

**Тема: «Применение производной
для
нахождения наибольших и
наименьших значений величин»**

Предметные результаты изучения темы:

В результате изучения темы обучающийся должен знать:

- алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции;
- как называется область науки, занимающейся решением задач на оптимизацию;
- как составить математическую модель простейшей задачи на оптимизацию;
- несколько методов решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

обучающийся должен уметь:

- **применять алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в решении задач;**
- **составлять математическую модель для решения задач на оптимизацию;**
- **применять различные методы в решении задач на оптимизацию;**
- **сотрудничать в групповой работе, оценивать результаты своей деятельности.**

владеть:

- **различными методами решения задач на оптимизацию,**

История возникновения производной функции

*«Кто хочет ограничиться
настоящим
без знания прошлого,
тот никогда его не поймет»*

*Лейбниц Готфрид
Фридрих*

История возникновения производной функции

Раздел математики который изучает производные функции и их применения, называется дифференциальным исчислением.

Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности **Архимедом**, разработавшим способ проведения касательной.

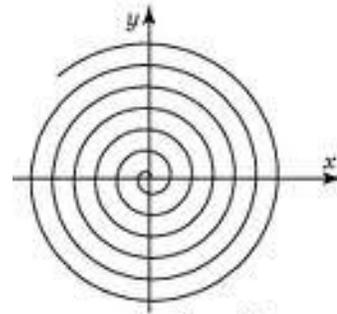


Рис. 14

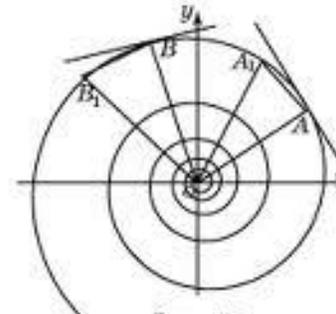


Рис. 15

Архимед построил касательную к спирали, носящей его имя.

Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.) – великий ученый. Первооткрыватель многих фактов и методов математики и механики, блестящий инженер.

Понятие Производная возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь следующих двух : определение скорости прямолинейного движения и построения касательной к прямой. Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат, которым мы и пользуемся в настоящее время.

История возникновения производной

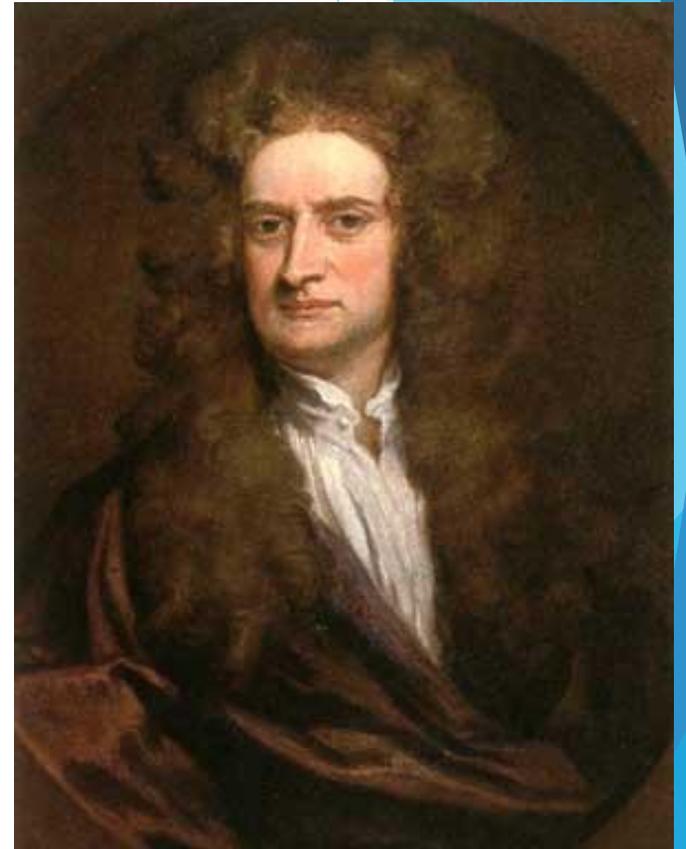
Английский учёный Исаак Ньютон доказал, что путь и скорость связаны между собой формулой:

$$V(t) = S'(t)$$

Т.е. скорость точки есть производная от пути по времени.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t . (физический смысл)

