Решение тригонометрических уравнений и неравенств

Содержание

- Простейшие тригонометрические уравнения
- Простейшие тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические уравнения

- Определение арксинуса
- Уравнение *sin t = a*
- Определение арккосинуса
- Уравнение *cos t = a*
- Определение арктангенса
- Уравнение *tg t = a*
- Определение арккотангенса
- Уравнение *ctg t = a*
- Примеры

Определение арксинуса

Арксинусом числа а называется такой угол из промежутка [− 0,5π; 0,5π], синус которого равен а, где |a| ≤ 1.

$$\arcsin a = t\ ,\ \sin t = a$$

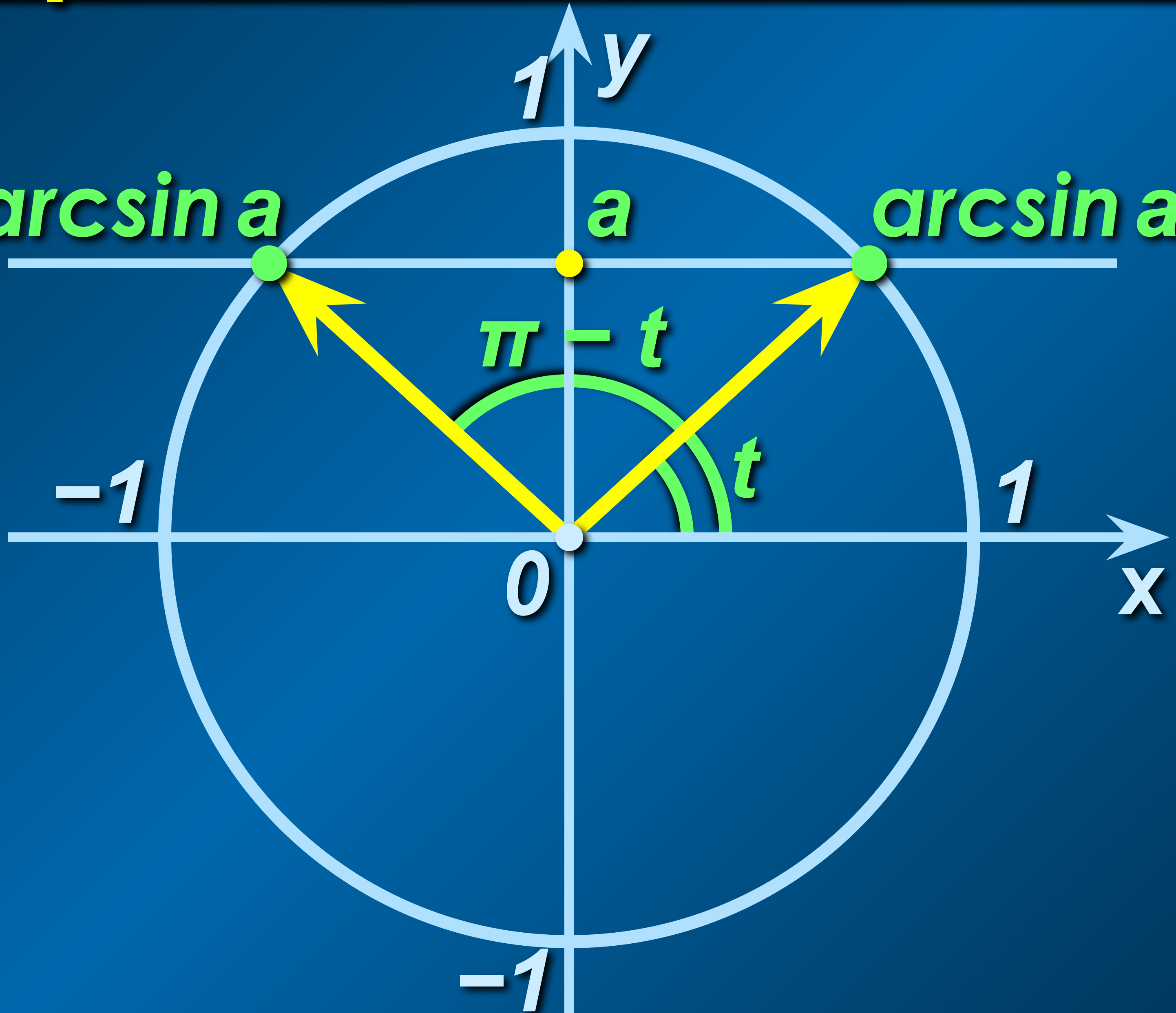
где $t \in [-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$

$$a \in [-1;\ 1]$$

$$\sin(\arcsin a) = a,\ \ a \in [-1;\ 1]$$

$$\arcsin(\sin t) = t,\ \ t \in [-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$$

