Понятие функции, способы её задания, график функции. Преобразование графиков.

Числовая функция

- **Определение.** ***Числовой функцией*** с областью определения D называется соответствие при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.
- x – ***аргумент функции*** (независимая переменная)
- Число y, соответствующее числу x, называют ***значением функции*** f в точке x и обозначают f(x)

- ***Область определения*** функции f обозначают D(f).
- Множество, состоящее из всех чисел f(x), таких, что x принадлежит области определения функции f, называют ***областью значений*** функции f и обозначают E(f).

- ***Объединением множеств А и В*** называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.
- Объединение множеств А и В обозначается так:

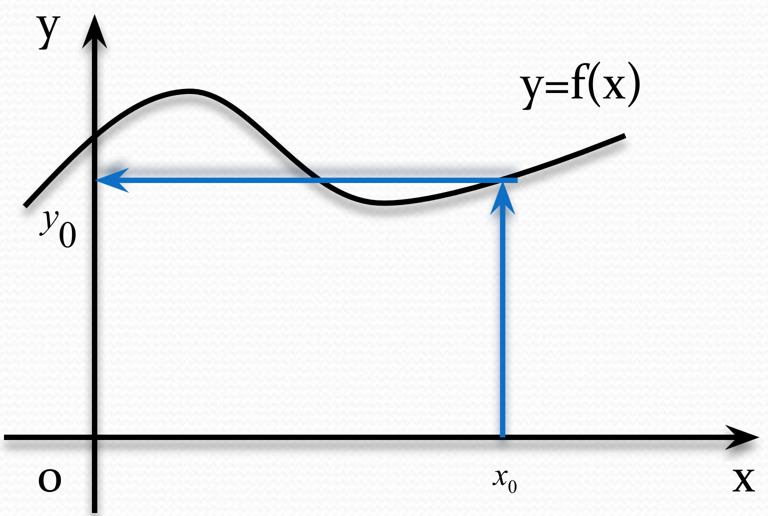
$$A \cup B$$

- Функции вида f(x)=p(x), где p(x) – многочлен, называют ***целыми рациональными функциями***, а функции вида $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

  где p(x) и q(x) – многочлены, называют ***дробно-рациональными функциями***.

График функции

- Графиком функции f называют множество всех точек (x, y) координатной плоскости, где y=f(x), а x «пробегает» всю область определения функции f.



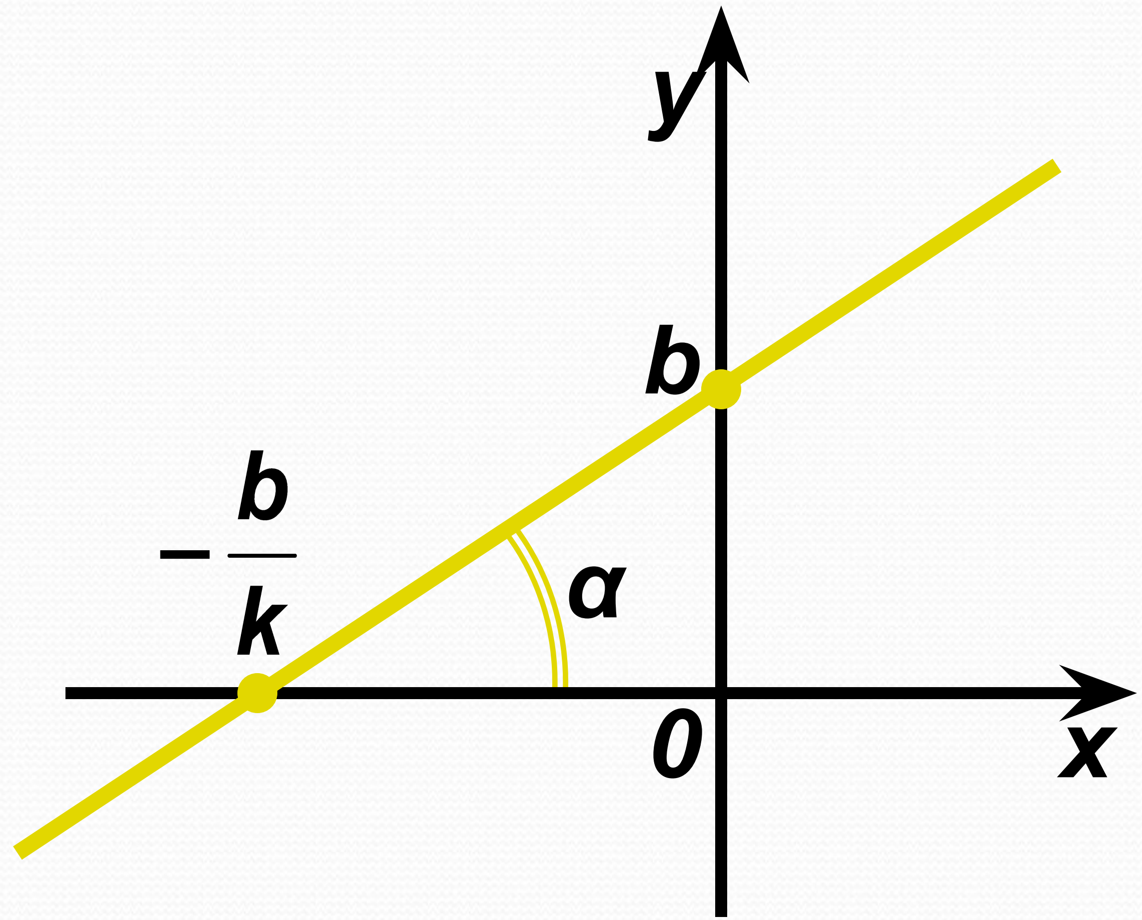
Линейная функция

$y = kx + b$

b – свободный коэффициент

k – угловой коэффициент

$k = tg\ \alpha$



Свойства линейной функции

$y = kx + b$

1º $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

2º Если $b = 0$, то функция **нечетная**.

Если $b \neq 0$, то функция **ни четная, ни нечетная**.

