«Применение производной в профессиональной деятельности»

Преподаватель математики:
ГАОУ СПО
«Чистопольский политехнический колледж»
Камалова Л.Ш.

«Мыслить последовательно, судить доказательно, опровергать неправильные выводы должен уметь всякий: физик и поэт, тракторист и химик».

Э. Кольман.

Цели:

Образовательные:

- отработать навыки конструирования математических моделей по соответствующим реальным ситуациям;
- рассмотреть методику решения задач прикладного характера;
- применять ранее полученные знания;
- выделять этапы в решении прикладных задач.

Отрабатываемые умения и навыки:

- применять математические знания, необходимые в повседневной жизни, будущей профессии, в нестандартных ситуациях, при решении задач прикладного характера;
- знать формулы вычисления производных;
- уметь вычислять производные;
- использовать приобретенные знания и умения для решения прикладных задач.

Мотивация

Математические задачи с практическим содержанием – это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, а также профессиональной деятельности человека. На сегодняшнем уроке, мы рассмотрим задачи, касающиеся профессии судоводителя, которые можно решить с помощью производной. Поэтому целью нашего урока является систематизация навыков и умений по применению знаний, полученных в ходе изучения темы «Производная в физике», «Наименьшее и набольшее значения функции» к решению задач этого типа.

I вариант:

1) Вычислите производную:

1) $(x^{25})' =$; $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x\right)' =$

$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$

2)Найдите производную функции

$y = x^4$ в точке $x_0 = -1$.

3) Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $[-1;1]$.

II вариант:

1) Вычислите производную:

$(x^{258})' =$ $\left(\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x}\right)' =$

$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$

2)Найдите производную функции

$y = x^5$ в точке $x_0 = 1$.

3) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $[-1;1]$.

I вариант:

1) Вычислите производную:

$(x^{25})' = 25x^4$

$\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$

$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$

2)Найдите производную функции

$y = x^4$ в точке $x_0 = -1.$

$y'(x) = (x^4)' = 4x^3;\ y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4.$

3) Найдите наибольшее значение функции

$y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $[-1;1].$

$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; 8x - 2 = 0; x = \frac{1}{4} \in [-1;1];$

$f(\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$

$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6;$

Ответ : $y_{наиб.} = f(1) = 6$

II вариант:

1) Вычислите производную:

$(x^{258})' = 258x^{257}$

$\left(\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$

2)Найдите производную функции $y = x^5$ в точке $x_0 = 1.$

$y'(x) = (x^5)' = 5x^4;\quad y'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

3) Найдите наименьшее значение функции

$y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $[-1;1].$

$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; 8x - 2 = 0; x = \frac{1}{4} \in [-1;1];$

$f(\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$

$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6;$

Ответ : $y_{наим.} = f(-1) = -10.$

Физический и геометрический смысл производной

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Рассмотрим физический и геометрический смысл производной.

Вспомним, как определялась скорость движения в курсе физики. Самый простой случай: материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т.е. координата *x* этой точки есть известная функция *x(t)* времени *t*. За промежуток времени от до Δt, перемещение точки равно $x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta x$, а её средняя скорость такова: $v_{cp}(\Delta t)=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Тело движется плавно, поэтому если Δt очень мало, то за этот промежуток времени скорость не меняется. Тогда средняя скорость (на этом промежутке) практически не отличается от значения $v_{мгн}(t_0)$.

Итак $v_{cp}(\Delta t)=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to v(t_0')$ при $\Delta t\to 0$. Но определению

производной $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t_0)$ при $\Delta t\to 0$. Поэтому считают, что мгновенная скорость $v(t)=x'(t)$.

Физический и геометрический смысл производной

Коротко говорят: **производная от координаты по времени есть скорость**. В этом состоит физический или механический смысл производной.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а также значение 0. Если скорость на каком-либо промежутке времени $(t_1;t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, т.е. координата растёт с течением времени, и наоборот.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t. А производная этой функции называется ускорением движения: $a = v'(t)$. Коротко говорят: **производная от скорости по времени есть ускорение.**

В геометрии же, нахождение производной – это вычисление углового коэффициента касательной.