Уравнение $\sin t = a$



Уравнение $\sin t = a$

С учетом периодичности:

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right.$$

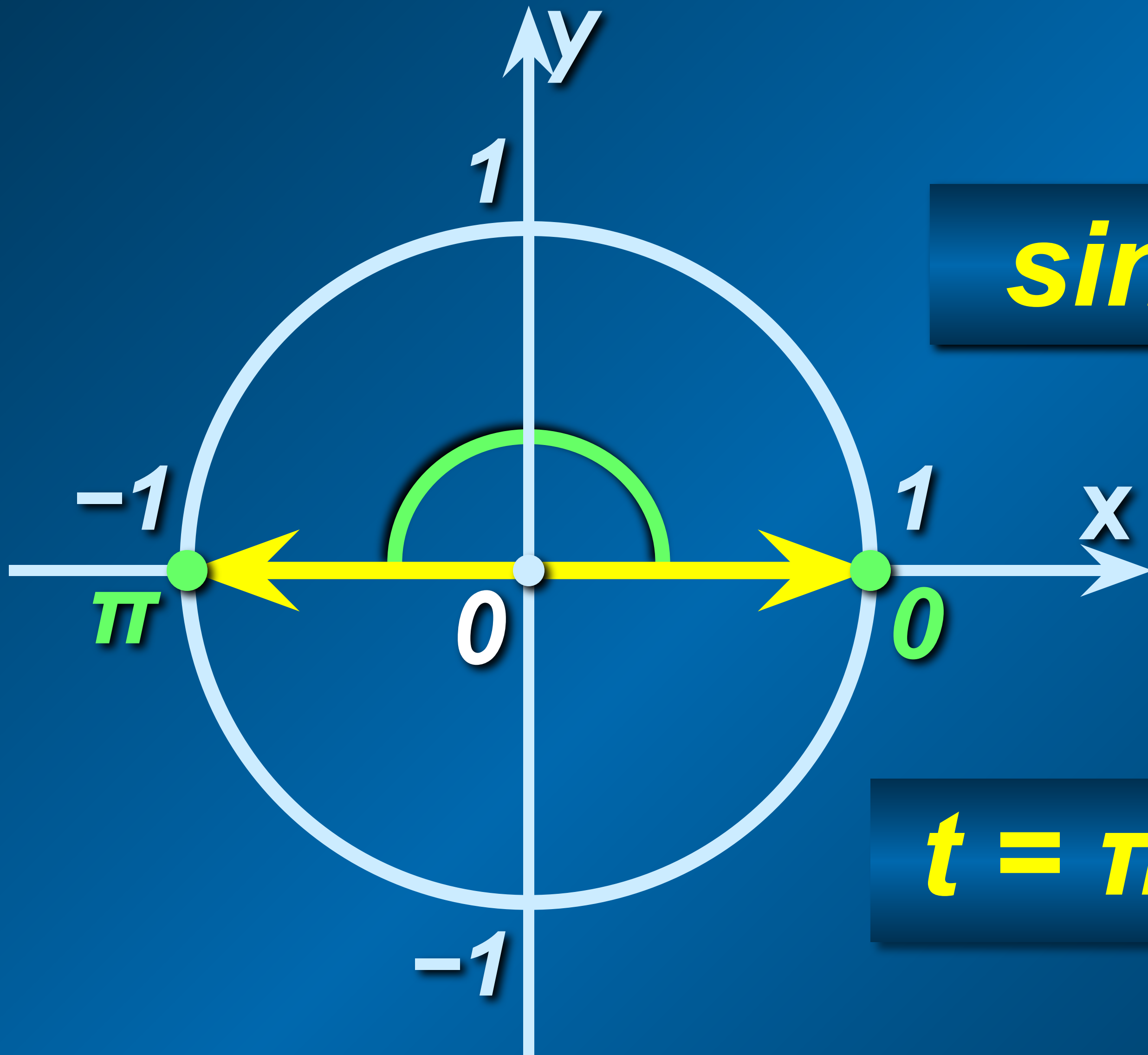
$n \in Z$

Объединив в одну формулу:

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$

Пример

1 частный случай

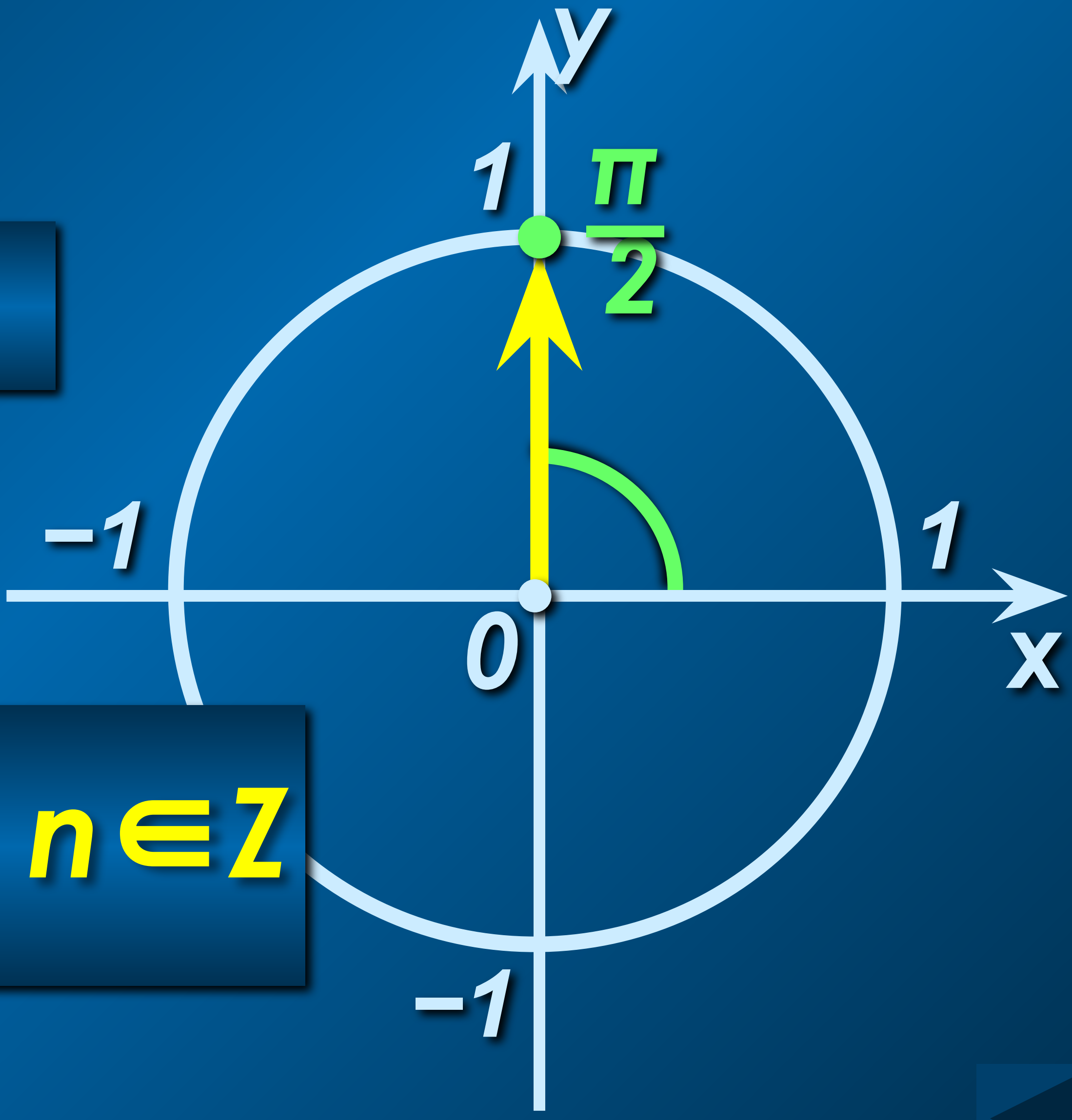


$\sin t = 0$

$t = \pi n,\ n \in Z$

2 частный случай

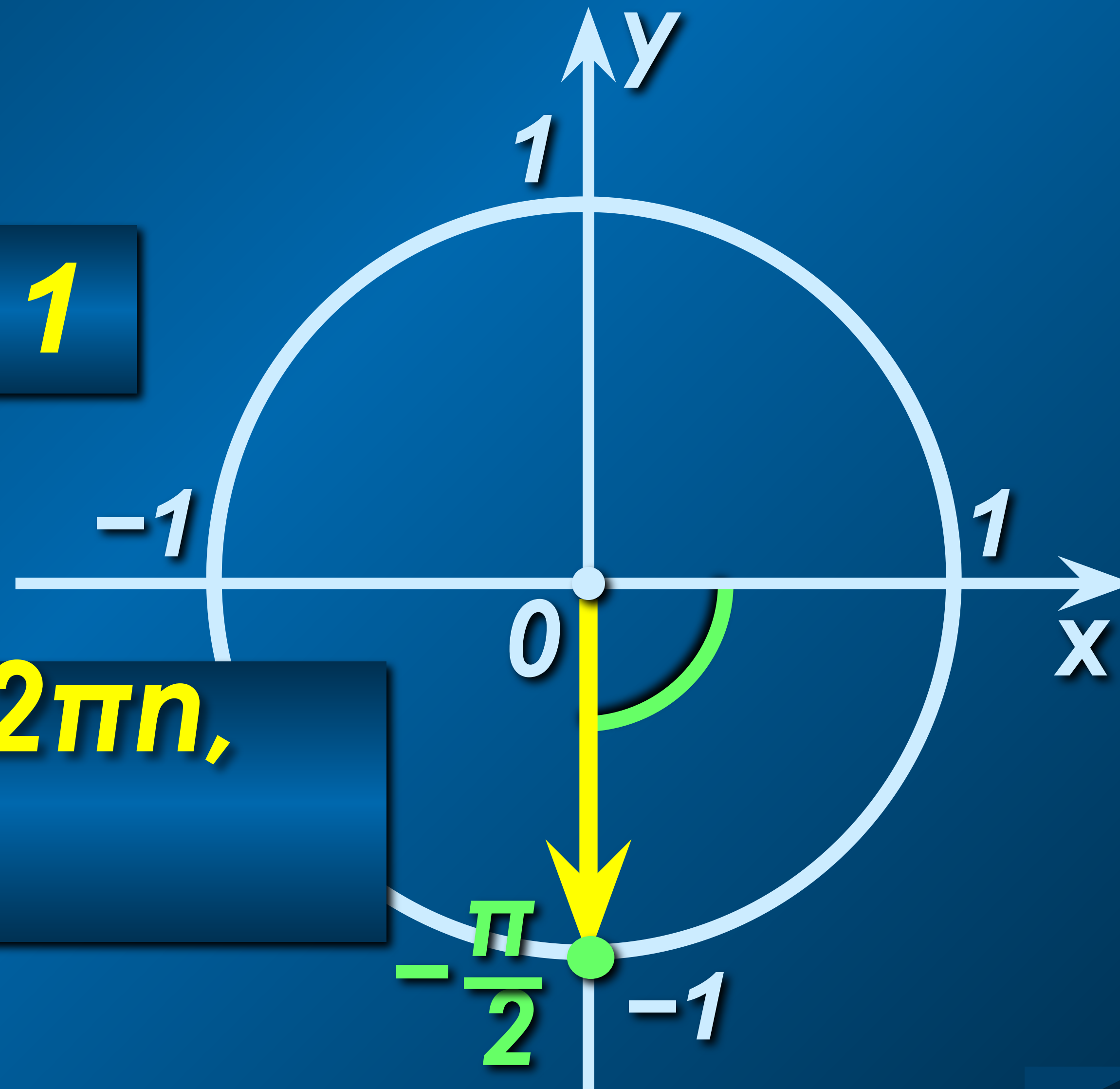
$\sin t = 1$



$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

3 частный случай

$\sin t = -1$



$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$n \in Z$

Определение арккосинуса

Арккосинусом числа а называется такой угол из промежутка [0; π], косинус которого равен а, где |a| ≤ 1.