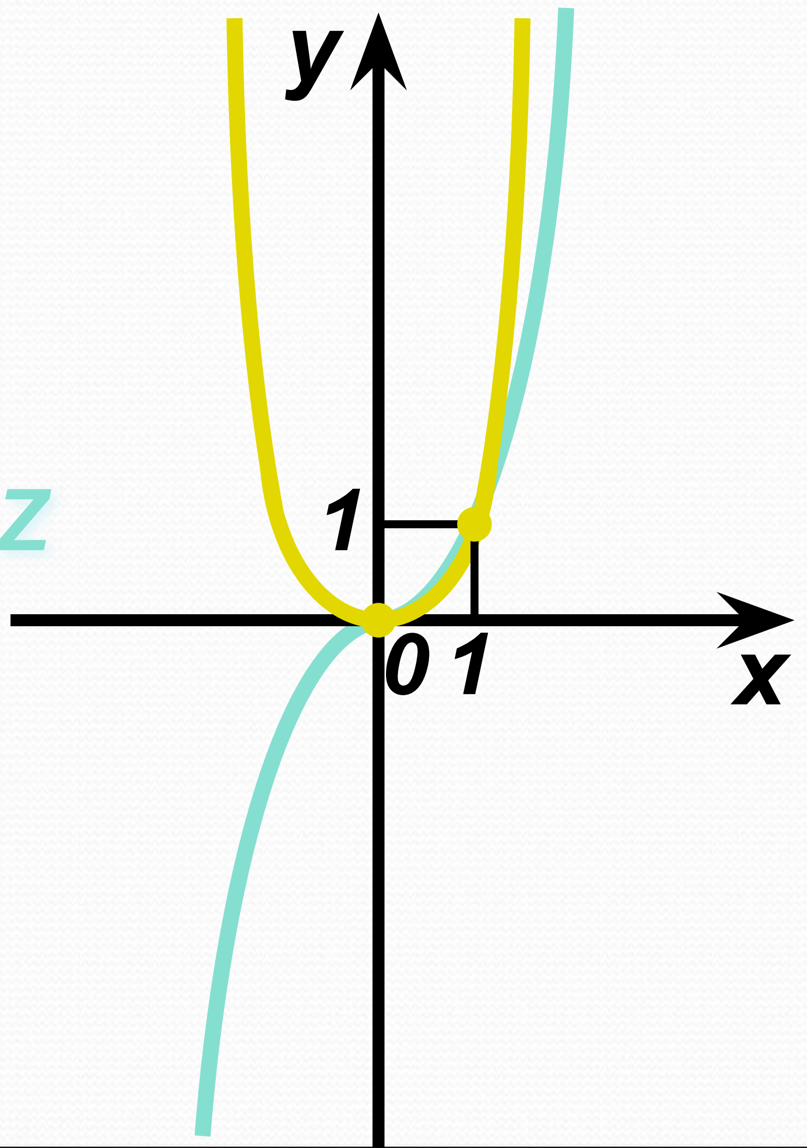
3º Если $x = 0$, то $y = b$, если $y = 0$, то $x = -\frac{b}{k}$.

4º Если $k > 0$, то функция **возрастает** при x $(-\infty; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция **убывает** при x $(-\infty; +\infty)$.

Степенная функция

$y = x^n$



$y = x^n$, где $n = 2k$, $k \in Z$

$y = x^n$, где $n = 2k+1$, $k \in Z$

Свойства степенной функции $y = x^n$

Если $n = 2k$, где k □ Z

1° $D(y)=(-\infty; +\infty)$.

2° $E(y)=[0 ; +\infty)$.

3° Функция четная.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция возрастает

при x□$[0 ; +\infty)$;

убывает при x□$(-\infty; 0]$.

Если $n = 2k + 1$, где k □ Z

1° $D(y)=(-\infty; +\infty)$.

2° $E(y)=(-\infty; +\infty)$.

3° Функция нечетная.

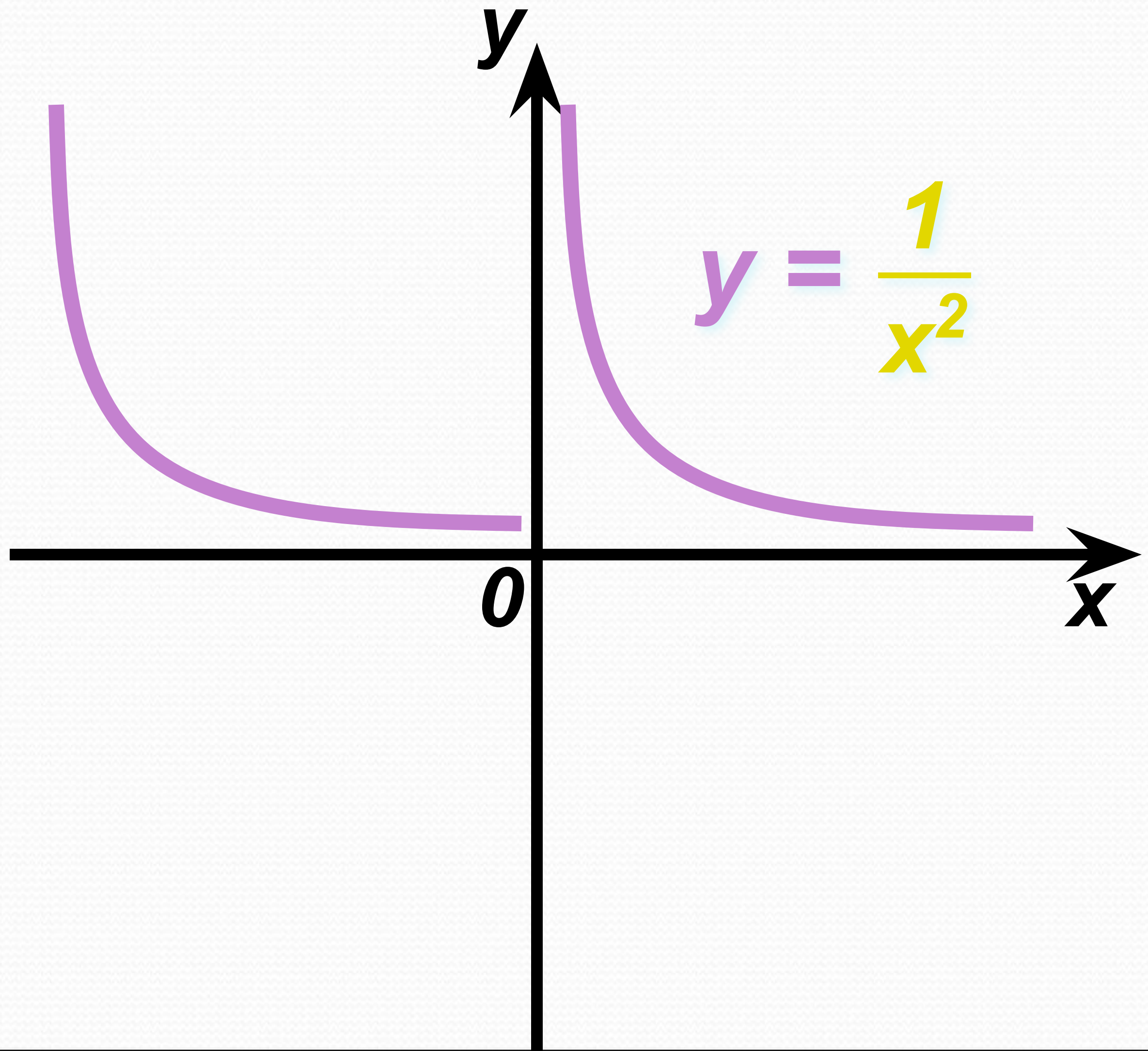
4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция возрастает