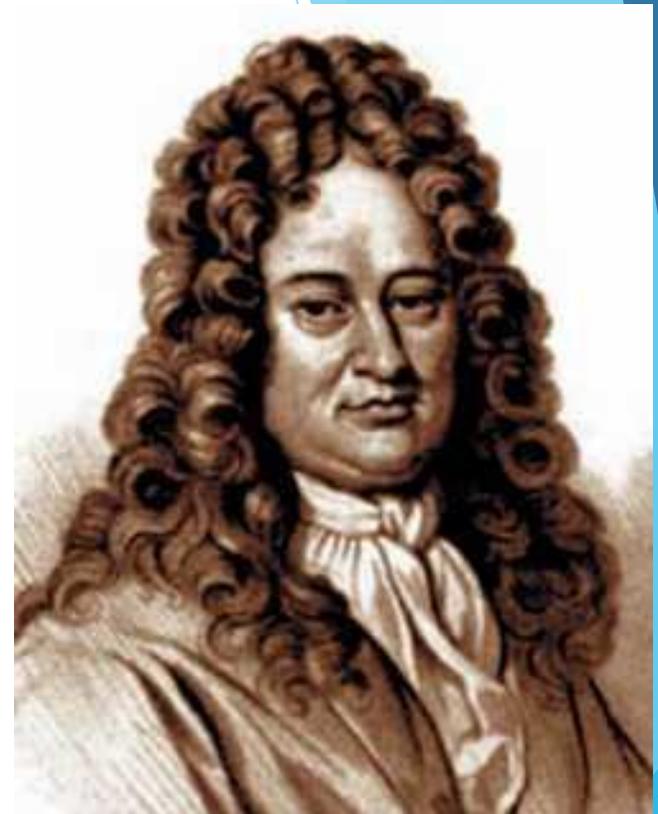
Функцию он назвал флюэнтой, т.е. текущей величиной. Производную – флюксией.



Лейбниц, решая задачу проведения касательной к произвольной кривой, сформулировал геометрический смысл производной, т. е. что значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной

или tg угла наклона касательной с положительным направлением оси OX .

Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц в 1684 году опубликовал первую статью по дифференциальному исчислению, в которой были изложены основные правила дифференцирования.



Готфрид Фридрих Лейбниц-
немецкий учёный.



1736 - 1813

Термин «производная впервые встречается у француза Луи Арбогаста и является буквальным переводом на русский французского слова *derivee*. Этим термином стал пользоваться Лагранж который ввёл в 1797 г. современные обозначения y' , f' .

**Жозеф Луи Лангранж -
выдающийся французский
математик.**

Исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, получило название дифференциального исчисления. С его помощью был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии. В частности, используя методы дифференциального исчисления, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVIII в. С помощью тех же методов математики изучали в XVII и XVIII вв. различные кривые, нашли кривую, по которой быстрее всего падает материальная точка, научились находить кривизну линий. Большую роль в развитии дифференциального исчисления сыграл Л. Эйлер, написавший учебник Дифференциальное исчисление.

Четыре обозначения для производной:

y' Лагранжа (читается «игрек штрих»)

$\frac{dy}{dx}$ Лейбница (читается «дэ игрек по дэ икс»)

\dot{y} Ньютона (читается «игрек с точкой»)

Dy Коши (читается «дэ игрек»)

Применение производной в географии

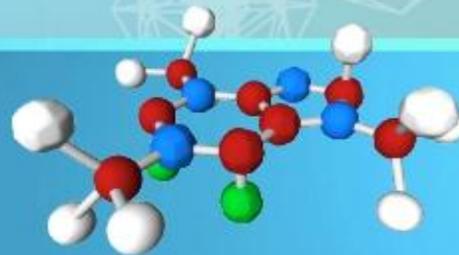
Производная помогает рассчитать:

- Некоторые значения в сейсмографии
- Особенности электромагнитного поля земли
- Радиоактивность ядерно- геофизических показателей
- Многие значения в экономической географии
- Вывести формулу для вычисления численности населения на территории в момент времени t .



Как используют производную в химии?

Производную в химии используют для определения очень важной вещи – скорости химической реакции, одного из решающих факторов, который нужно учитывать во многих областях научно-производственной деятельности



Применение производной в экономике

Производная решает важные вопросы

- * В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении таможенных пошлин?
- * Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию?

Для решения этих вопросов нужно построить функции связи входящих переменных, которые затем изучаются методами дифференциального исчисления.

Также с помощью экстремума функции в экономике можно найти наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск и минимальные издержки.

Зачем нужны задачи на оптимизацию?