$$\arccos a = t\,, \quad \cos t = a$$

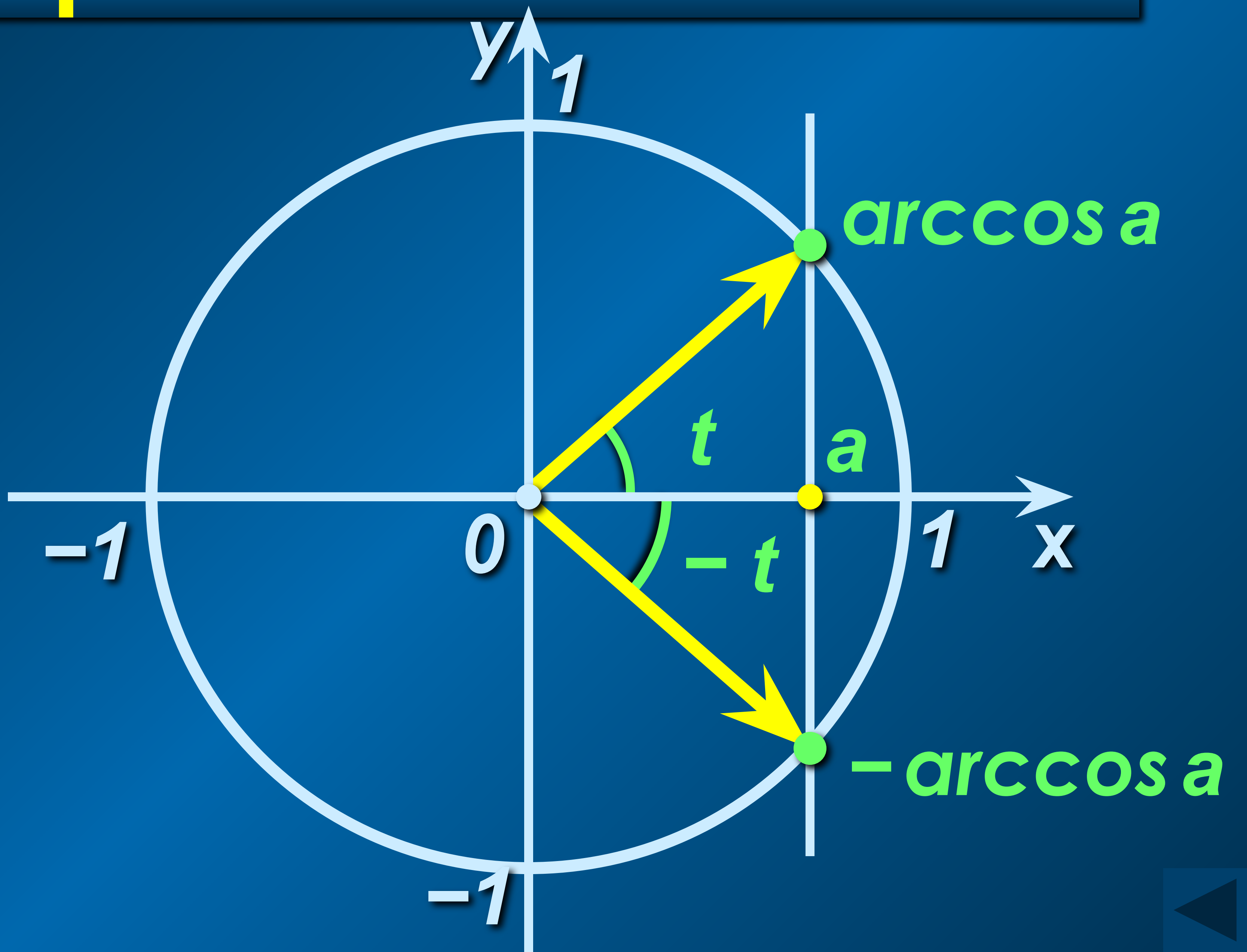
где $t \in [0; \pi]$

$$a \in [-1; 1]$$

$$\cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arccos(\cos t) = t, \quad t \in [0; \pi]$$