при x□$(-\infty; +\infty)$.

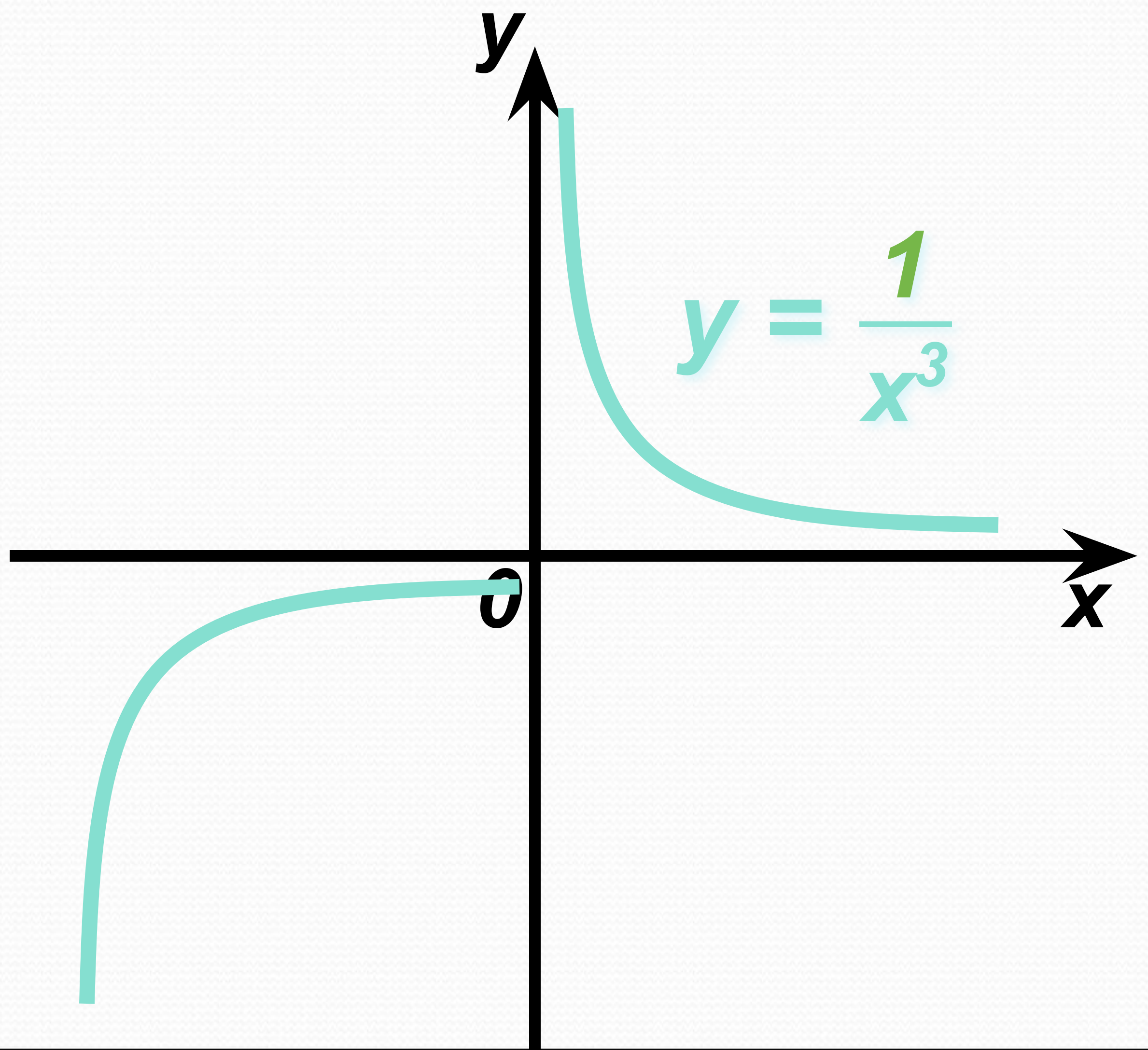
Степенная функция

$y = x^{-n}$, n – четное



Степенная функция

$y = x^{-n}$, n – нечетное



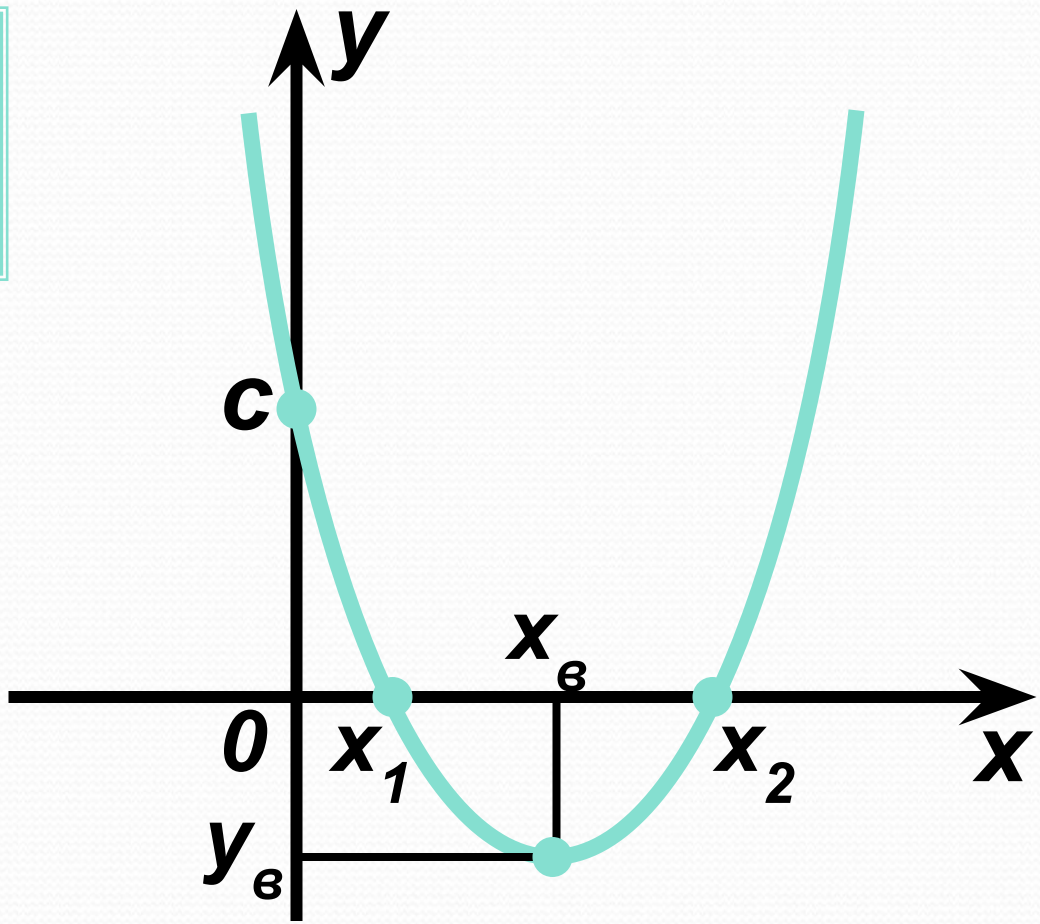
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_в = -\frac{b}{2a}$$

$$y_в = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



Свойства квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

1° $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2° Если $a > 0$, то $E(y) = [y_в; +\infty)$;