Решение задач

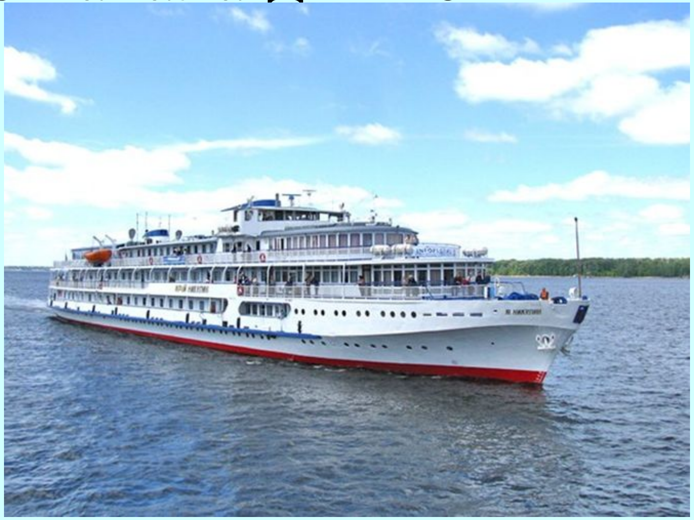
Задача 1

Теплоход РТ-66 движется по реке Каме прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$.

а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени t.

б) Найдите скорость теплохода в момент времени .

в) Через сколько секунд после начала движения теплоход остановится?



Дано:	**Решение:**
$x(t)=t^3-4t^2$ $t=5c$	а) Из механического смысла производной следует, что производная координаты по времени – есть скорость, в нашем случае – скорость теплохода.
Найти: а) $v(t)$-? б) $v(5)$-?	Поэтому, $v(t)=x'(t)$, $v(t)=x'(t)=(t^3-4t^2)'=3t^2-8t.$ б) Найдем значение производной при $t=5c$, $v(5)=x'(5)=3\cdot 5^2-8\cdot 5=35(м/c).$ в) Теплоход остановится в том случае, если его скорость будет равна нулю, значит, нам нужно решить уравнение $x'(t)=0.$ $3t^2-8t=0,$ $t(3t-8)=0,$ $t=0$ или $3t-8=0,$ $t_1=0,$ $t_2=2\frac{1}{3}.$ Т.к., в задаче, надо узнать через какое время остановится теплоход, выбираем время, равное $2\frac{1}{3}c.$ Ответ: а) $v(t)=x'(t)=(t^3-4t^2)'=3t^2-8t,$ б) $35(м/c);$ в) $2\frac{1}{3}c.$

Задача 2

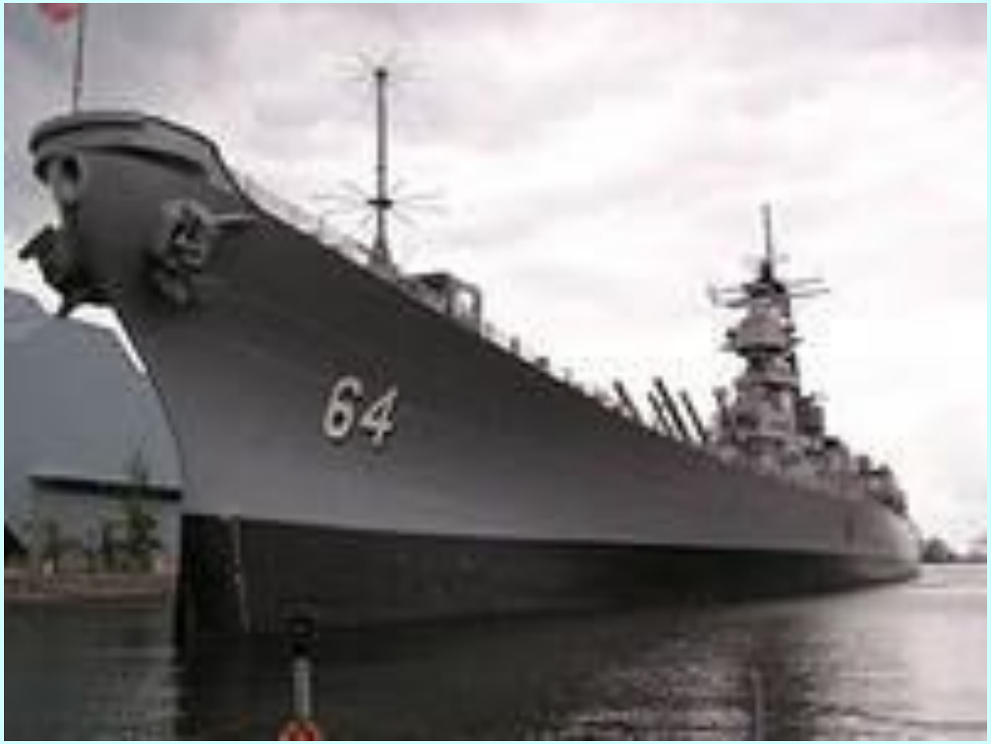
Нефтеналивная баржа «Бельская 46» движется по Каме прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$$