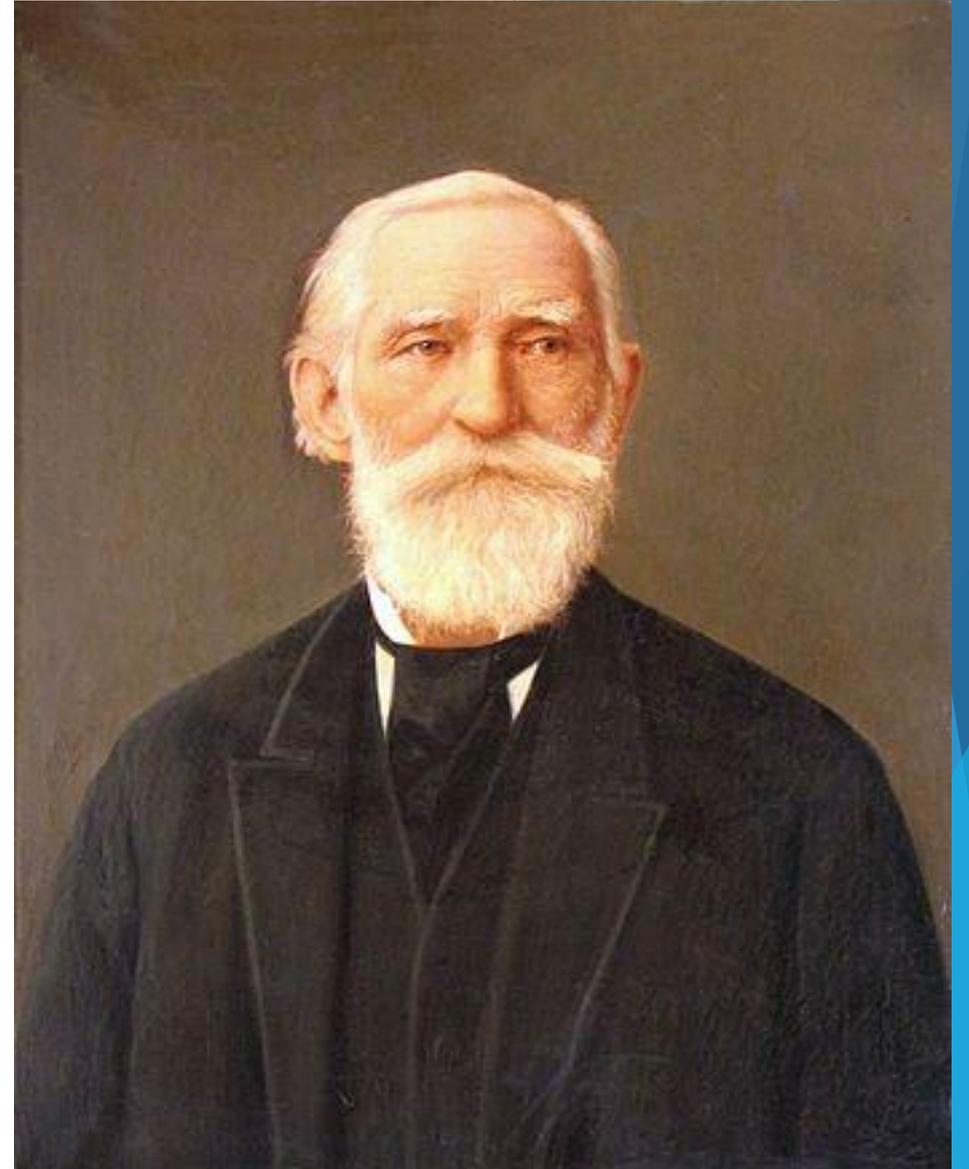
Российский математик XIX в. Панфутий Львович Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды».

С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей:

Инженеры технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции;

Конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;

Экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными.



Как решать задачи на оптимизацию?



Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования:

- 1) составление математической модели;
- 2) работа с математической моделью;
- 3) ответ на вопрос задачи.

Первый этап. Составление математической модели.

- 1) Проанализировав условия задачи, выделите **оптимизируемую величину (О.В.)**, т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y .
- 2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить **О.В.**, примите ее за **независимую переменную (Н.П.)** и обозначьте ее буквой x . Установите реальные границы изменения **Н.П.**, т. е. область определения для искомой **О.В.**
- 3) Исходя из условий задачи, выразите y через x . Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X , которую нашли на втором шаге.

Второй этап. Работа с математической моделью.

На втором этапе для функции $y=f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим.}}$ или $y_{\text{наиб.}}$ в зависимости от того, что требуется найти в условии задачи.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Теоремы, данные в учебнике:

- 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значений.**
- 2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка так и внутри него.**
- 3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.**

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$

- 1) Найти производную функции;
- 2) Найти стационарные и критические точки, лежащие внутри отрезка $[a,b]$;
- 3) Вычислить значение функции $y=f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, в точках a и b , выбрать среди них наибольшее и наименьшее значение функции.

Спасибо за внимание!