Если $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; y_в]$.

3° Если $b = 0$, то функция **четная**.

Если $b \neq 0$, то функция **ни четная, ни нечетная**.

4° Если $x = 0$, то $y = c$, если $y = 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

5° Если $a > 0$, то функция **возрастает** при $x \in [x_в; +\infty)$;

функция **убывает** при $x \in (-\infty; x_в]$.

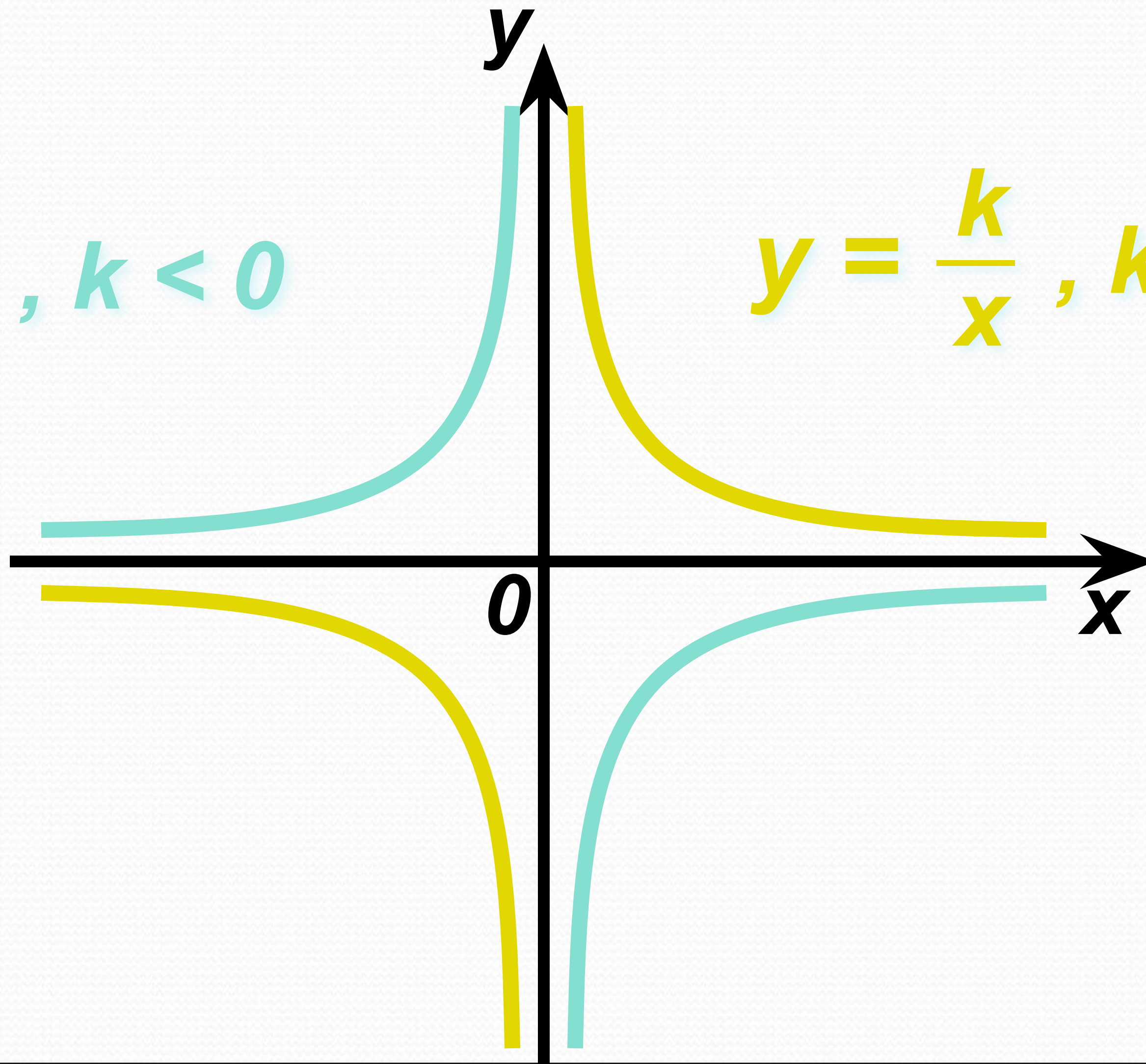
Если $a < 0$, то функция **возрастает** при $x \in (-\infty; x_в]$;

