Понятие о пределе последовательности

Нам нужно ответить на вопросы:

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Какие способы задания числовой последовательности вы знаете? (Приведите примеры)
3. Дайте определение ограниченной сверху и снизу числовой последовательности. (Приведите примеры)
4. Какую последовательность называют возрастающей и убывающей? (Приведите примеры)

Последовательности составляют такие элементы природы, которые можно пронумеровать!

Дни недели

Дома на улице

Список учащихся

Названия месяцев

Номер счёта в банке

Обозначают члены последовательности так

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots\ a_n$$

1, 2, 3, 4, … , n - порядковый номер члена последовательности.

(a_n)- последовательность, a_n – n-ый член последовательности

a_{n-1} – предыдущий член последовательности

a_{n+1} – последующий член последовательности

Занумерованный ряд чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ называется числовой последовательностью

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1, 2, 3, 4, 5,… - последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10,… - последовательность четных чисел;

1, 3, 5, 7, 9, … - последовательность нечетных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … - последовательность квадратов натуральных чисел;

2, 3, 5, 7, 11, … - последовательность простых чисел;

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ **- последовательность чисел, обратных натуральным.**

Способы задания последовательностей

АНАЛИТИЧЕСКИЙ

С помощью <u>формулы</u> n-ого члена – позволяет вычислить член последовательности с любым заданным номером

$$X_n = 3n + 2$$

$$X_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

$$X_{45} = 3 \cdot 45 + 2 = 137$$

СЛОВЕСНЫЙ

С помощью описания

<u>Например:</u> Записать последовательность, все члены которой с нечётными номерами равны -10, а с чётными номерами равны 10.

-10; 10; -10; 10; -10; 10; …

РЕККУРЕНТНЫЙ

<u>от слова recursio - возвращаться</u>

$$x_1 = 1;\ \ x_{n+1} = (n+1)x_n$$

$$n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$$

$$x_2 = (1+1)x_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_3 = (2+1)x_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$x_4 = (3+1)x_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$x_5 = (4+1)x_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

$$x_6 = (5+1)x_5 = 6 \cdot 120 = 720$$

Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13; …

В порядке возрастания положительные нечетные числа

10; 19; 37; 73; 145; …

В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

6; 8; 16; 18; 36; …

В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

Увеличение на 3 раза

Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; …

5; 10; 15; 20; 25; …

Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

Последовательность задана формулой:

$$a_n = n^4$$

Впишите пропущенные члены последовательности:

1; $\underline{16}$; 81; $\underline{256}$; 625; …

Последовательность задана формулой:

$$a_n = n + 4$$

Впишите пропущенные члены последовательности:

5; __6__; __7__; __8__; 9; …

Последовательность задана формулой:

$$a_n = 2^n - 5$$

Впишите пропущенные члены последовательности:

$\underline{-3}$; $\underline{-1}$; 3; 11; $\underline{27}$; …

Последовательность задана формулой:

$$a_n = 3^n - 1$$

Впишите пропущенные члены последовательности:

$2;\ 8;\ \underline{26\ \ };\ \underline{80\ \ };\ \underline{242};\ \ldots$

Дано: (a_n)

$a_n = (-1)^n n^2$

Найти: a_4 , a_6 , a_9

Решение:

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4^2 = 1 \cdot 16 = 16$

$a_6 = (-1)^6 \cdot 6^2 = 1 \cdot 36 = 36$

$a_9 = (-1)^9 \cdot 9^2 = -1 \cdot 81 = -81$

Свойства числовой последовательности

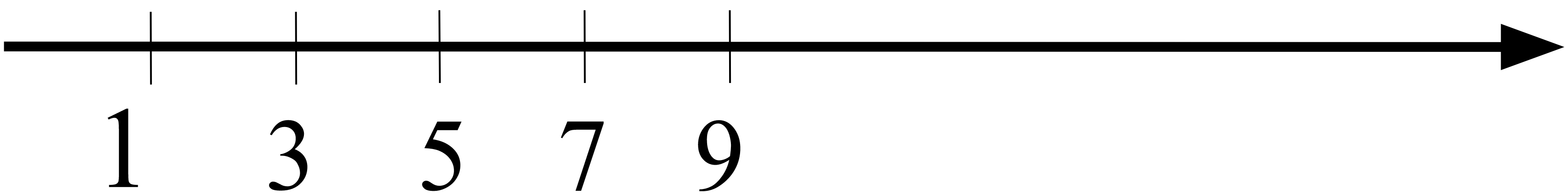
- Занумерованный ряд чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ называется **числовой последовательностью**

