

# ЭКОНОМЕТРИКА - 3

**Лекция 3**

Основные понятия теории вероятности

# Базовые понятия теории вероятностей

- Опыт
- Событие
- Переменная величина

# Понятие опыт

**Определение.** Под опытом понимается воспроизведение некоторого комплекса условий. При этом предполагается, что опыт может быть повторен сколько угодно раз

**Пример 1.** Экономический объект – рынок подержанных автомобилей

Опыт – продажа конкретного автомобиля

Комплекс условий: наличие автомобилей, покупателей и сделок купли продажи

Данные условия можно повторить много раз

**Пример 2.** Бросание игрального кубика

Опыт- бросок

Комплекс условий- наличие кубика и игроков

**Пример 3.** Объект- элементарная макро модель Кейнса:

$$C = a_0 + a_1 Y + U$$

$$Y = C + I$$

Опыт- функционирование экономики

Комплекс условий- наличие инвесторов и потребителей

# Понятие события

**Определение.** Пусть имеется некоторый опыт Событие, связанное с этим опытом, называется любой его исход. При этом событие называется случайным, если оно может появиться или не появиться в данном опыте

**Обозначение:** D: (описание события)

**Пример 1.** Опыт-продажа подержанных автомобилей  
Случайное событие- продажа 3-х летнего автомобиля за 0.5 цены.

Это событие может появиться, а может и не появиться при повторении опыта.

**Пример 2.** Опыт-бросание игрального кубика  
События: A: (Выпадение четного числа)  
          B: (Выпадение шестерки)

# Вероятность появления события

Мерилом возможности появления события  $A$ : в данном опыте служит вероятность появления этого события в опыте

**Определение.** Пусть  $A$ - случайное событие, связанное с некоторым опытом Предположим, что опыт повторен  $n$  раз, в итоге событие  $A$  появилось в опытах  $n_a$  раз Тогда дробь  $n_a/n$  называется относительной частотой появления события  $A$  в опытах, а вероятность  $P(A)$  появления события  $A$  определяется как предел этой дроби при многократном повторении опыта:

$$Pr(A) \approx \lim \left( \frac{n_a}{n} \right) \Rightarrow \infty \quad (3.1)$$

# Свойства вероятности события

1. Вероятность события приблизительно равна относительной частоте появления события:  $P(A) \approx n_A/n$
2. Из определения следует, что область определения  $P(A)$  – интервал  $(0, 1)$

**Замечание.** Иногда вероятность случайного события можно определить априори не прибегая к испытаниям

Например, опыт с игральным кубиком, вероятность появления любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) одинакова и равна  $1/6$ .

# Достоверное и невозможное события

**Определение.** Пусть  $R$  событие, связанное с некоторым опытом, которое всегда появляется при его повторении, т.е  $P(R) \equiv 1$ . Тогда событие  $R$  называется достоверным событием

**Определение.** Пусть  $I$  событие, связанное с некоторым опытом, которое никогда не появляется при его повторении, т.е  $P(I) \equiv 0$ . Тогда событие  $I$  называется невозможным событием

*Пример.*

Опыт - бросание игральной кости:

**выпадение** любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) – событие **достоверное**

выпадение числа 7 – событие невозможное

# Практически достоверное событие

**Определение.** Событие  $V$ , связанное с некоторым опытом, называется «практически достоверным», если вероятность его появления удовлетворяет условию:  $0.95 \leq P(V) \leq 1$

Любое случайное событие  $W$ , связанное с опытом, вероятность которого  $0 < P(W) \leq 0.05$ , называется «практически невозможным»

**Установлено**, что практически достоверное событие, как правило, появляется при первом проведении опыта

Если этого не происходит, значит нарушены условия опыта



# Условная вероятность

**Определение.** Пусть  $A$  и  $B$  два события, связанные с опытом, причем  $P(A) > 0$ . Проведено такое количество опытов  $N$ , при котором  $N_a > 0$  (количество появлений события  $A$ ). Пусть  $N_{ab}$  количество опытов, в которых событие  $B$  появилось вместе с событием  $A$ . Отношение  $N_{ab}/N_a$  называют относительной частотой появления события  $B$  при условии появления события  $A$ .