функция **убывает** при $x \in [x_в; +\infty)$.

Обратная пропорциональность

$y = \dfrac{k}{x}\,,\ k < 0$

$y = \dfrac{k}{x}\,,\ k > 0$



Свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$

1° $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2° $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

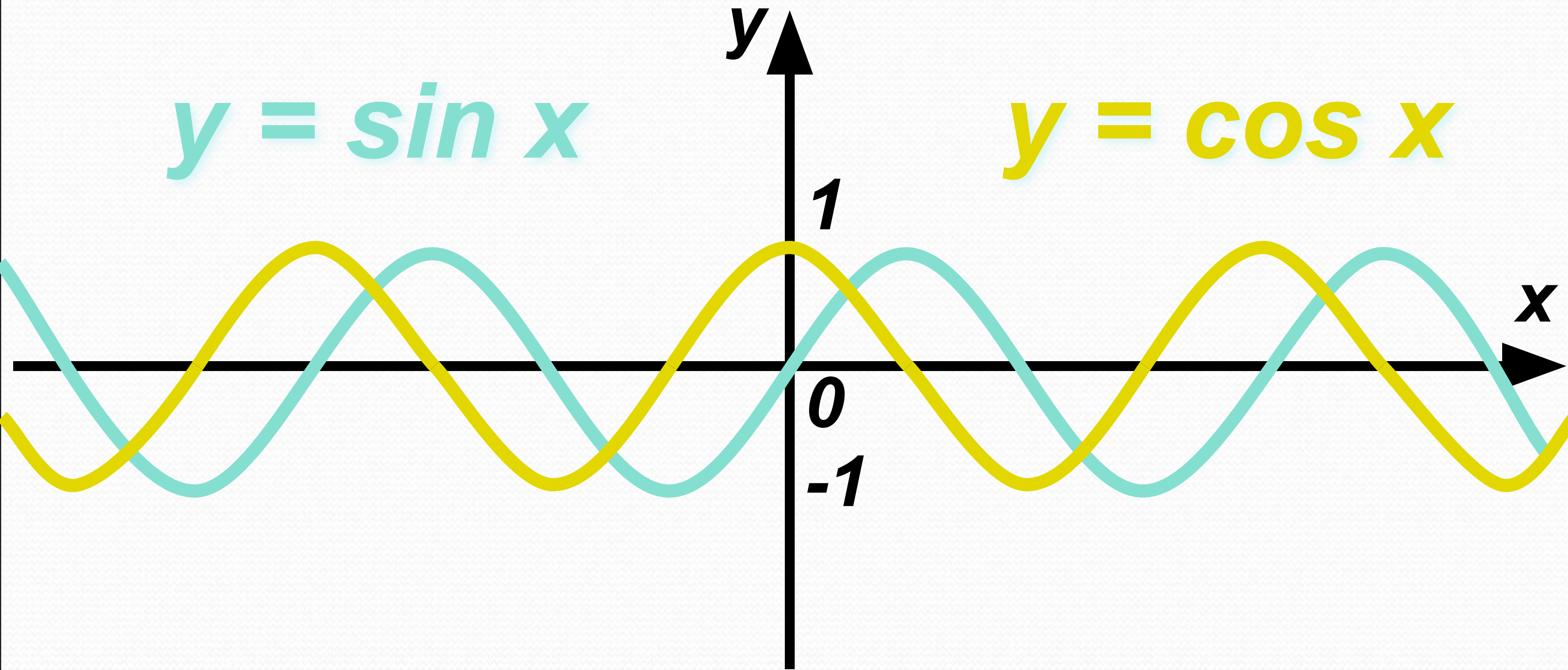
3° Функция **нечетная.**

4° $x \neq 0$, $y \neq 0$.

5° Если $k > 0$, то функция **убывает** при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция **возрастает** при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Тригонометрические функции y = sin x и y = cos x



Свойства функции
$y = \sin x$

1° $D(y)=(-\infty; +\infty)$.

2° $E(y)=[-1; 1]$.

3° Функция нечетная.

4° Если $x = 0$, то $y = 0$.

5° Функция возрастает при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$.

Функция убывает при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$.

6° $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$ $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Свойства функции $y = \cos x$

1º $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$.

2º $E(y)=[-1;\ 1]$.

3º Функция четная.

