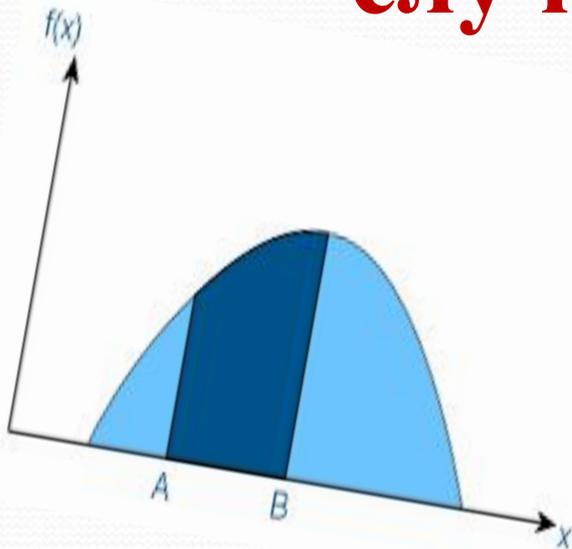
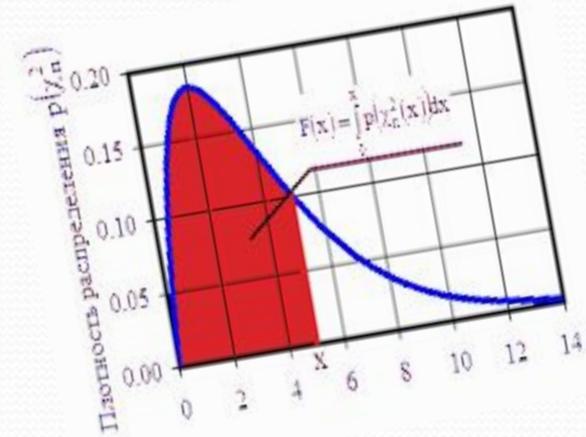


Непрерывные случайные величины



Разработана преподавателем
Каракашевой И.В

Санкт – Петербург
2018

Цели урока

Образовательные:

- изучить непрерывные случайные величины, плотность и функцию распределения непрерывной случайной величины;
- научить решать задачи на определение плотности и функции распределения непрерывной случайной величины;
- научить применять понятие непрерывной случайной величины в реальных ситуациях.

Воспитательные:

- способствовать развитию знаний;
- формировать у учащихся научное мировоззрение;
- продолжать формировать умение самостоятельно работать с различными источниками информации.

Развивающие:

- способствовать развитию аналитического мышления, смысловой памяти, внимания; умения работать с дополнительной литературой;
- развитию навыков исследовательской деятельности.

Актуализация знаний

- Дайте определение случайной величины
- Дайте определение дискретной случайной величины
- Приведите примеры дискретных случайных величин
- Что такое закон распределения случайной величины?
- Дайте определение функции распределения случайной величины
- Назовите свойства функции распределения

Непрерывные случайные величины

- **Непрерывная случайная величина** – принимает все числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.
- **Закон распределения случайной величины** – это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями.
- Непрерывную случайную величину невозможно описать таблицей (ввиду бесконечного и *несчётного* количества принимаемых значений).
- Непрерывную случайную величину можно задать с помощью функции распределения вероятностей $F(x)$.

Функция распределения

● Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем *переменная* x , которая «пробегает» все действительные значения.

$$F(x) = P(X < x)$$

Свойства функции распределения

● 1) *Функция распределения – неубывающая.*

● 2) $F(+\infty) = 1$

● 3) $F(-\infty) = 0$

Функция распределения



Плотность распределения

Плотностью распределения случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства плотности распределения