Условная вероятность появления события  $B$  есть:

$$P(B|A) = \lim \left( \frac{N_{AB}}{N_A} \right) \Rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Свойства:  $P(A|B) \approx N_{ab}/N_a$        $0 \leq P(A|B) \leq 1$

# Вероятность совместного события

Разделив числитель и знаменатель (3.2) на  $N$ , получим:

$$P(B|A) \approx \left( \frac{\frac{N_{AB}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \right) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow \infty \quad (3.3)$$

где  $P(AB)$  – вероятность появления одновременно событий  $A$  и  $B$  в  $N$  опытах

Пример с кубиком.  $A$ :(четное число),  $B$ :(число 6)

$P(A)=1/2$ ,  $P(B)=1/6$ . Тогда  $P(B|A)=(1/6)/(1/2)=1/3$

Событие  $B$  совпадает с событием  $AB$ , след.

$P(AB)=P(B)=1/6$ . Отметим,  $P(B) \neq P(B|A)$

$P(B) = P(B|A)$  – условие независимости событий

# Теорема умножения вероятностей

**Теорема.** Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  суть независимые события, то для них справедливо равенство:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

где:  $P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$  – вероятности появления каждого события

**Пример.** Бросание двух кубиков.

Событие  $A$ : (появление 6 на кубе 1)

Событие  $B$ : (появление 6 на кубе 2)

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/6$$

Вероятность появления двух чисел 6 одновременно:

$$P(AB) = P(A)P(B) = (1/6)(1/6) = 1/36$$

# Понятие переменная

**Определение.** Пусть задано множество значений  $A_x$   $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . Тогда величина  $X$  называется переменной, если она может принимать любые значения из множества  $A_x$ , а множество  $A_x$  называется областью допустимых значений или областью определения  $X$

Если  $A_x$  состоит из набора значений, которые можно пронумеровать (счетное множество), то  $X$  – дискретная переменная

Если  $A_x$  представляет собой отрезок или интервал на числовой оси, то такая переменная называется непрерывной

# Дискретная случайная переменная

**Определение.** Дискретная переменная  $X$  с множеством допустимых значений  $A_x$  называется случайной, если все ее возможные значения появляются в некотором опыте со случайными исходами  $A:(x=t)$  и если для нее задан закон распределения вероятностей

Первое свойство объединяет все случайные переменные

Второе свойство – обеспечивает индивидуальность каждой случайной переменной

# Закон распределения дискретной случайной переменной

**Определение.** Законом распределения дискретной случайной величины  $X$  называется функция  $P_x(t)$ , определенная на всей числовой оси, значения которой характеризуют вероятность появления в данном опыте события  $B:(x=t)$ , и определяется по правилу:

$$P_x(t) = \begin{cases} P(x=t) & \in A_x \\ 0 & \text{при } x \notin A_x \end{cases}$$

где:  $P(x=t)$  вероятность события  $B:(x=t)$

Закон распределения ДСП называют **вероятностной функцией**

# Классические примеры дискретных случайных переменных

**Пример 1.** Бросание кубика

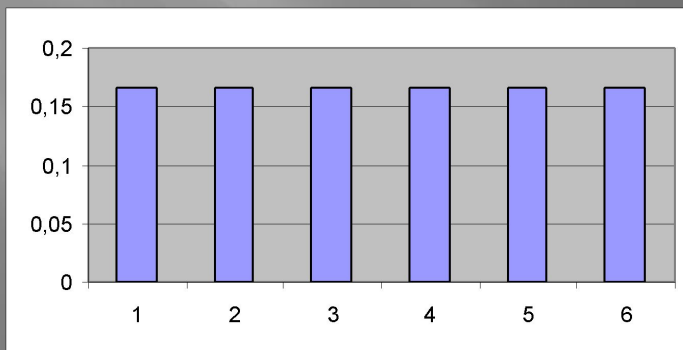
$A_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  – область определения

$X$ - цифра на верхней грани (СДП)

Закон распределения –

$$P_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{если } t \in A_x \\ 0 & \text{если } t \notin A_x \end{cases}$$

