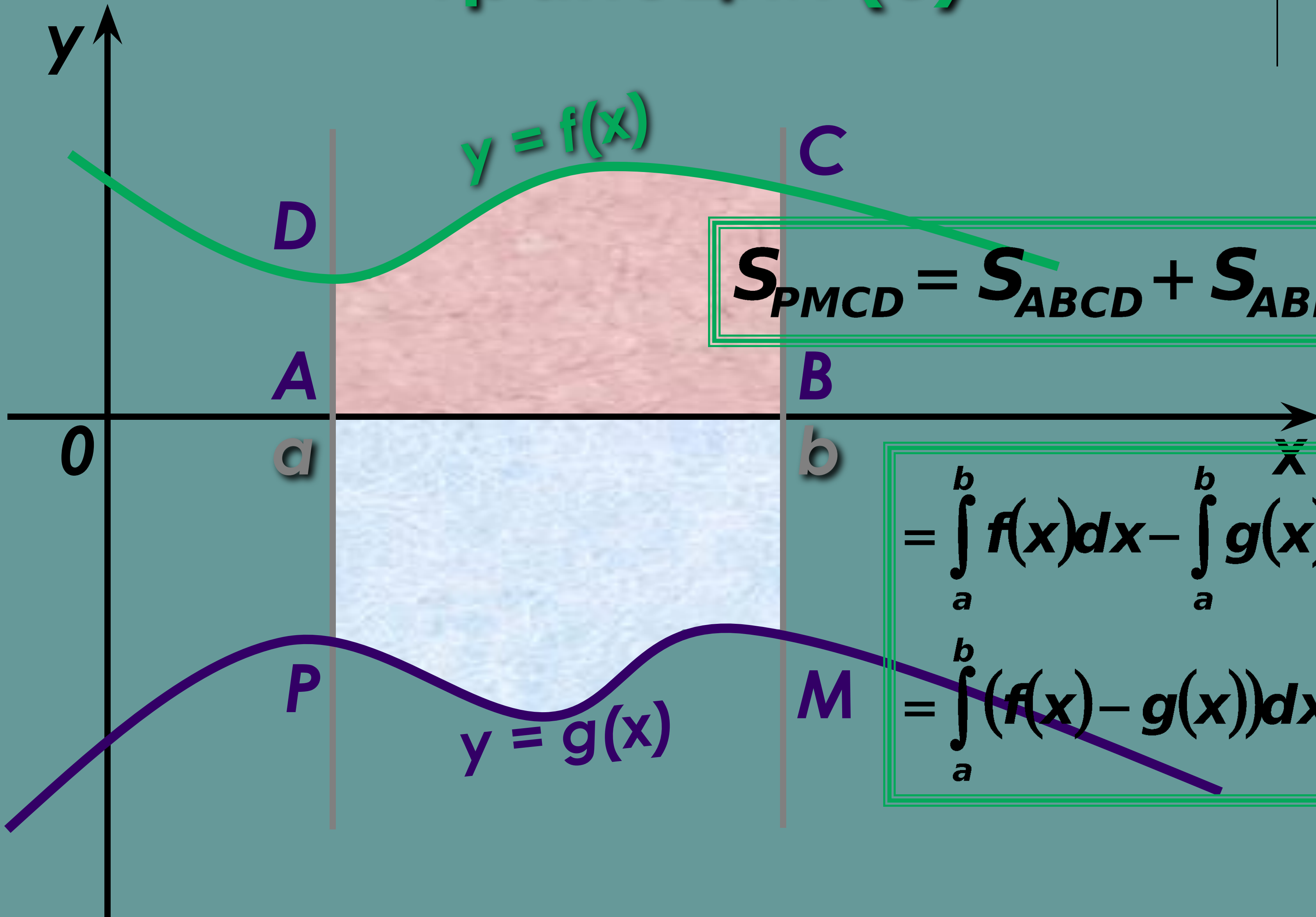


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Площадь криволинейной трапеции (3)

