«Применение производной в профессиональной деятельности»

Преподаватель математики: ГАОУ СПО

«Чистопольский политехнический колледж» Камалова Л.Ш. «Мыслить последовательно, судить доказательно, опровергать неправильные выводы должен уметь всякий: физик и поэт, тракторист и химик».

Э. Кольман.

Цели:

Образовательные:

- отработать навыки конструирования математических моделей по соответствующим реальным ситуациям;
- рассмотреть методику решения задач прикладного характера;
- применять ранее полученные знания;
- выделять этапы в решении прикладных задач.

Отрабатываемые умения и навыки:

- применять математические знания, необходимые в повседневной жизни, будущей профессии, в нестандартных ситуациях, при решении задач прикладного характера;
- знать формулы вычисления производных;
- уметь вычислять производные;
- использовать приобретенные знания и умения для решения прикладных задач.

Мотивация

Математические задачи с практическим содержанием – это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, а также профессиональной деятельности человека. На сегодняшнем уроке, мы рассмотрим задачи, касающиеся профессии судоводителя, которые можно решить с помощью производной. Поэтому целью нашего урока является систематизация навыков и умений по применению знаний, полученных в ходе изучения темы «Производная в физике», «Наименьшее и набольшее значения функции» к решению задач этого типа.

І вариант:

1) Вычислите производную: ,

1)
$$(x^{25})' =$$
; $(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x) =$
 $(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$

2)Найдите производную функции

$$y = x^4$$
 B TOUKE $x_0 = -1$.

3) Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке [-1;1]

II вариант:

1) Вычислите производную: $(x^{258})' = (\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x}) = (\frac{1}{x} + \cos x + \cos x - \cos x) = (\frac{1}{x} + \cos x + \cos x) = (\frac{1}{x} + \cos x + \cos x) = (\frac{1}{x} + \cos x) = (\frac{1}{x}$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' =$$

2)Найдите производную функции

$$y = x^5$$
 B TOYKE $x_0 = 1$.

3) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 2x$ на промежутке $\begin{bmatrix} -1;1 \end{bmatrix}$.



І вариант:

1) Вычислите производную:

$$\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x\right)' = 25x^{4}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x\right)' = -\frac{1}{x^{2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$$

 $(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$ 2)Найдите производную функции

 $y = x^4$ В ТОЧКЕ $x_0 = -1$.

$$y'(x) = (x^4)' = 4x^3$$
; $y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$.

3) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4x^2 - 2x$$
 на промежутке $[-1;1]$.

$$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; 8x - 2 = 0; x = \frac{1}{4} \in [-1; 1];$$

$$f(\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$$

$$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6$$

Ответ :
$$y_{\text{най}} = f(1) = 6$$

II вариант:

1) Вычислите производную:

$$(x^{258})' = 258x^{257}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \sin x - \sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^7 - 5x^4 + 20x^3 - 4)' = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2$$

2)Найдите производную функции $y = x^5$ в точке $x_0 = 1$

$$y'(x) = (x^5)' = 5x^4$$
; $y'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

3) Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x^2 - 2x$$
 на промежутке $[-1;1]$.

$$y' = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2; 8x - 2 = 0; x = \frac{1}{4} \in [-1; 1].$$

$$f(\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0; f(-1) = 8 \cdot (-1) - 2 = -10;$$

$$f(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6$$
;

Ответ:
$$y_{\text{наим.}} = f(-1) = -10.$$

Физический и геометрический смысл производной

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Рассмотрим физический и геометрический смысл производной.

Вспомним, как определялась скорость движения в курсе физики. Самый простой случай: материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т.е. координата x этой точки есть известная функция x(t) времени t. За промежуток времени от до Δt , перемещение точки равно $x(t+\Delta t)$ -x(t)= Δx , а её средняя скорость такова: $v_{cp}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Тело движется плавно, поэтому если Δt очень мало, то за этот промежуток времени скорость не меняется. Тогда средняя скорость (на этом промежутке) практически не отличается от значения $v_{\text{мен}}(t_0)$. Итак $v_{cp}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v(t_0^*)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Но определению

производной $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t_0)$ при $\Delta t \to 0$. Поэтому считают, что мгновенная скорость v(t) = x'(t).