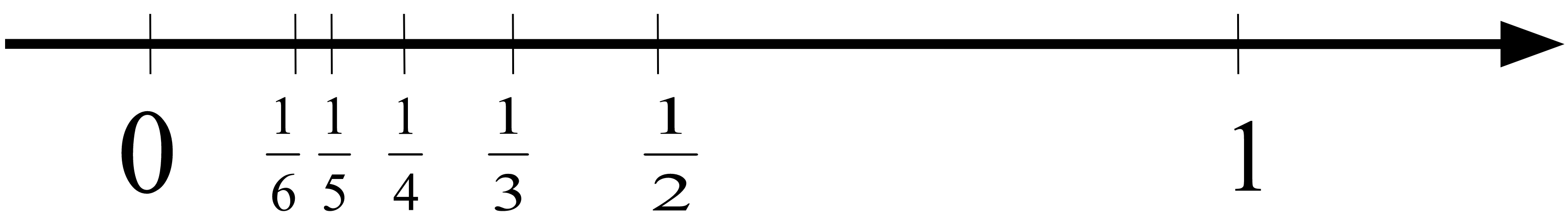
- Занумерованный ряд чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ называется **числовой последовательностью**

Рассмотрим две последовательности:

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots;$$

$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

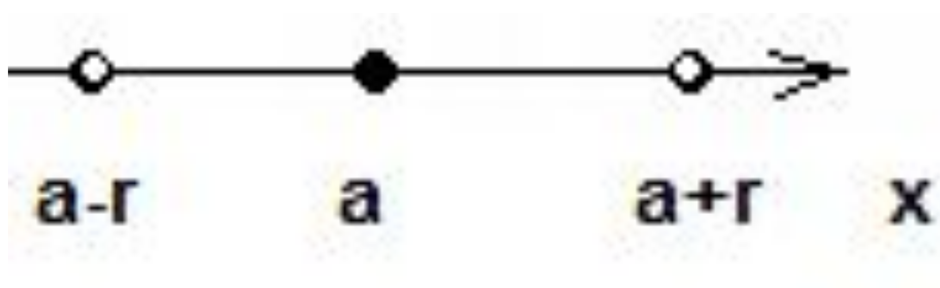




Определение 1

Пусть *a*–точка прямой, а *r* положительное число.

Интервал *(a-r, a+r)* называют *окрестностью точки a*, а число *r – радиусом окрестности*.



Укажите окрестность точки *a* радиуса *r* в виде интервала, если:

а) $a = 0$

$r = 0,1$

(-0,1; 0,1)

б) $a = -3$

$r = 0,5$

(-3,5; -2,5)

в) $a = 2$

$r = 1$

(1; 3)

г) $a = 0,2$

$r = 0,3$

(-0,1; 0,5)

Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал

а) (1; 3)

$a = 2$
$r = 1$

б) (-0,2; 0,2)

$a = 0$
$r = 0{,}2$

в) (2,1; 2,3)

$a = 2{,}2$
$r = 0{,}1$

г) (-7; -5)

$a = -6$
$r = 1$

Определение 2

Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут и читают:

$$y_n \to b \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Чему равен предел данной последовательности?

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Вывод: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} c = c$$

Вывод: $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0, \text{если} \, |q| < 1$

(теоремы) свойства:

1) **Предел суммы равен сумме пределов**

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

2) Предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \bullet \lim_{n\to\infty} y_n$$

3) Предел частного равен частному пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = k\lim_{n\to\infty} x_n$$