1) $f(x) \geq 0$

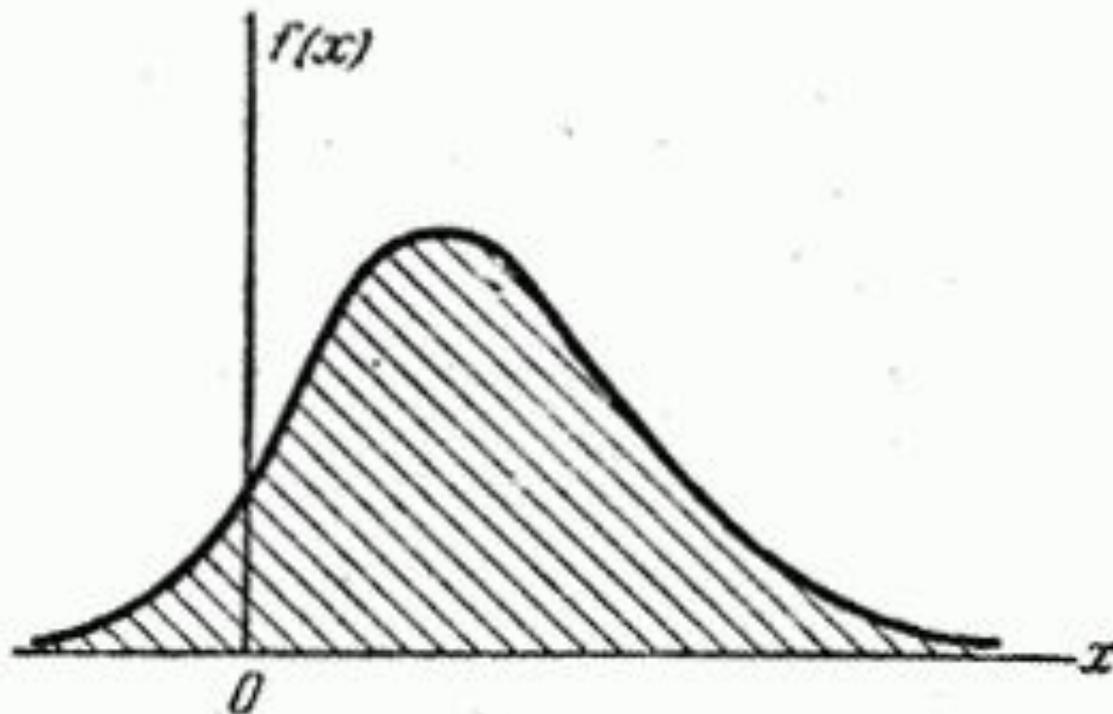
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Если значения случайной величины заполняют промежуток $[a; b]$, то формула принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

Кривая распределения

- График плотности распределения непрерывной случайной величины называется *кривой распределения*



Функция распределения

● Если $f(x)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины, то функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

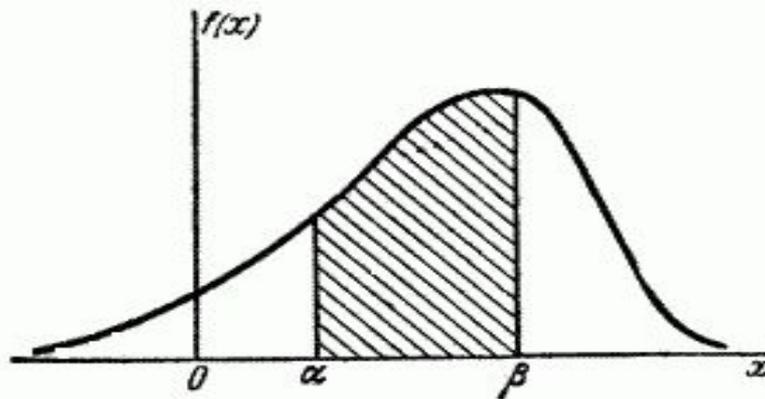
● Иногда плотность распределения называют *интегральной функцией распределения*, а плотность распределения – *дифференциальной функцией распределения вероятности*.