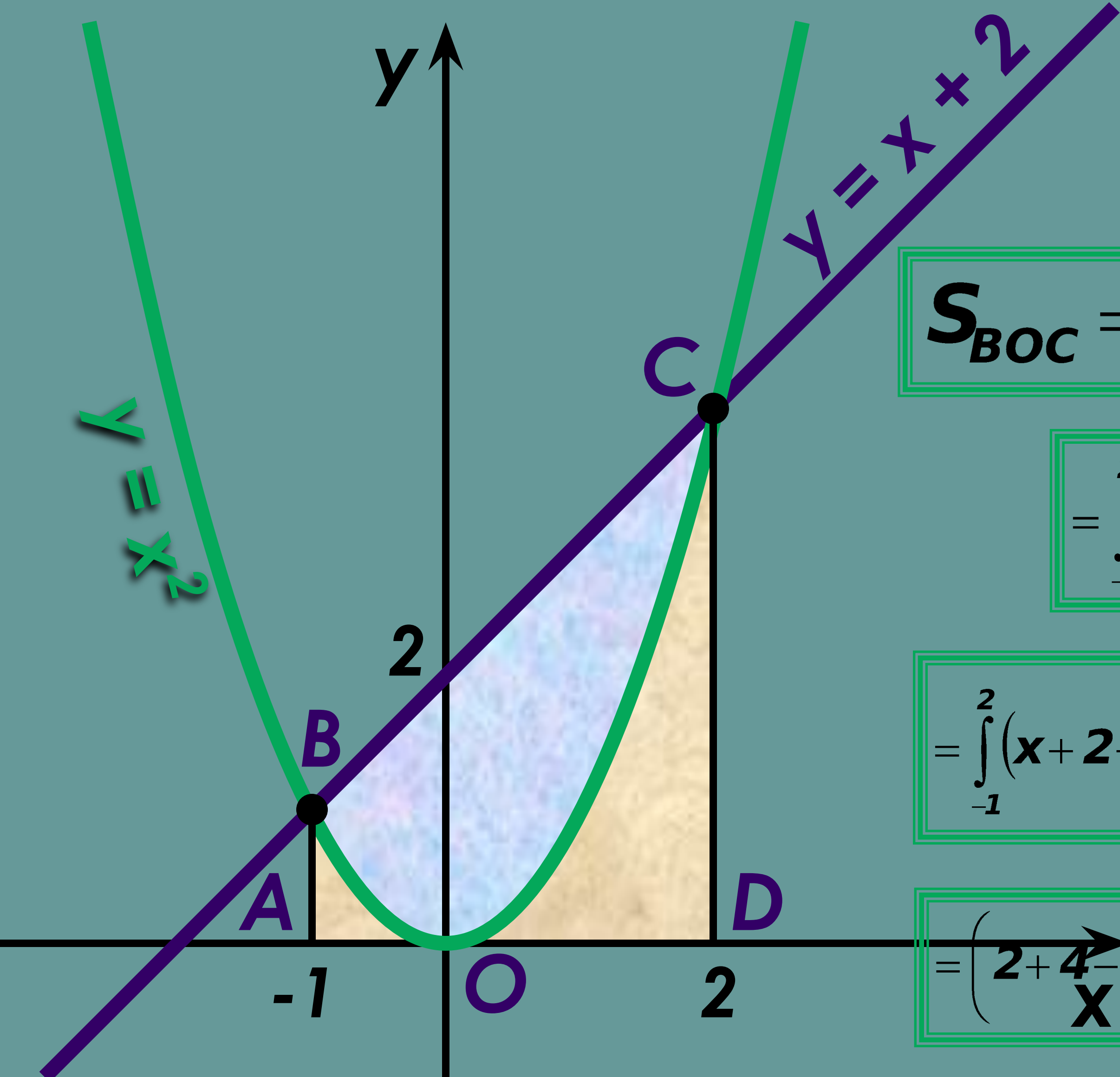


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