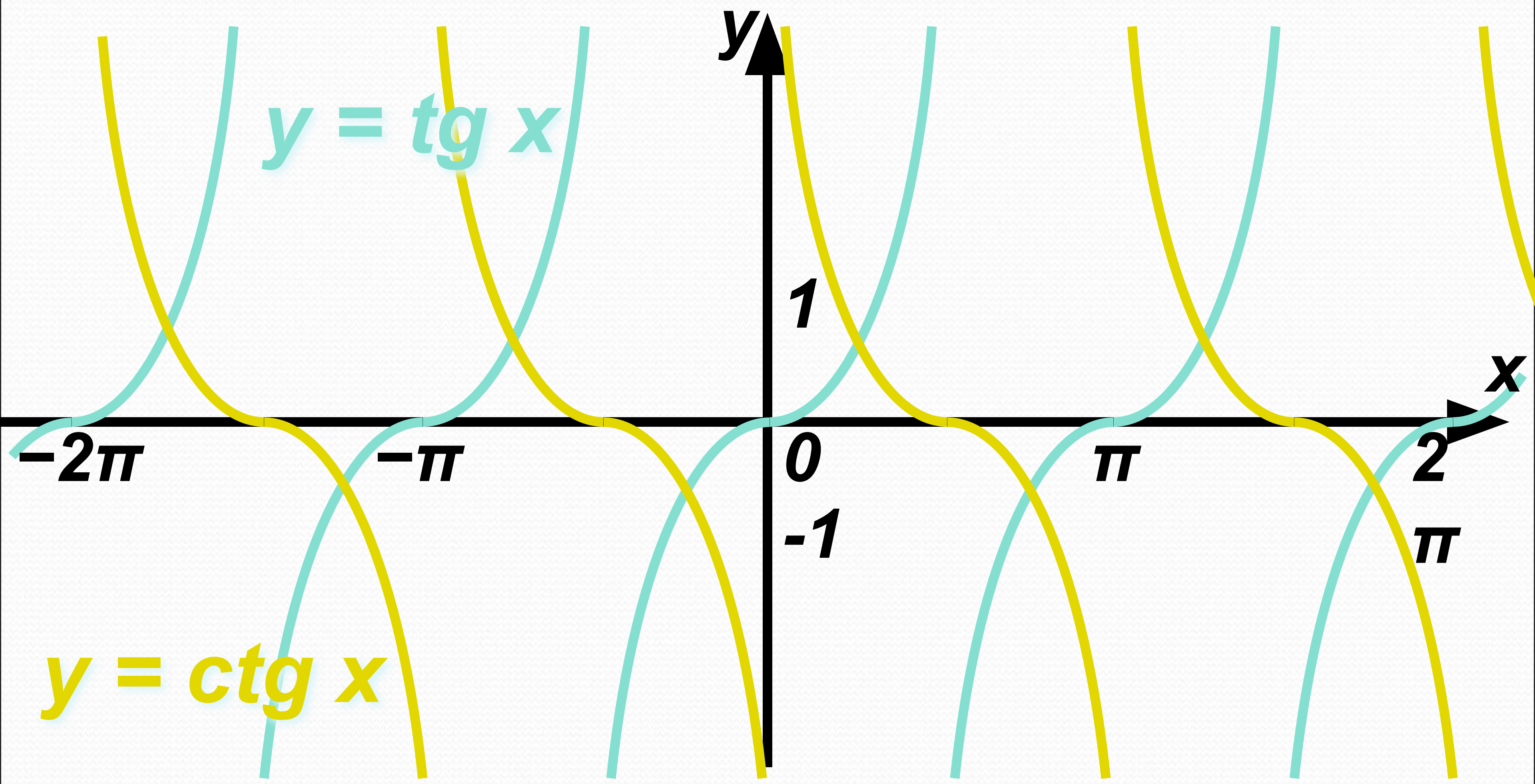
4º Если $x = 0$, то $y = 1$.

5º Функция возрастает при $x \in [-\pi+2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$.

Функция убывает при $x \in [2\pi n;\ П+2\pi n]$, где $n \in Z$.

6º $x_{max} = 2\pi n$; $x_{min} = \pi+2\pi n$, где $n \in Z$.

Тригонометрические функции $y = tg\ x$ и $y = ctg\ x$



Свойства функции $y = tg\, x$

1^o $D(y)= \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, где $n \in Z$.

2^o $E(y)=(-\infty; +\infty)$.

3^o Функция нечетная.

4^o Если $x = 0$, то $y = 0$.

5^o Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$,

где $n \in Z$.

6^o Экстремумов нет.

Свойства функции
$y = ctg\ x$

1º $D(y)=(\pi n;\ \pi+\pi n)$, где n□Z

2º $E(y)=(-\infty;\ +\infty)$.

3º Функция нечетная.

4º $x \neq 0$; $y = 0$ если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n□Z.

5º Функция убывает при x□$(\pi n;\ \pi+\pi n)$, где n□Z.

6º Экстремумов нет.

Преобразование графиков

- ***Параллельный перенос на вектор (0;b) вдоль оси ординат.***

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$$

- Для построения графика функции f(x)+b, где b – постоянное число, надо перенести график f на вектор (0;b) вдоль оси ординат.

