

«Применение производной в профессиональной деятельности»

Преподаватель математики:

ГАОУ СПО

«Чистопольский политехнический колледж»

Камалова Л.Ш.

«Мыслить последовательно, судить
доказательно, опровергать неправильные
выводы должен уметь всякий: физик и
поэт, тракторист и химик».

Э. Кольман.

Цели:

Образовательные:

- отработать навыки конструирования математических моделей по соответствующим реальным ситуациям;
- рассмотреть методику решения задач прикладного характера;
- применять ранее полученные знания;
- выделять этапы в решении прикладных задач.

Отрабатываемые умения и навыки:

- применять математические знания, необходимые в повседневной жизни, будущей профессии, в нестандартных ситуациях, при решении задач прикладного характера;
- знать формулы вычисления производных;
- уметь вычислять производные;
- использовать приобретенные знания и умения для решения прикладных задач.

Мотивация

Математические задачи с практическим содержанием – это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, а также профессиональной деятельности человека. На сегодняшнем уроке, мы рассмотрим задачи, касающиеся профессии судоводителя, которые можно решить с помощью производной. Поэтому целью нашего урока является систематизация навыков и умений по применению знаний, полученных в ходе изучения темы «Производная в физике», «Наименьшее и наибольшее значения функции» к решению задач этого типа.

I вариант:

1) Вычислите производную:

$$1) (x^{25})' = ; \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x \right)' =$$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$$

2) Найдите производную функции

$$y = x^4 \quad \text{в точке} \quad x_0 = -1.$$

3) Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке

$$[-1; 1].$$

II вариант:

1) Вычислите производную:

$$(x^{258})' = \left(\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x} \right)' =$$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$$

2) Найдите производную функции

$$y = x^5 \quad \text{в точке} \quad x_0 = 1.$$

3) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $[-1; 1]$.



I вариант:

1) Вычислите производную:

$$(x^{25})' = 25x^{24},$$
$$\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$$

2) Найдите производную функции

$$y = x^4 \quad \text{в точке} \quad x_0 = -1.$$

$$y'(x) = (x^4)' = 4x^3; \quad y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4.$$

3) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4x^2 - 2x \quad \text{на промежутке} \quad [-1; 1].$$

$$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; \quad 8x - 2 = 0; \quad x = \frac{1}{4} \in [-1; 1];$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; \quad f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$$

$$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6;$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{наиб.}} = f(1) = 6$$

II вариант:

1) Вычислите производную:

$$(x^{258})' = 258x^{257}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$$

2) Найдите производную функции $y = x^5$

в точке $x_0 = 1$.

$$y'(x) = (x^5)' = 5x^4; \quad y'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$$

3) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x^2 - 2x \quad \text{на промежутке} \quad [-1; 1].$$

$$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; \quad 8x - 2 = 0; \quad x = \frac{1}{4} \in [-1; 1];$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; \quad f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$$

$$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6;$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{наим.}} = f(-1) = -10.$$

Физический и геометрический смысл производной

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Рассмотрим физический и геометрический смысл производной.

Вспомним, как определялась скорость движения в курсе физики. Самый простой случай: материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т.е. координата x этой точки есть известная функция $x(t)$ времени t . За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, перемещение точки равно $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$, а её средняя скорость такова: $v_{cp}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Тело движется плавно, поэтому если Δt очень мало, то за этот промежуток времени скорость не меняется. Тогда средняя скорость (на этом промежутке) практически не отличается от значения $v_{мгн}(t_0)$.

Итак $v_{cp}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v(t_0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Но определению

производной $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow x'(t_0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому считают, что мгновенная скорость $v(t) = x'(t)$.

Физический и геометрический смысл производной

Коротко говорят: **производная от координаты по времени есть скорость**. В этом состоит физический или механический смысл производной.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а также значение 0. Если скорость на каком-либо промежутке времени $(t_1; t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, т.е. координата растёт с течением времени, и наоборот.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t . А производная этой функции называется ускорением движения: $a = v'(t)$. Коротко говорят: **производная от скорости по времени есть ускорение**.

В геометрии же, нахождение производной – это вычисление углового коэффициента касательной.

Решение задач

Задача 1

Теплоход РТ-66 движется по реке Каме прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$.

а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени t .

б) Найдите скорость теплохода в момент времени .

в) Через сколько секунд после начала движения теплоход остановится?



Дано:

$$x(t) = t^3 - 4t^2$$

$$t = 5c$$

Найти:

а) $v(t)$ -?

б) $v(5)$ -?

Решение:

а) Из механического смысла производной следует, что производная координаты по времени – есть скорость, в нашем случае – скорость теплохода.

Поэтому, $v(t) = x'(t)$, $v(t) = x'(t) = (t^3 - 4t^2)' = 3t^2 - 8t$.

б) Найдем значение производной при $t=5c$,
 $v(5) = x'(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 35(м/с)$.

в) Теплоход остановится в том случае, если его скорость будет равна нулю, значит, нам нужно решить уравнение $x'(t) = 0$.

$$3t^2 - 8t = 0,$$

$$t(3t - 8) = 0,$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad 3t - 8 = 0,$$

$$t_1 = 0,$$

$$t_2 = 2\frac{1}{3}.$$

Т.к., в задаче, надо узнать через какое время остановится теплоход, выбираем время, равное $2\frac{1}{3}c$.

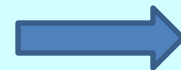
Ответ: а) $v(t) = x'(t) = (t^3 - 4t^2)' = 3t^2 - 8t$, б) $35(м/с)$; в) $2\frac{1}{3}c$.