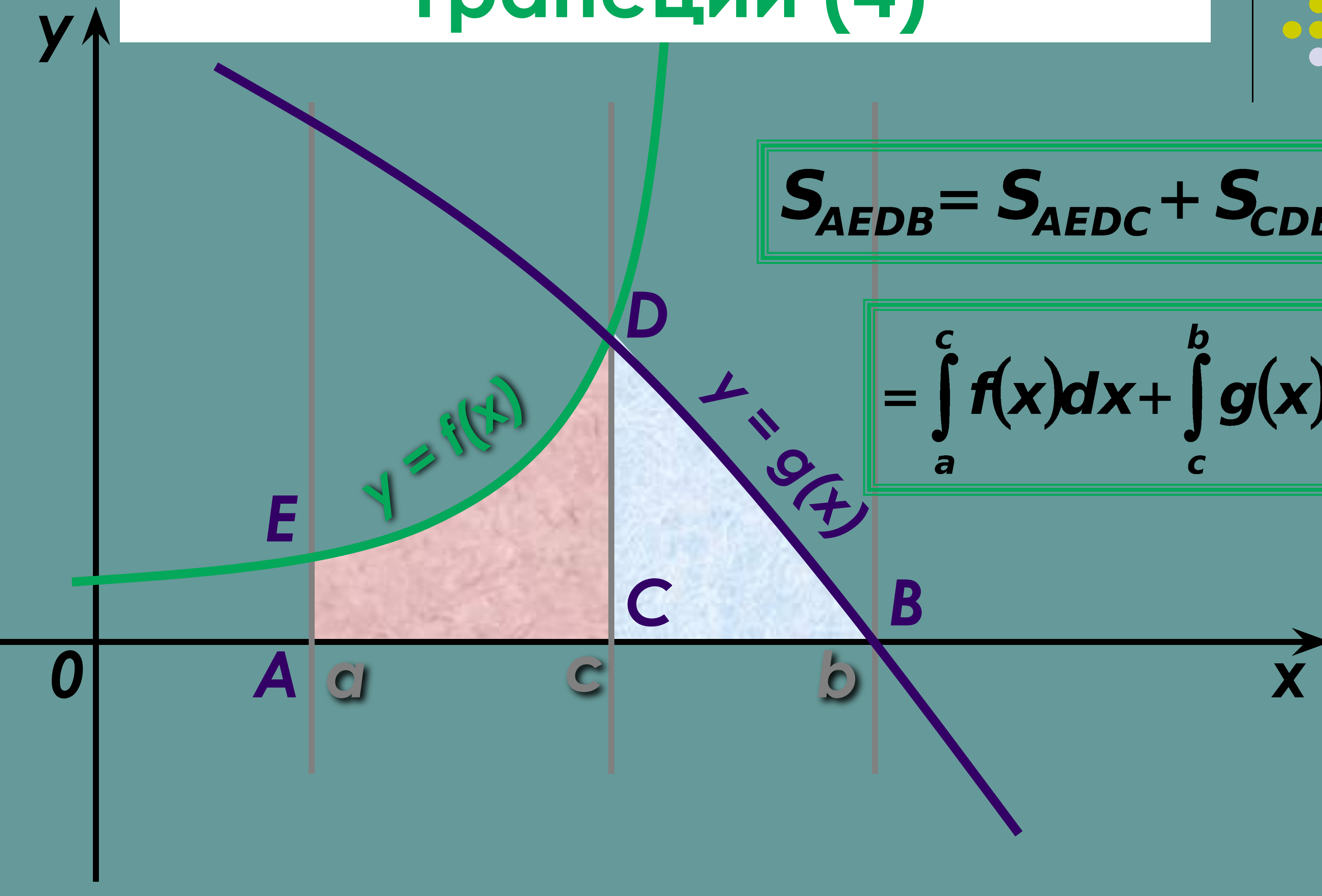
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+2)dx - \int_{-1}^{2}(x^2)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