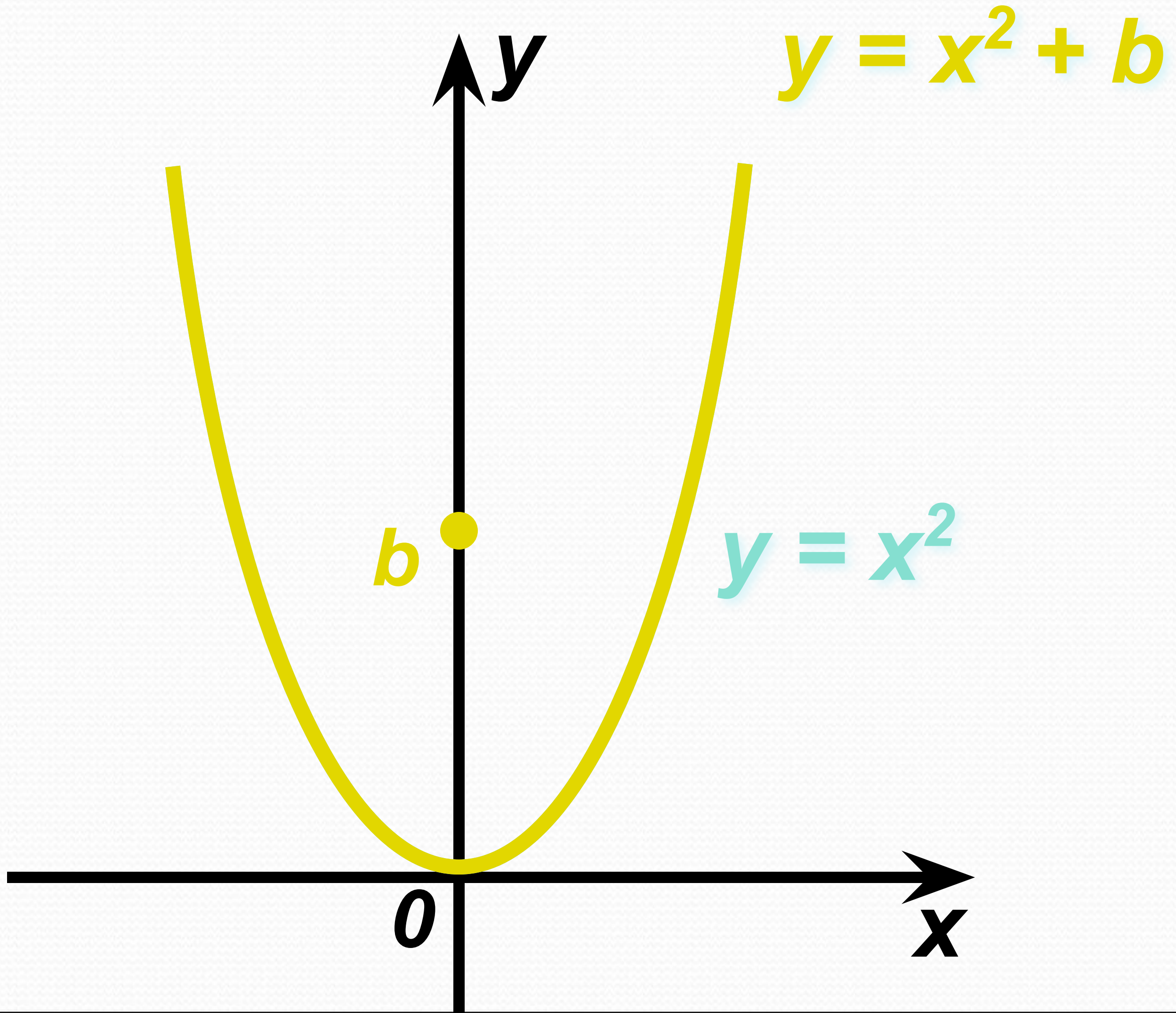
Преобразование вида y = f(x)+b

— Это параллельный перенос графика функции y = f(x) на **b** единиц **вдоль оси ординат**

Если b > 0, то происходит ***смещение***

Если b < 0, то происходит ***смещение***

Преобразование вида $y = f(x)+b$



- ***Растяжение вдоль оси Оу с коэффициентом k***

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

- Для построения графика функции y=kf(x) надо растянуть график функции y=f(x) в k раз вдоль оси ординат.

- **Замечание.** Если $0<|k|<1$, то растяжение с коэффициентом k часто называют ***сжатием***.

Преобразование вида $y = kf(x)$

— Это растяжение (сжатие) в k раз графика функции $y = f(x)$ **вдоль оси ординат**