Найдите скорость
и ускорение
в момент времени
t=15c.

Дано:	**Решение:**
$x(t)=\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t$ $t=15c$	1) Из механического смысла производной следует, что производная координаты по времени – есть скорость, в нашем случае – скорость теплохода.
Найти: 2) *v(15)-?* 3) *a-?*	Поэтому, $v(t)=x'(t)$, $v(t)=x'(t)=(\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t)'=t^2+4t-5$. Найдем значение производной при *t=15c,* $v(15)=15^2+4\cdot15^2-5\cdot15=225+900-75=1050(м/с)$. 2) Из механического смысла производной следует, что производная скорости – есть ускорение, поэтому, $a=v'(t)$. $a=v'(t)=(t^2+4t-5)'=2t+4$. Найдем значение второй производной при *t=15c.* $a=v'(15)=2\cdot15+4=34(м/c^2)$. 1) Ответ: 1) *v(15)=1050* $м/с$; 2) *a=34* $м/с^2$;

<u>Задача 3 </u> При остановке судна спускают якорь. Длина якорной цепи с якорем определяется формулой: $H = \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Определите чему равно ускорение якоря?



Дано:	**Решение:**
$H = \dfrac{gt^2}{2}$	В задаче рассматривается свободное падение тела, в нашем случае – это якорная цепь с якорем. Если якорную цепь с якорем спустить она
Найти: a-?	упадет вертикально вниз, причем начальное положение якоря совпадет с 0. Как известно из физики, $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}$. В задаче, $H = x(t)$. Следовательно, чтобы найти ускорение якоря, надо найти вторую производную H. $v = (\dfrac{gt^2}{2})' = gt$, а ускорение $a = (gt)' = g$. Ответ: ускорение якоря равно g.