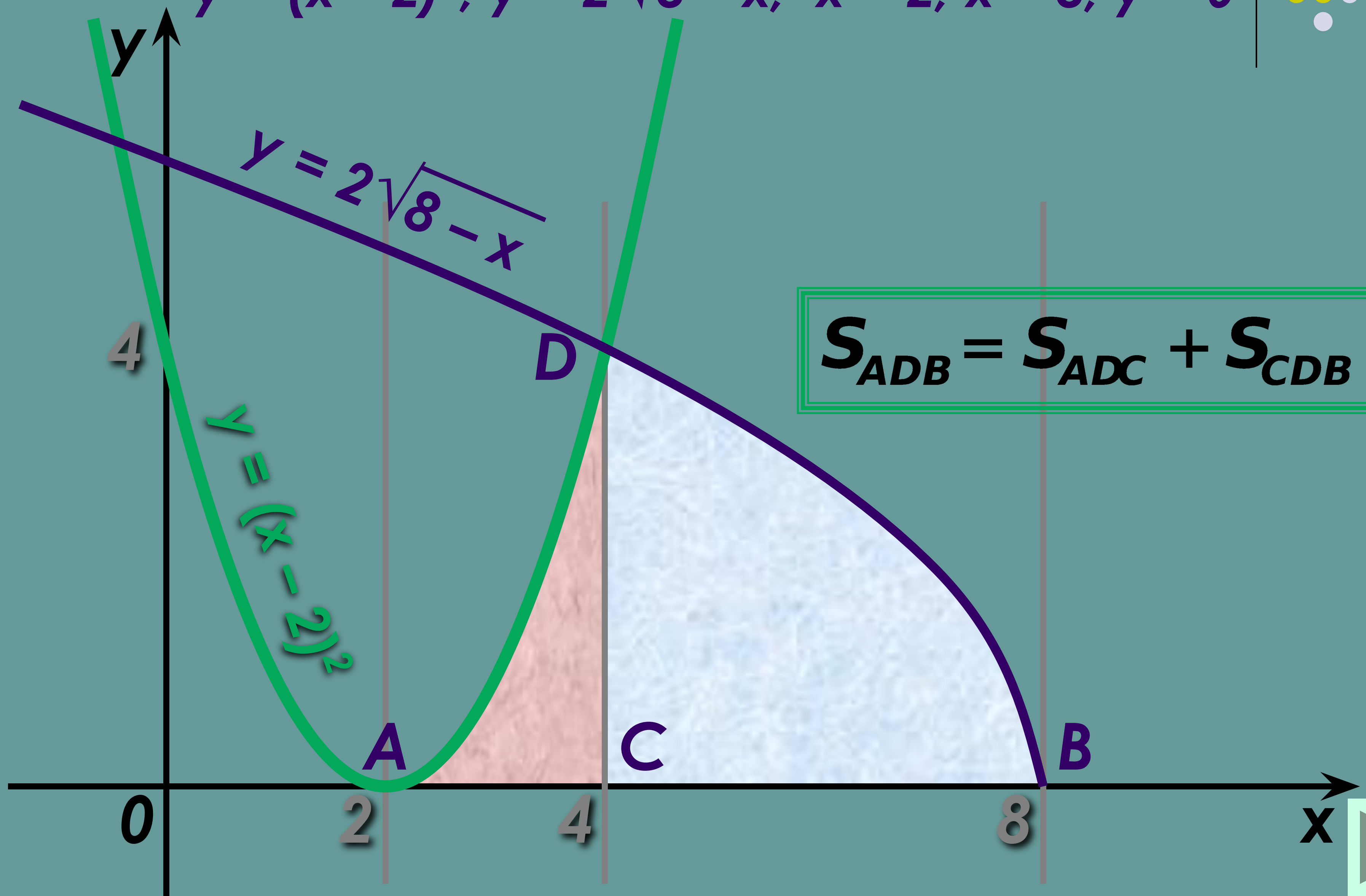
$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$