"Прогрессии"

9 класс

- Числовая последовательность.
- Арифметическая прогрессия.
- Геометрическая прогрессия.

Содержание :

Числовая последовательность

В повседневной практике часто используется нумерация различных предметов, чтобы указать порядок их расположения. Например, в сберегательном банке по номеру лицевого счета вкладчика можно легко найти этот счет и посмотреть, какой вклад на нем лежит. Пусть на счете № 1 лежит вклад a_1 рублей, на счете № 2 лежит вклад a_2 рублей и т. д. Получается *числовая последовательность*

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_N$$

где N — число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_N

В математике изучаются ***бесконечные*** числовые последовательности :

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$$

Число a_1 называют ***первым членом*** последовательности, число a_2 — ***вторым членом*** последовательности, число a_3 — ***третьим членом*** последовательности и т. д.

Число a_N называют ***n-м*** *(энным) членом* последовательности, а натуральное число n — его *номером*.

Числовая последовательность задана формулой $a_{n} = n(n - 2)$. Вычислить сотый член этой последовательности.

Решение:

$$a_{100} = 100(100 - 2) = 9800.$$

Ответ: 9800.

Задача 1.

Числовая последовательность задана формулой $x_n = 2n + 3$. Найти номер члена последовательности, равного: 1) 43; 2) 50.

Решение:

1) По условию 2n + 3 = 43, откуда n = 20.

2) 2n + 3 = 50, откуда n = 23,5. Так как искомый номер — натуральное число, то в данной последовательности нет члена, равного 50.

Ответ:1)20 ; 2)50.

Задача 2.

Арифметическая прогрессия.

Числовая последовательность

a_1, a_2, a_3, …, a_n, ….

называется ***арифметической прогрессией***, если для всех натуральных n выполняется равенство

$a_{n+1} = a_n + d$,

где d – некоторое число.

Из этой формулы следует, что $a_{n+1} - a_n = d$. Число **d** называют ***разностью арифметической прогрессии.***

1) Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ..., *n*, ... является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 1$.

2) Последовательность целых отрицательных чисел -1, -2, -3, ..., -*n*, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d = -1$.

3) Последовательность 3, 3, ..., 3, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d = 0$.

Примеры

каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «арифметическая» прогрессия.

Ита

к,

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (1)$$

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

Найти сотый член арифметической прогрессии, если первый её член равен -6 и $d = 4$.

► По формуле (1) имеем $a_{100} = -6 + (100-1) * 4 = 390$.

Задача 1.

Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ... Найти номер этого члена.

► Пусть n — искомый номер. Так как

$a_1 = 3$ и $d = 2$, то по формуле (1) имеем

$99 = 3 + (n - 1)\ 2.$

Поэтому **99** = 3 + 2n - 2; **98** = 2n, n = **49.**

Ответ : n = **49.**

Задача 2.

В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найти формулу n-го члена.

► Используя формулу (1), находим:

$a_8 = a_1 + 4d$, $a_{12} = a_1 + 11d$.

Подставив данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

Задача 3.

$$\begin{cases} a1+7d=130 \\ a1+11d=166 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$4d = 36$, $d = 9$. Следовательно,

$a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$a_n = 67 + 9 (n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n$.

Ответ : $a_n = 9n + 58$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \qquad (2)$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Найти сумму 38 + 35 + 32 + ... + (-7), если известно, что ее слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

► По условию $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$.

Применяя формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$, получаем

$-7 = 38 + (n - 1)(-3)$, откуда $n = 16$.

По формуле (2) находим: $S_{16} = 248$.

Задача

Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... называется ***геометрической прогрессией,*** если для всех натуральных n выполняется равенство $\mathbf{b_{n+1}=b_nq}$,

где $b_n \neq 0$, q — некоторое число, не равное нулю.

- Из этой формулы следует, что

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

- Число **q** называется ***знаменателем*** геометрической прогрессии.

Если все члены прогрессии положительны, то

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}}$$

т. е. каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «геометрическая» прогрессия.

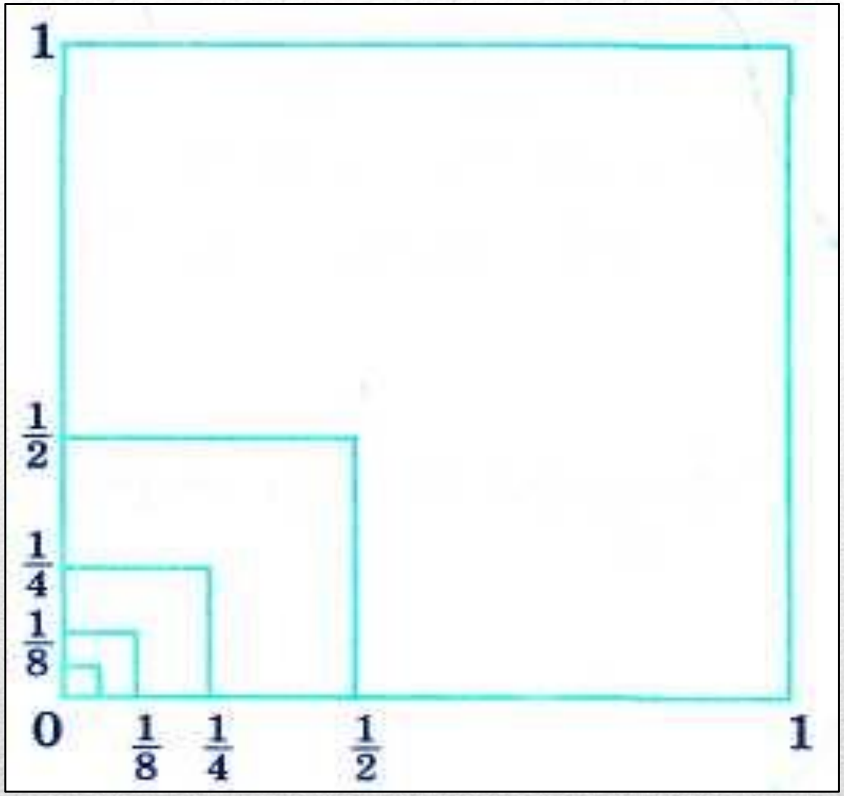
$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула n-го члена геометрической прогрессии.

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии (со знаменателем q≠1)

Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если модуль ее знаменателя меньше единицы.



Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому стремится сумма ее первых n членов при $n \to \infty$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Спасибо за внимание!