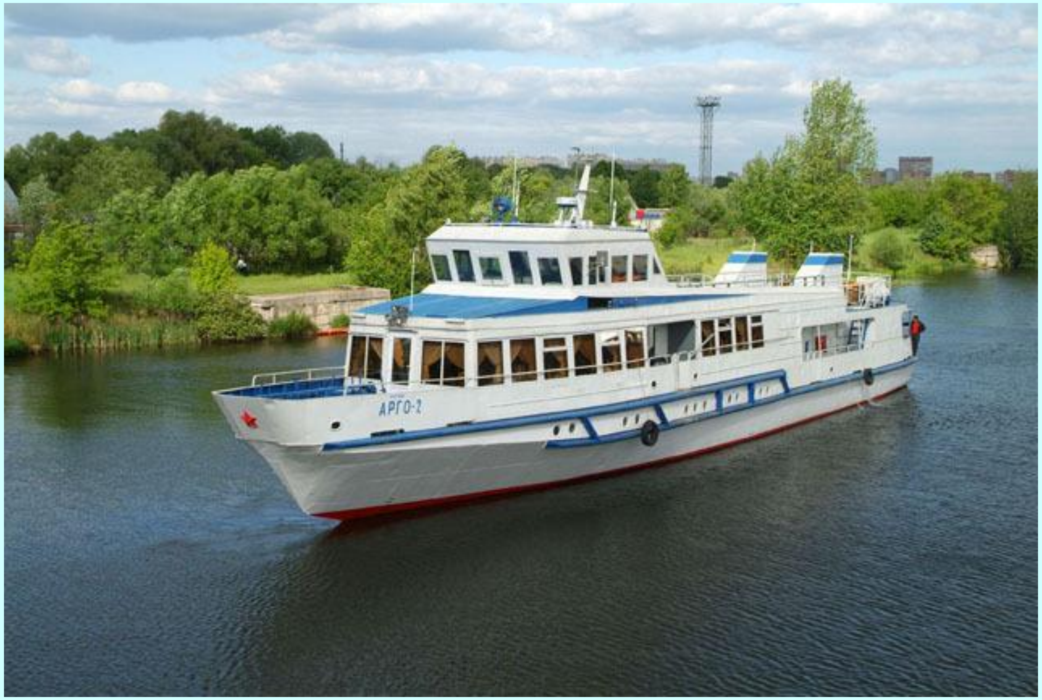
Задача 4

Два теплохода: «Салават Юлаев» и «Михаил Булгаков» движутся по законам движения: $S_1(t) = t^3 + t^2$ и $S_2(t) = t^3 + t^2 + 4t$ соответственно. Найдите, на сколько скорость второго судна больше скорости первого, в момент времени $t = 20c.$

Дано:	Решение:
$S_1(t) = t^3 + t^2$ $S_2(t) = t^3 + t^2 + 4$ $t = 20c$	из механического смысла производной следует, что производная расстояния по времени – есть скорость. Вычислим скорости теплоходов. $v_1(t) = S_1'(t) = (t^3 + t^2)' = 3t^2 + 2t,\ v_2(t) = S_2'(t) = (t^3 + t^2 + 4)' = 3t^2 + 2t.$
Найти: $v_2 > v_1 - ?$	Скорости теплоходов равны: $v_1(20) = v_2(20) = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 = 1240(м/с).$ Ответ: скорости теплоходов равны.

Задача 5

Теплоход движется по прямой согласно закону $S(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$, где *S(t)* путь в милях и *t* – время в часах. В какой момент времени скорость теплохода будет наибольшей и какова величина этой скорости, если движение рассматривать за промежуток времени от $t_1=0{,}5ч$ до $t_2=2ч$?



Дано:	Решение:
$S(t) = 2t^2 - t$ $t_1 = 1ч$ $t_2 = 2ч$	Найдем производную функции $S'(t) = (2t^2 - t)' = 4t - 1.$ Решим уравнение $S'(t) = 0.$ $4t - 1 = 0,$ $t = \frac{1}{4}(ч) \in [1;2]$
Найти:	
$v_{наиб.} - ?$	$v(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1;$ $v(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7;$ $v(0,5) = 2 \cdot 0,5^2 - 0,5 = 0.$ $v_{наиб.} = v(2) = 7(миль/ч)$ Ответ: $v_{наиб.} = v(2) = 7 миль/ч.$

Самостоятельная работа обучающихся

1 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$.

е в момент времени *t=2c*.

олинейно по закону $x(t) = 4t^3 - t + 1$.

е в момент времени *t=2c*.

Самостоятельная работа студентов

1 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени *t=20c.*

$$v(t) = x'(t) = (2t^3 + t - 1)' = 6t^2 + 1; \quad v(2) = x'(2) = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25(м / с);$$

$$a(t) = v'(t) = (6t^2 + 1)' = 12t; \quad a = v'(2) = 12 \cdot 2 = 24(м / с^2).$$

2 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 - t + 1$.

Найдите скорость и ускорение в момент времени t=20c.

$$v'(t) = x'(t) = (4t^3 - t + 1)' = 12t^2 - 1;$$

$$v'(2) = x'(2) = (4t^3 - t + 1)' = 12 \cdot 2^2 - 1 = 47(м / с);$$

$$a = v'(t) = (12t^2 - 1)' = 24t;$$

$$a = v'(2) = 24 \cdot 2 = 48(м / с^2).$$

Задание на дом

Прочитать тему 21 стр.137-141, выполнить №271, №272.

Ответьте на вопросы:

I. В чем заключается механический смысл производной:

1) как называется производная расстояния по времени?

2) как найти ускорение, зная скорость?

II. Надо ли знать формулы для вычисления производных функций?

Вывод: Для того, чтобы решать профессионально-ориентированные задачи, необходимо знать формулы нахождения производных функций, физический и геометричский смысл производной, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции; уметь использовать эти знания при решении задач.

Спасибо за внимание!