Физический и геометрический смысл производной

Коротко говорят: производная от координаты по времени есть скорость. В этом состоит физический или механический смысл производной.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а также значение 0. Если скорость на какомлибо промежутке времени $(t_1;t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, т.е. координата растёт с течением времени, и наоборот.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t. А производная этой функции называется ускорением движения: a = v(t) Коротко говорят: производная от скорости по времени есть ускорение.

В геометрии же, нахождение производной – это вычисление углового коэффициента касательной.

Решение задач

Задача 1

Теплоход РТ-66 движется по реке Каме прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$.

- а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени t.
- б) Найдите скорость теплохода в момент времени.

в) Через сколько секунд после начала движения

теплоход остановится?



Дано:	Решение:
$x(t) = t^3 - 4t^2$	а) Из механического смысла производной следует, что производная
t = 5c	координаты по времени – есть скорость, в нашем случае – скорость
Найти:	теплохода.
a) v(t)-?	Поэтому, $v(t) = x'(t)$, $v(t) = x'(t) = (t^3 - 4t^2)' = 3t^2 - 8t$.
a) v(t)-? 6) v(5)-?	б) Найдем значение производной при $t=5c$,
	$v(5) = x'(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 35(m/c).$
	в) Теплоход остановится в том случае, если его скорость будет равна
	нулю, значит, нам нужно решить уравнение $x'(t) = 0$.
	$3t^2-8t=0,$
	t(3t-8)=0,
	t=0 3t-8=0,
	$t_1 = 0$,
	$t_1 = 0,$ $t_2 = 2\frac{1}{3}.$
	Т.к., в задаче, надо узнать через какое время остановится теплоход,
	выбираем время, равное $2\frac{1}{3}c$.
	Other: a) $v(t) = x'(t) = (t^3 - 4t^2)' = 3t^2 - 8t$, b) $35(m/c)$; b) $2\frac{1}{3}c$.

Задача 2

Нефтеналивная баржа «Бельская 46» движется по Каме прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$$

Найдите скорость и ускорение в момент времени t=15c.



Дано:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t$$
$$t = 15c$$

Решение:

 $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t$ Из механического смысла производной следует, что производная координаты по времени - есть скорость, в нашем случае - скорость теплохода.

Найти:

- 2) v(15)-?

Поэтому, v(t) = x'(t), $v(t) = x'(t) = (\frac{1}{2}t^3 + 2t^2 - 5t)' = t^2 + 4t - 5$.

Найдем производной значение при t=15c. $v(15) = 15^2 + 4.15^2 - 5.15 = 225 + 900 - 75 = 1050(m/c)$.

2) Из механического смысла производной следует, что производная скорости – есть ускорение, поэтому, a = v'(t).

$$a = v'(t) = (t^2 + 4t - 5)' = 2t + 4.$$

Найдем значение второй производной при t=15c.

$$a = v'(15) = 2 \cdot 15 + 4 = 34(m/c^2).$$

1) Other: 1) v(15)=1050 m/c; 2) $a=34 \text{ m/c}^2$;

Задача 3 При остановке судна спускают якорь. Длина якорной цепи с якорем определяется формулой: $H = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения. Определите чему равно ускорение якоря?





Дано:

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

Найти:

a-?

Решение:

В задаче рассматривается свободное падение тела, в нашем случае – это якорная цепь с якорем. Если якорную цепь с якорем спустить она упадет вертикально вниз, причем начальное положение якоря совпадет

с 0. Как известно из физики,
$$x(t) = \frac{gt^2}{2}$$
. В задаче, $H = x(t)$.

Следовательно, чтобы найти ускорение якоря, надо найти вторую

производную
$$H$$
. $v = (\frac{gt^2}{2})' = gt$, а ускорение $a = (gt)' = g$.

Ответ: ускорение якоря равно g.