Вероятность попадания случайной величины в промежуток

Вероятность того, что значение, принятое случайной величиной X , попадет в промежуток $[a; b]$, определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрически вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a; b]$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$



Пример 1

- Плотность распределения случайной величины равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a(4x - x^2), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

- Найти коэффициент a , функцию распределения, вероятность попадания случайной величины в промежуток $[1;3]$, построить кривую распределения

Решение

● Коэффициент a найдем по свойству плотности $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 a(4x - x^2)dx = a\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^4 = a\left(32 - \frac{64}{3}\right) = a\frac{32}{3}$$

$$a\frac{32}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{32}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{32}(4x - x^2), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Решение

● Функция распределения

$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 4 \quad F(x) &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{3}{32}(4t - t^2) dt = \frac{3}{32} \left(2t^2 - \frac{t^3}{3} \right)_0^x = \\ &= \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x > 4 \quad F(x) &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^4 \frac{3}{32}(4t - t^2) dt + \int_4^x 0 dt = \\ &= \frac{3}{32} \left(2t^2 - \frac{t^3}{3} \right)_0^4 = \frac{3}{32} \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{3}{32} \cdot \frac{32}{3} = 1 \end{aligned}$$

Решение

● Функция распределения

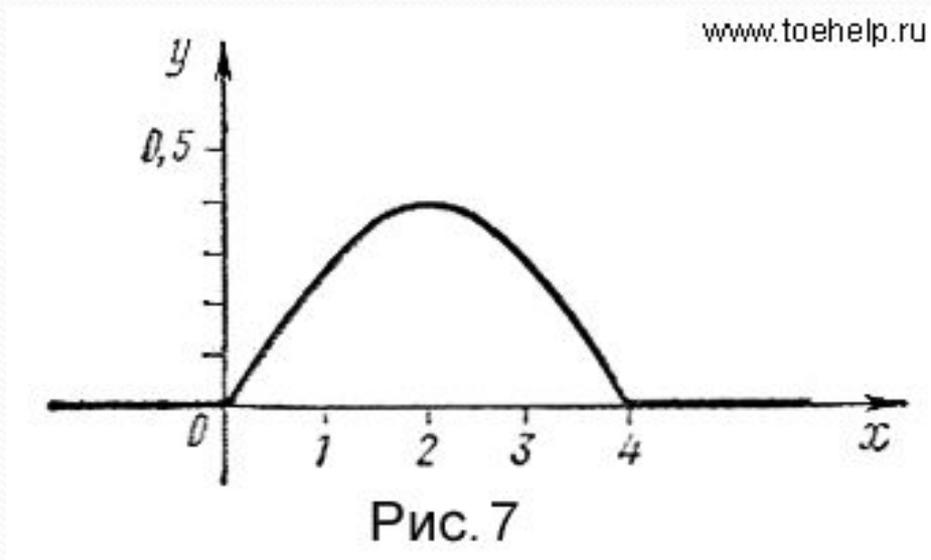
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

● Вероятность попадания в промежуток

$$\begin{aligned} P(1 < X < 3) &= \int_1^3 \frac{3}{32} (4x - x^2) dx = \frac{3}{32} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \frac{3}{32} \left(18 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{3}{32} \cdot \frac{22}{3} = \frac{11}{16} = 0,6875 \end{aligned}$$

Решение

- График кривой распределения



Пример 2

- Плотность распределения случайной величины равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

- Найти коэффициент a , функцию распределения, вероятность попадания случайной величины в промежуток $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$, построить кривую распределения

Решение

● Коэффициент a найдем по свойству плотности $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} a \sin x dx = -a \cos x \Big|_0^{\pi} = -a(\cos \pi - \cos 0) = 2a$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Решение

● Функция распределения

$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = \frac{-1}{2} \cos t_0^x = -\frac{1}{2} (\cos x - 1)$$

$$x > \pi \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin t dt + \int_{\pi}^x 0 dt = -\frac{1}{2} \cos t_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1$$

