КОМБИНАТОРИКА

Размещения, перестановки, сочетания

:

Цели урока:

:

- Узнать, что изучает комбинаторика
- Узнать ,как возникла комбинаторика
- Изучить формулы комбинаторики и научиться применять их при решении задач

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Блеза Паскаля и Пьера Ферма по теории азартных игр.

Блез Паскаль

Пьер Ферма

Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Г.В. Лейбниц

Я. Бернулли

Л. Эйлер.

Лемма.

Пусть в множестве A m элементов, а в множестве B — n элементов. Тогда число всех различных пар (a,b), где a\in A,b\in B будет равно mn.

Доказательство.

Действительно, с одним элементом из множества A мы можем составить n таких различных пар, а всего в множестве A m элементов.

Размещения, перестановки, сочетания

Пусть у нас есть множество из трех элементов a,b,c.

Какими способами мы можем выбрать из этих элементов два?

ab,ac,bc,ba,ca,cb.

Перестановки

Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно

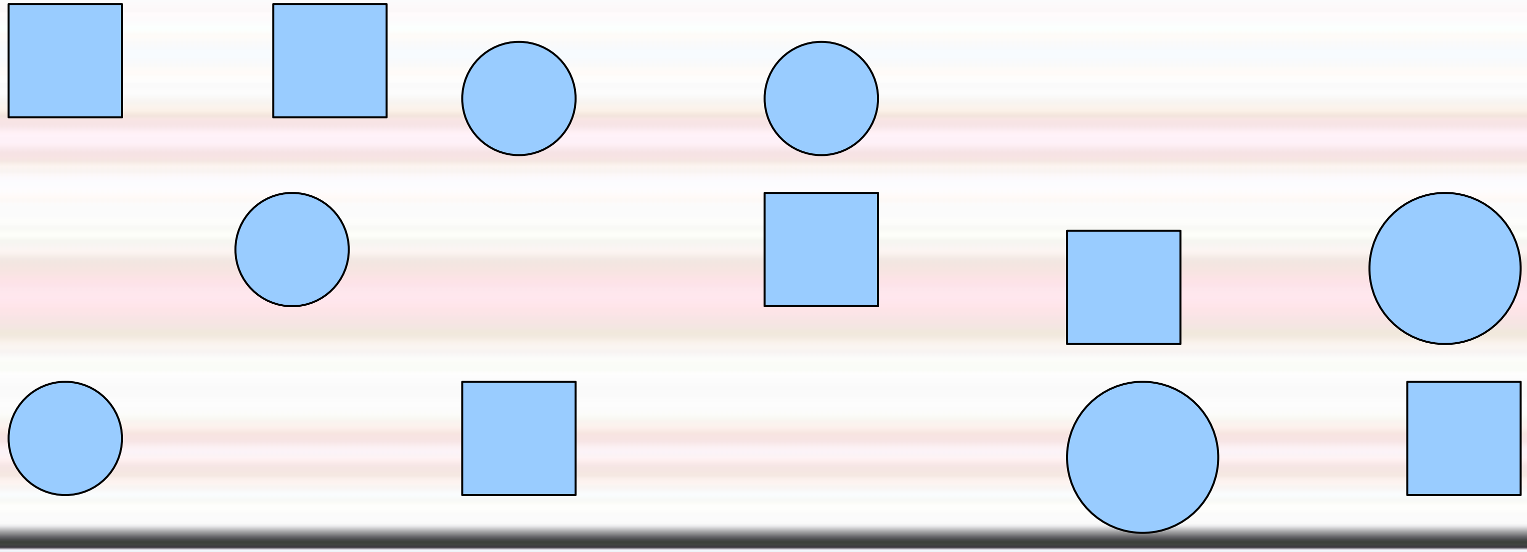
$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению, считают, что

$0!=1$

$1!=1$

Пример всех перестановок из $n=3$ объектов (различных фигур) – на картинке . Согласно формуле, их должно быть ровно $P3=3!=1\cdot2\cdot3=6$, так и получается.



С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растет и изображать их наглядно становится затруднительно.

Например, число перестановок из 10 предметов - уже 3628800

(больше 3 миллионов!).