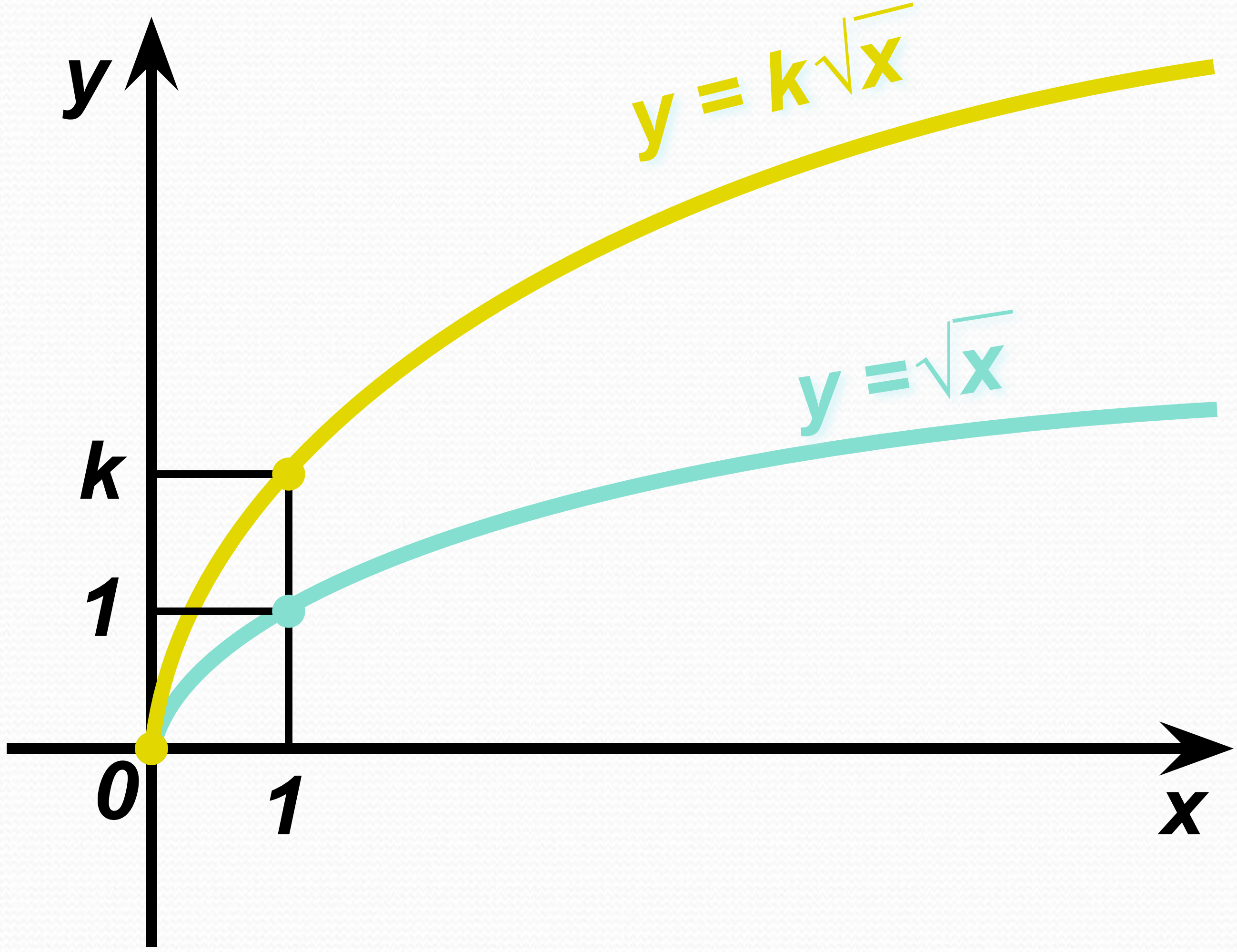
Если , $|k| > 1$, то происходит

Растяжение

Если , $|k| < 1$, то происходит

Сжатие

Преобразование вида *y* = *kf*(*x*)



- ***Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор (а;о)***

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$$

- График функции y=f(x-a) получается из графика f переносом (вдоль оси абсцисс) на вектор (а;о).
- Если а>о, то вектор (а;о) направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при а<о – в отрицательном.

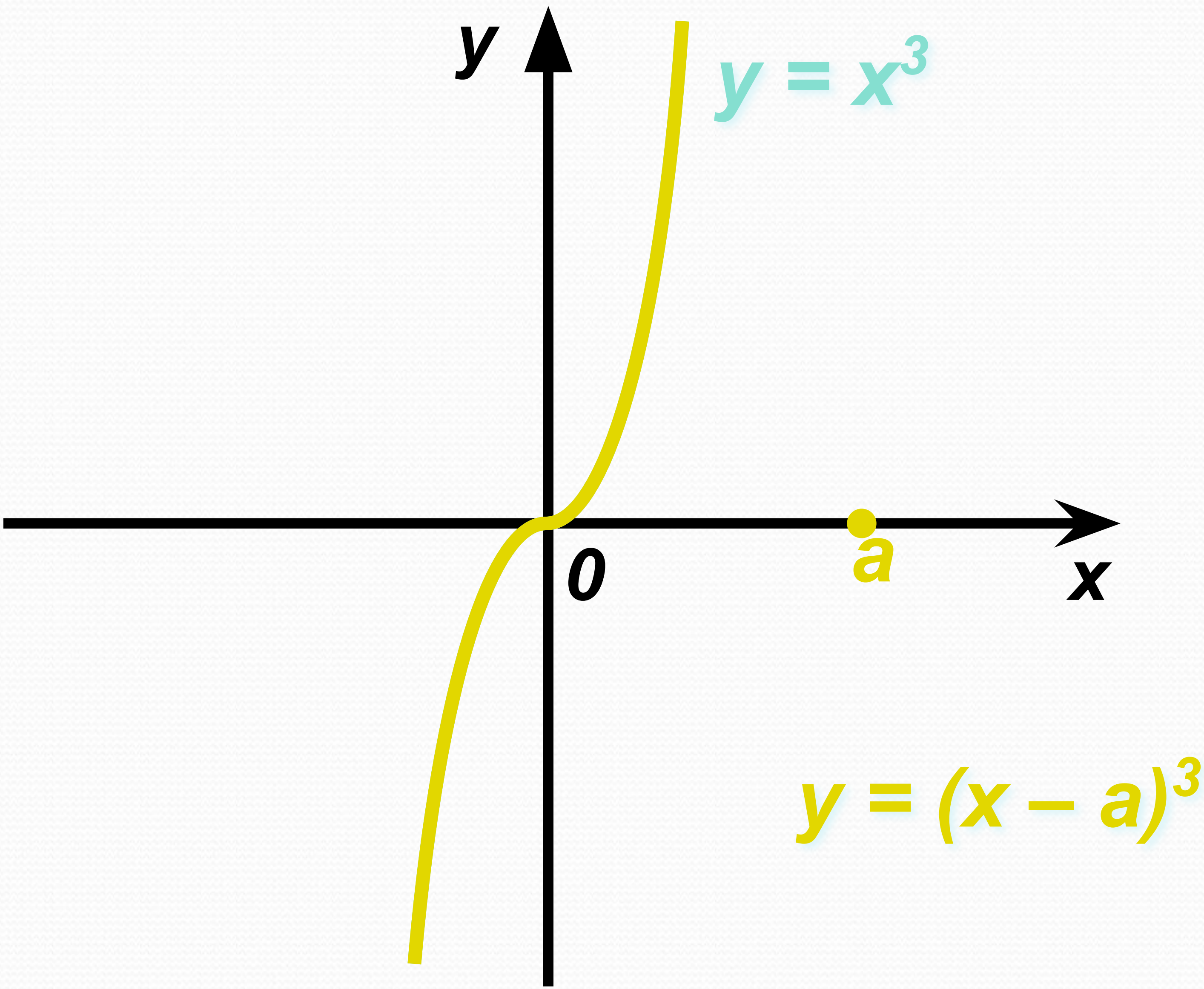
Преобразование вида $y = f(x - a)$

— Это параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ на **а** единиц **вдоль оси абсцисс**

Если $a > 0$, то происходит **смещение** →

Если $a < 0$, то происходит **смещение** ←

Преобразование вида y = f(x – a)



- ***Растяжение вдоль оси Ох с коэффициентом k***

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$$

- Для построения графика функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$

надо подвергнуть график функции f растяжению с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Преобразование вида y = f(mx)

— *Это растяжение (сжатие) в **m** раз графика функции y = f(x) вдоль оси абсцисс*

Если , |m|> 1, то происходит

Сжатие

Если , |m|< 1, то происходит

Растяжение

Преобразование вида y = f(mx)