Решение

● Функция распределения

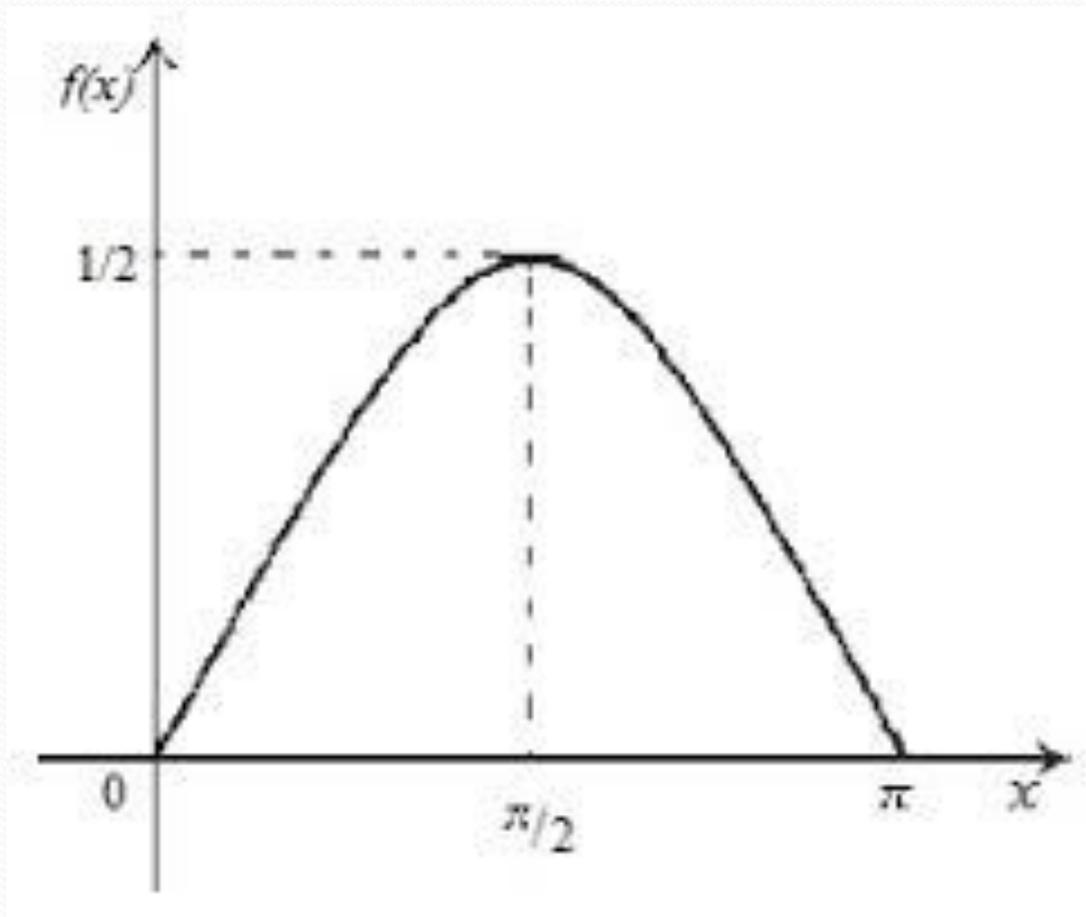
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

● Вероятность попадания в промежуток

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} = 0,18 \end{aligned}$$

Решение

- График кривой распределения



Пример 3

- Функция распределения случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x - 2)^3, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- Найти плотность распределения, вероятность попадания случайной величины в промежутки $[1; 2,5]$ и $[2,5; 4]$

Решение

- Плотность распределения $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 3(x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

- Вероятность попадания в промежуток

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2,5) &= F(2,5) - F(1) = (2,5 - 2)^3 - 0 = \\ &= (0,5)^3 = 0,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2,5 < X < 4) &= F(4) - F(2,5) = 1 - (2,5 - 2)^3 = \\ &= 1 - 0,125 = 0,875 \end{aligned}$$

Рефлексия

- 1) Плотность распределения случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

- Найти функцию распределения, вероятность попадания случайной величины в промежуток $[0,5;1]$

- 2) Функция распределения

- Найти плотность распределения и построить графики функций распределения и плотности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right), & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Домашнее задание

Дана функция распределения НСВ. Найти плотность распределения и построить графики функций распределения и плотности. Найти вероятность попадания случайной величины в $(0;1,5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,5(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Дана плотность распределения НСВ. Найти коэффициент a , функцию распределения, вероятность попадания случайной величины в промежуток $[1;3]$, построить кривую распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ a(x - 2)(4 - x), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$