Размещения

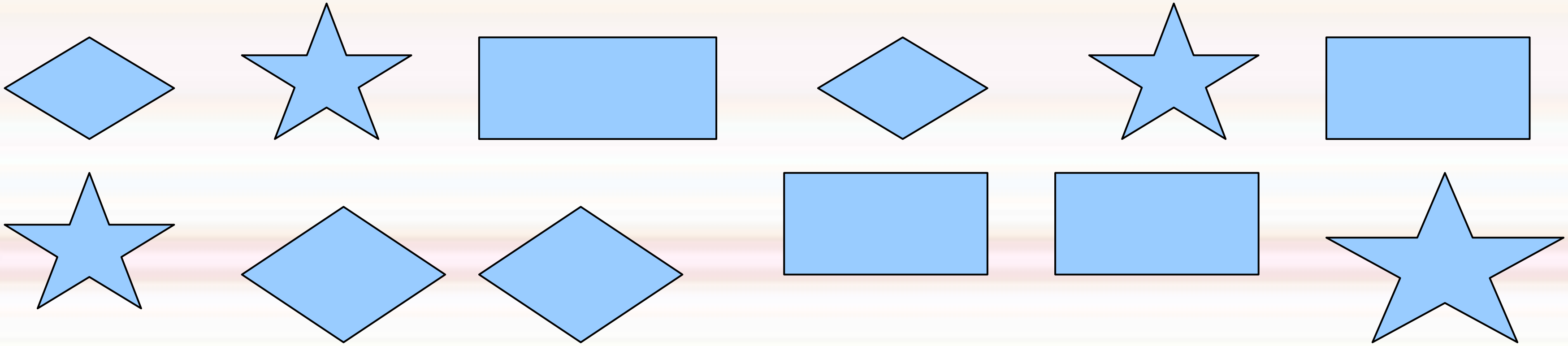
Пусть имеется n различных объектов.

Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются размещениями из n объектов по m, а их число равно

$A^n m = n!(n-m)! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$

Определение.

Размещениями множества из *n* различных элементов по *m* элементов ($m \leq n$) называются комбинации, которые составлены из данных *n* элементов по *m* элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.



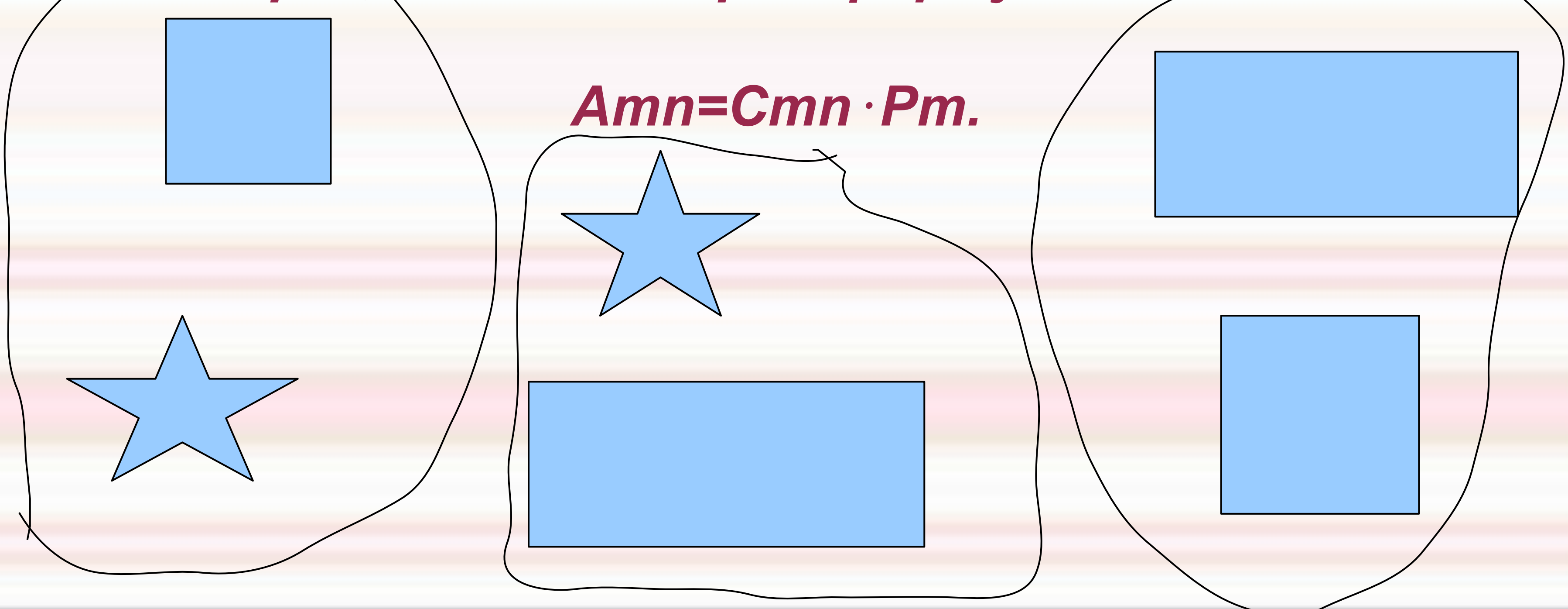
Сочетания

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов всевозможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются сочетаниями из n объектов по m, а их число равно