Задача 4

Два теплохода: «Салават Юлаев» и «Михаил Булгаков» движутся по законам движения: $S_1(t) = t^3 + t^2$ и $S_2(t) = t^3 + t^2 + 4t$ соответственно. Найдите, на сколько скорость второго судна t = 20c. больше скорости первого, в момент времени

Дано:

$$S_1(t) = t^3 + t^2$$

$$S_1(t) = t^3 + t^2$$
$$S_2(t) = t^3 + t^2 + 4$$

$$t = 20c$$

Найти:

$$v_2 > v_1 - ?$$

Решение:

из механического смысла производной следует, что производная

расстояния по времени - есть скорость. Вычислим скорости

теплоходов.

$$v_1(t) = S_1'(t) = (t^3 + t^2)' = 3t^2 + 2t, \ v_2(t) = S_2'(t) = (t^3 + t^2 + 4)' = 3t^2 + 2t.$$

Скорости теплоходов равны:

$$v_1(20) = v_2(20) = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 = 1240 (M/c).$$

Ответ: скорости теплоходов равны.

Задача 5

Теплоход движется по прямой согласно закону $S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ где S(t) путь в милях и t — время в часах. В какой момент времени скорость теплохода будет наибольшей и какова величина этой скорости, если движение рассматривать за промежуток времени от $t_1 = 0.5v$ до

 $t_2 = 2u$?



Дано:

Решение:

$$S(t) = 2t^2 - t$$

производную

функции

$$t_1 = 1u$$

$$S(t) = 2t^2 - t$$
 Найдем прои $t_1 = 1q$ $S'(t) = (2t^2 - t)' = 4t - 1.$

$$t_2 = 2u$$

Решим уравнение S'(t) = 0.

$$4t - 1 = 0$$
,

Найти:

$$t = \frac{1}{4}(u) \in [1;2]$$

$$v_{\text{наиб.}} - ?$$
 $v(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1;$

$$v(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7;$$

$$v(0,5) = 2 \cdot 0,5^2 - 0,5 = 0.$$

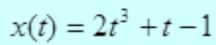
$$v_{\text{наиб.}} = v(2) = 7(\text{миль}/\text{ч})$$

Oтвет: $v_{\text{наиб}} = v(2) = 7 \mu u \pi b / \eta$.

Самостоятельная работа обучающихся

<u> 1 вариант</u>

Баржа движется по реке прямолинейно по закону



е в момент времени t=2c.



олинейно по закону $x(t) = 4t^3 - t + 1$.

е в момент времени t=2c.



Самостоятельная работа студентов

1 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$. Найдите скорость и ускорение в момент времени t = 20c.

$$v(t) = x'(t) = (2t^3 + t - 1)' = 6t^2 + 1;$$
 $v(2) = x'(2) = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25(m/c);$ $a(t) = v'(t) = (6t^2 + 1)' = 12t;$ $a = v'(2) = 12 \cdot 2 = 24(m/c^2).$

2 вариант

Баржа движется по реке прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 - t + 1$. Найдите скорость и ускорение в момент времени t=20c.

$$v'(t) = x'(t) = (4t^3 - t + 1)' = 12t^2 - 1;$$

$$v'(2) = x'(2) = (4t^3 - t + 1)' = 12 \cdot 2^2 - 1 = 47(m/c);$$

$$a = v'(t) = (12t^2 - 1)' = 24t;$$

$$a = v'(2) = 24 \cdot 2 = 48(m/c^2).$$

Задание на дом

Прочитать тему 21 стр.137-141, выполнить №271, №272.

Ответьте на вопросы:

- I. В чем заключается механический смысл производной:
- 1) как называется производная расстояния по времени?
- 2) как найти ускорение, зная скорость?
- II. Надо ли знать формулы для вычисления производных функций?

Вывод: Для того, чтобы решать профессиональноориентированные задачи, необходимо знать формулы нахождения производных функций, физический и геометричский смысл производной, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции; уметь использовать эти знания при решении задач.

Спасибо за внимание!