Задача 2

Нефтеналивная баржа «Бельская 46» движется по Каме прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$$

Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=15$ с.



Дано:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t$$

$$t = 15\text{c}$$

Найти:

2) $v(15)$ -?

3) a -?

Решение:

1) Из механического смысла производной следует, что производная координаты по времени – есть скорость, в нашем случае – скорость теплохода.

$$\text{Поэтому, } v(t) = x'(t), v(t) = x'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t\right)' = t^2 + 4t - 5.$$

Найдем значение производной при $t=15\text{c}$,

$$v(15) = 15^2 + 4 \cdot 15^2 - 5 \cdot 15 = 225 + 900 - 75 = 1050(\text{м/с}).$$

2) Из механического смысла производной следует, что производная скорости – есть ускорение, поэтому, $a = v'(t)$.

$$a = v'(t) = (t^2 + 4t - 5)' = 2t + 4.$$

Найдем значение второй производной при $t=15\text{c}$.

$$a = v'(15) = 2 \cdot 15 + 4 = 34(\text{м/с}^2).$$

1) Ответ: 1) $v(15)=1050 \text{ м/с}$; 2) $a=34 \text{ м/с}^2$;

Задача 3 При остановке судна спускают якорь. Длина якорной цепи с якорем определяется формулой: $H = \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Определите чему равно ускорение якоря?



Дано:

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

Найти:

a -?

Решение:

В задаче рассматривается свободное падение тела, в нашем случае – это якорная цепь с якорем. Если якорную цепь с якорем спустить она упадет вертикально вниз, причем начальное положение якоря совпадет

с 0. Как известно из физики, $x(t) = \frac{gt^2}{2}$. В задаче, $H = x(t)$.

Следовательно, чтобы найти ускорение якоря, надо найти вторую

производную H . $v = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$, а ускорение $a = (gt)' = g$.

Ответ: ускорение якоря равно g .

Задача 4

Два теплохода: «Салават Юлаев» и «Михаил Булгаков»

движутся по законам движения: $S_1(t) = t^3 + t^2$ и $S_2(t) = t^3 + t^2 + 4t$

соответственно. Найдите, на сколько скорость второго судна больше скорости первого, в момент времени $t = 20c$.

Дано: $S_1(t) = t^3 + t^2$ $S_2(t) = t^3 + t^2 + 4$ $t = 20c$	Решение: из механического смысла производной следует, что производная расстояния по времени – есть скорость. Вычислим скорости теплоходов. $v_1(t) = S_1'(t) = (t^3 + t^2)' = 3t^2 + 2t$, $v_2(t) = S_2'(t) = (t^3 + t^2 + 4)' = 3t^2 + 2t$.
Найти: $v_2 > v_1 - ?$	Скорости теплоходов равны: $v_1(20) = v_2(20) = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 = 1240(м/с)$. Ответ: скорости теплоходов равны.

Задача 5

Теплоход движется по прямой согласно закону $S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где $S(t)$ путь в милях и t – время в часах. В какой момент времени скорость теплохода будет наибольшей и какова величина этой скорости, если движение рассматривать за промежуток времени от $t_1 = 0,5$ ч до $t_2 = 2$ ч?



Дано:

$$S(t) = 2t^2 - t$$

$$t_1 = 1 \text{ ч}$$

$$t_2 = 2 \text{ ч}$$

Найти:

$v_{\text{наиб.}}$ — ?

Решение:

Найдем производную функции

$$S'(t) = (2t^2 - t)' = 4t - 1.$$

Решим уравнение $S'(t) = 0$.

$$4t - 1 = 0,$$

$$t = \frac{1}{4} (\text{ч}) \in [1; 2]$$

$$v(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1;$$

$$v(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7;$$

$$v(0,5) = 2 \cdot 0,5^2 - 0,5 = 0.$$

$$v_{\text{наиб.}} = v(2) = 7 (\text{миль} / \text{ч})$$

Ответ: $v_{\text{наиб.}} = v(2) = 7 \text{ миль} / \text{ч}$.

Самостоятельная работа обучающихся

1 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону

$$x(t) = 2t^3 + t - 1$$

в момент времени $t=2c$.



прямолинейно по закону

$$x(t) = 4t^3 - t + 1$$

в момент времени $t=2c$.



Самостоятельная работа студентов

1 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=20c$.

$$v(t) = x'(t) = (2t^3 + t - 1)' = 6t^2 + 1; \quad v(2) = x'(2) = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25(\text{м} / \text{с});$$

$$a(t) = v'(t) = (6t^2 + 1)' = 12t; \quad a = v'(2) = 12 \cdot 2 = 24(\text{м} / \text{с}^2).$$

2 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 - t + 1$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=20c$.

$$v'(t) = x'(t) = (4t^3 - t + 1)' = 12t^2 - 1;$$

$$v'(2) = x'(2) = (4t^3 - t + 1)' = 12 \cdot 2^2 - 1 = 47(\text{м} / \text{с});$$

$$a = v'(t) = (12t^2 - 1)' = 24t;$$

$$a = v'(2) = 24 \cdot 2 = 48(\text{м} / \text{с}^2).$$

Задание на дом

Прочитать тему 21 стр.137-141, выполнить №271, №272.

Ответьте на вопросы:

I. В чем заключается механический смысл производной:

- 1) как называется производная расстояния по времени?
- 2) как найти ускорение, зная скорость?

II. Надо ли знать формулы для вычисления производных функций?

Вывод: Для того, чтобы решать профессионально-ориентированные задачи, необходимо знать формулы нахождения производных функций, физический и геометрический смысл производной, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции; уметь использовать эти знания при решении задач.

Спасибо за внимание!