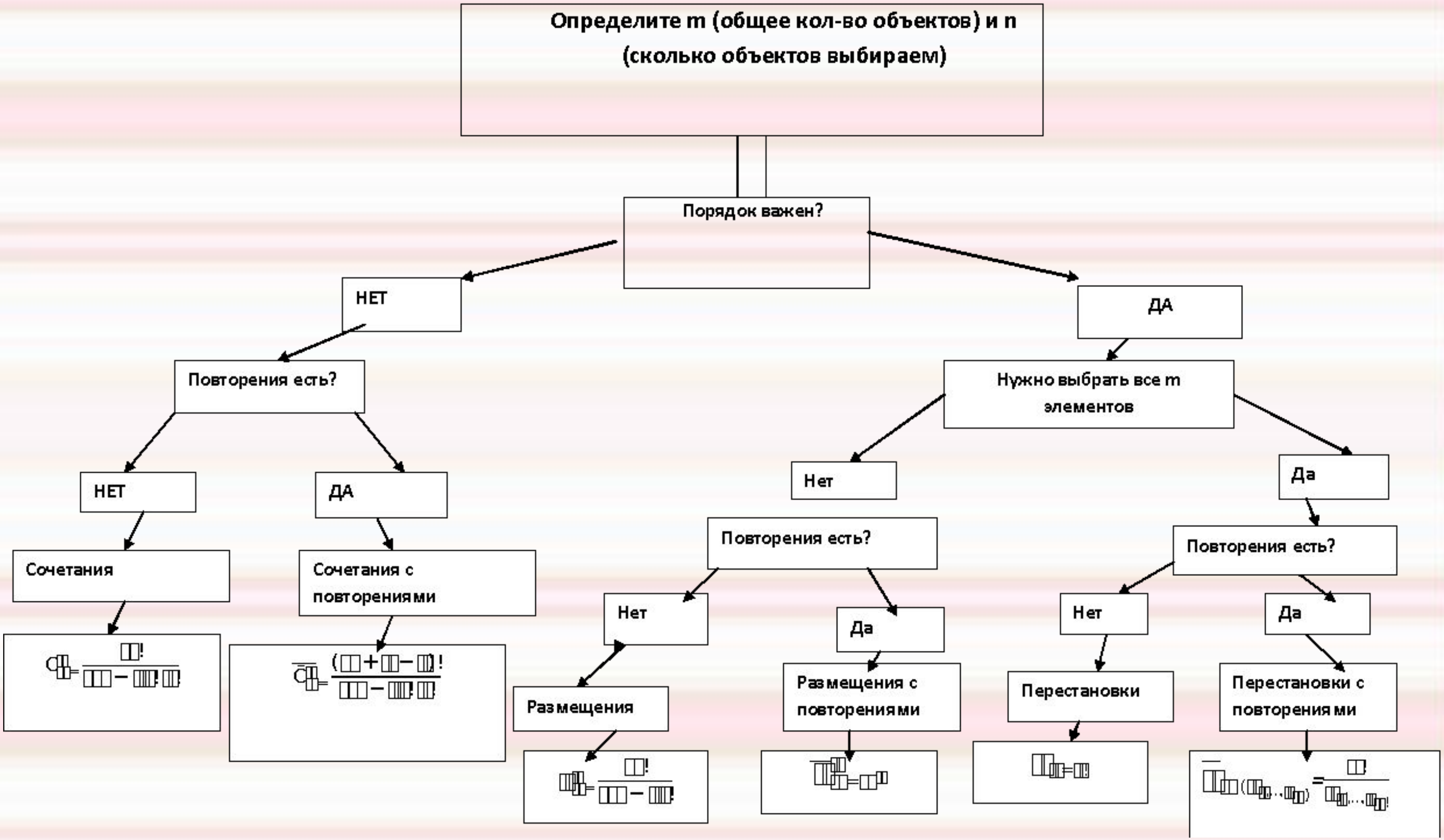
$$Cmn=n!(n-m)!\cdot m!$$

Пример всех сочетаний из $n=3$объектов (различных фигур) по $m=2$- на картинке снизу. Согласно формуле, их должно быть ровно $C_3^2=3!(3-2)!\cdot 2!:3!=3$. Ясно, что сочетаний всегда меньше чем размещений (так как при размещениях порядок важен, а для сочетаний - нет), причем именно в $m!$ раз, то есть верна формула связи:

$$A_n^m=C_n^m\cdot P_m.$$



Выбор формулы комбинаторики



ЗАДАНИЕ. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

РЕШЕНИЕ.

Способ 1. В одной игре участвуют 2 человека, следовательно, нужно вычислить, сколькими способами можно отобрать 2-х человек из 15, причем порядок в таких парах не важен. Воспользуемся формулой для нахождения числа сочетаний (выборок, отличающихся только составом) из n различных элементов по m элементов

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, при $n=2$, $m=13$.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{(15-2)!\,2!} = \frac{15!}{(13!)!2!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

Способ 2. Первый игрок сыграл 14 партий (с2-м, 3-м, 4-м, и так до 15-го), 2- ой игрок сыграл 13 партий (3-м, 4-м, и т.д. до 15-го, исключаем то, что с первым партия уже была), 3-ий игрок – 12 партий, 4-ый – 11 партий, 5 – 10 партий, 6 – 9 партий, 7 – 8 партий, 8 – 7 партий,

9 – 6

10 – 5

11 – 4

12 – 3

13 – 2

14 – 1,

а 15-ый уже играл со всеми.

Итого: 14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=105 партий

ОТВЕТ. 105 партий.

Выполнили ученики 11 класса
Паршиков Константин и Гришин Максим
Учитель математики Аксенова Светлана Валерьевна
Бугровская СОШ Всеволожского района Ленинградской области