

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Преподаватель КГБ ПОУ ХТТБПТ Яганина
Ольга Александровна
дисциплина «Математика» (2 курс)

Содержание

- Основные понятия
- Метод Крамера
- Решение системы методом Крамера
- Метод Гаусса
- Решение системы методом Гаусса
- Матричный метод (с помощью обратной матрицы)
- Решение системы матричным методом
- В помощь студентам

Основные понятия

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 – неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$),

b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется несовместной.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют определенной; если решений больше одного, то – неопределенной.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю, то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Метод Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а
определители получаются из определителя системы Δ посредством
замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего
столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 0 - 9 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 13.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$


3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1.$$

Метод Гаусса

Ранее рассмотренный метод можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1 . Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2 . Для этого третье уравнение разделим на a'_{32} , умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3 , затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го — x_1 .

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

Решение:

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1 . Для этого второе уравнение умножим на $\frac{-2}{a_{21}}$, а затем сложим с 1-ым уравнением.

аналогично третье уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{31}} = -2$, а затем сложим с первым.

результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2 . Для этого третье уравнение умножим на $-\frac{a'_{22}}{a_{32}} = -\frac{7}{2}$, и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 8\frac{2}{3}x_3 = -8\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. На этом прямой ход метода Гаусса закончен, начинаем обратный ход.

Из последнего уравнения полученной системы уравнений находим x_3 :

$$x_3 = \frac{-8\frac{2}{3}}{8\frac{2}{3}} = -1.$$

Из второго уравнения получаем:

$$x_2 = \frac{1}{7}(3 + 3x_3) = \frac{1}{7}(3 + 3 \cdot (-1)) = 0.$$

Из первого уравнения находим оставшуюся неизвестную переменную и этим завершаем обратный ход метода Гаусса:

$$x_1 = \frac{1}{2}(9 - 3x_2 + x_3) = \frac{1}{2}(9 - 3 \cdot 0 + (-1)) = 4.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1$.

Решите систему матричным методом: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

Решение:

1. Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13,$$

Так как

то систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить матричным методом. С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено как:

$$X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

2. Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Осталось вычислить матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ -\frac{2}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1$