Пример равновероятного закона распределения



Графическое представление  
равновероятного закона  
распределения

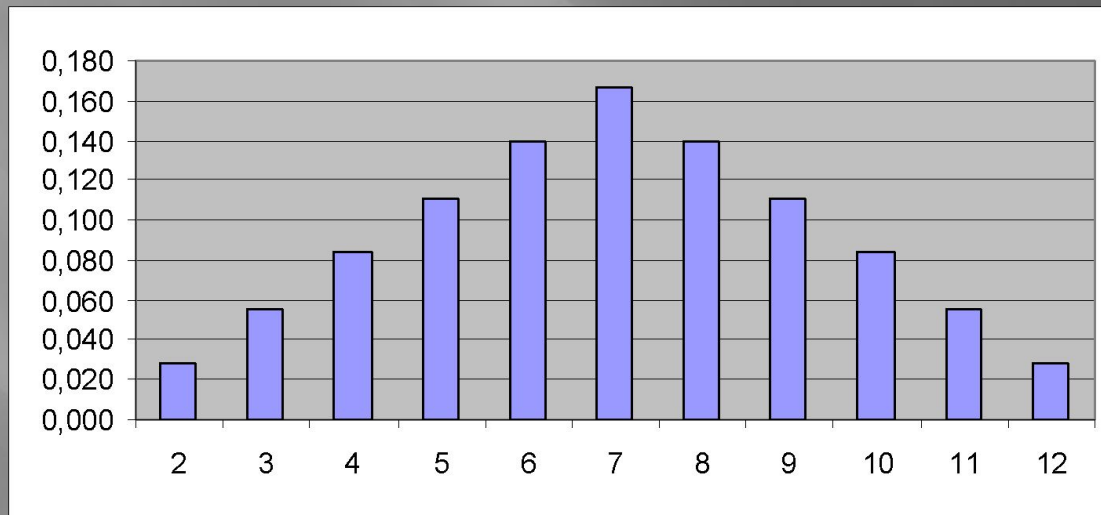
# Классические примеры дискретных случайных переменных

**Пример 2.** Бросание одновременно двух кубиков

$X$ -сумма чисел на верхних гранях кубиков

$A_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  - область определения

Закон распределения  $X$  имеет вид



Каждый столбец - суть вероятность появления в опытах соответствующего значения переменной  $X$



# Закон распределения непрерывной случайной переменной

В случае, когда  $X$  непрерывная случайная переменная, ее закон распределения вероятностей выражается с помощью функции плотности вероятностей, который по определению есть:

$$p_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq x \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow 0$$

где:  $P(t \leq x \leq t + \Delta t)$  – вероятность того, что случайная переменная  $X$  примет в опыте значение, лежащее в интервале  $(t, t + \Delta t)$

# Свойства функции плотности вероятностей

1. Функция плотности вероятности неотрицательна  $p_x(t) \geq 0$
2. Вероятность попадания СВ  $x$  на отрезок  $[a, b]$  есть:

$$P_x(a \leq x \leq b) = \int_a^b p_x(t) dt$$

3. Функция распределения вероятностей связана с функцией плотности вероятностей выражением:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p_x(t) dt$$

4. Справедливо равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(t) dt = 1$$

# Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

## 1. Закон равномерного распределения $X$ на отрезке $[a, b]$

$$p_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{если } t \in [a, b] \\ 0 & \text{если } t \notin [a, b] \end{cases}$$

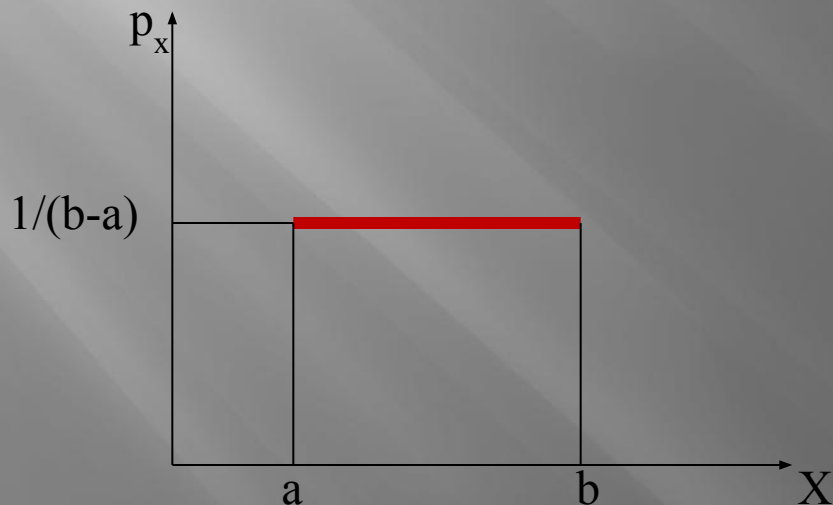


График функции плотности вероятности – отрезок прямой параллельной оси  $X$  внутри отрезка  $[a, b]$  и ноль вне его

# Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

## 2. Нормальный закон распределения Гаусса

$$p_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(t-a)^2}{2s^2}}$$

где  $a$  и  $s$  – параметры закона распределения.

Именно, с помощью значений этих параметров удастся персонифицировать различные случайные переменные, подчиняющиеся нормальному закону распределения

# Основные понятия теории вероятностей

## Выводы:

1. В основе лежат понятия объект, событие, переменная
2. Случайная переменная есть результат некоторого события
3. Случайные переменные задаются с помощью области определения и закона распределения вероятностей (ДСП) или функции плотности вероятностей (НСП)