Уравнение $\cos t = a$



Уравнение $\cos t = a$

С учетом периодичности:

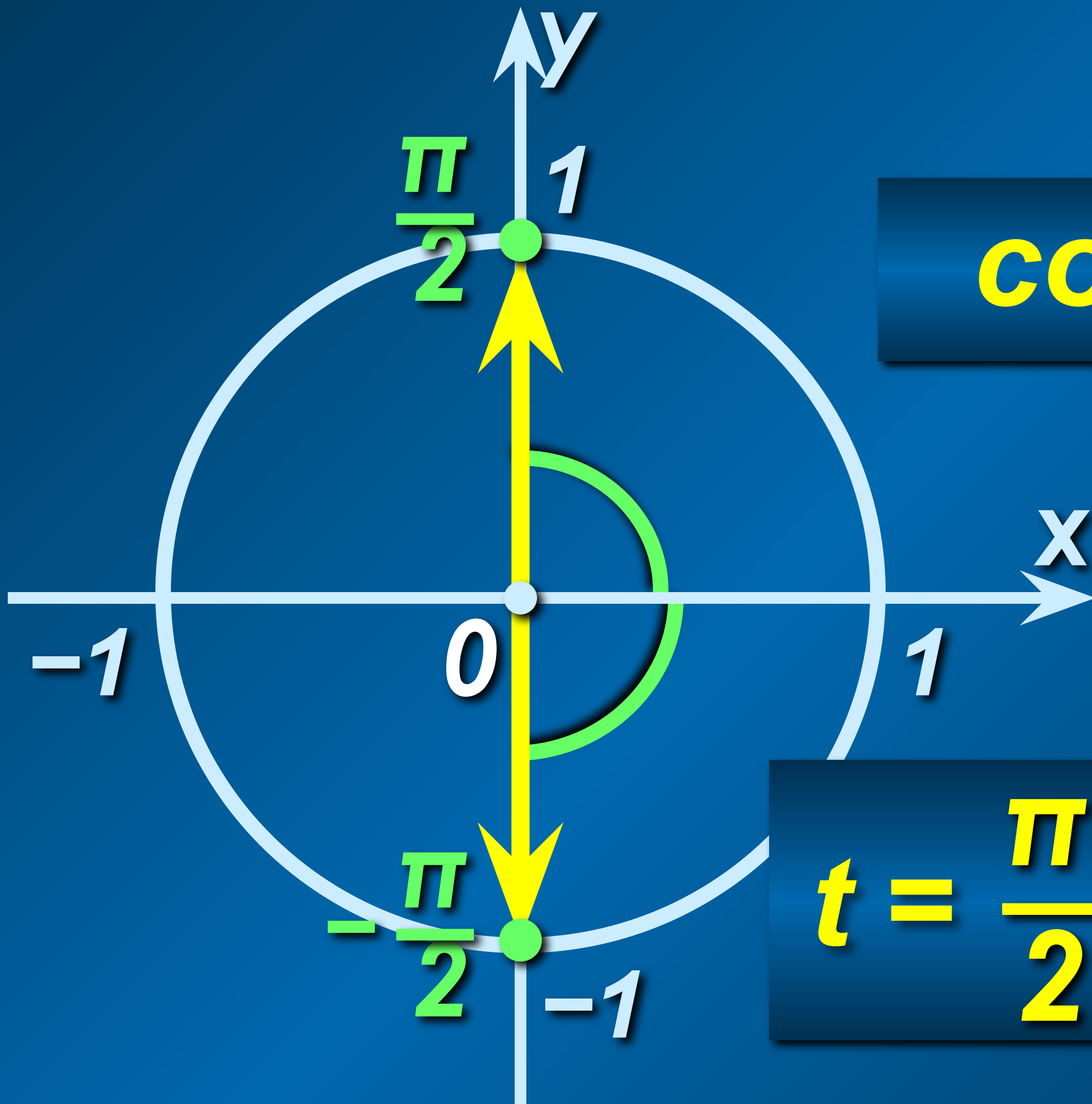
$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Объединив в одну формулу:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

Пример

1 частный случай

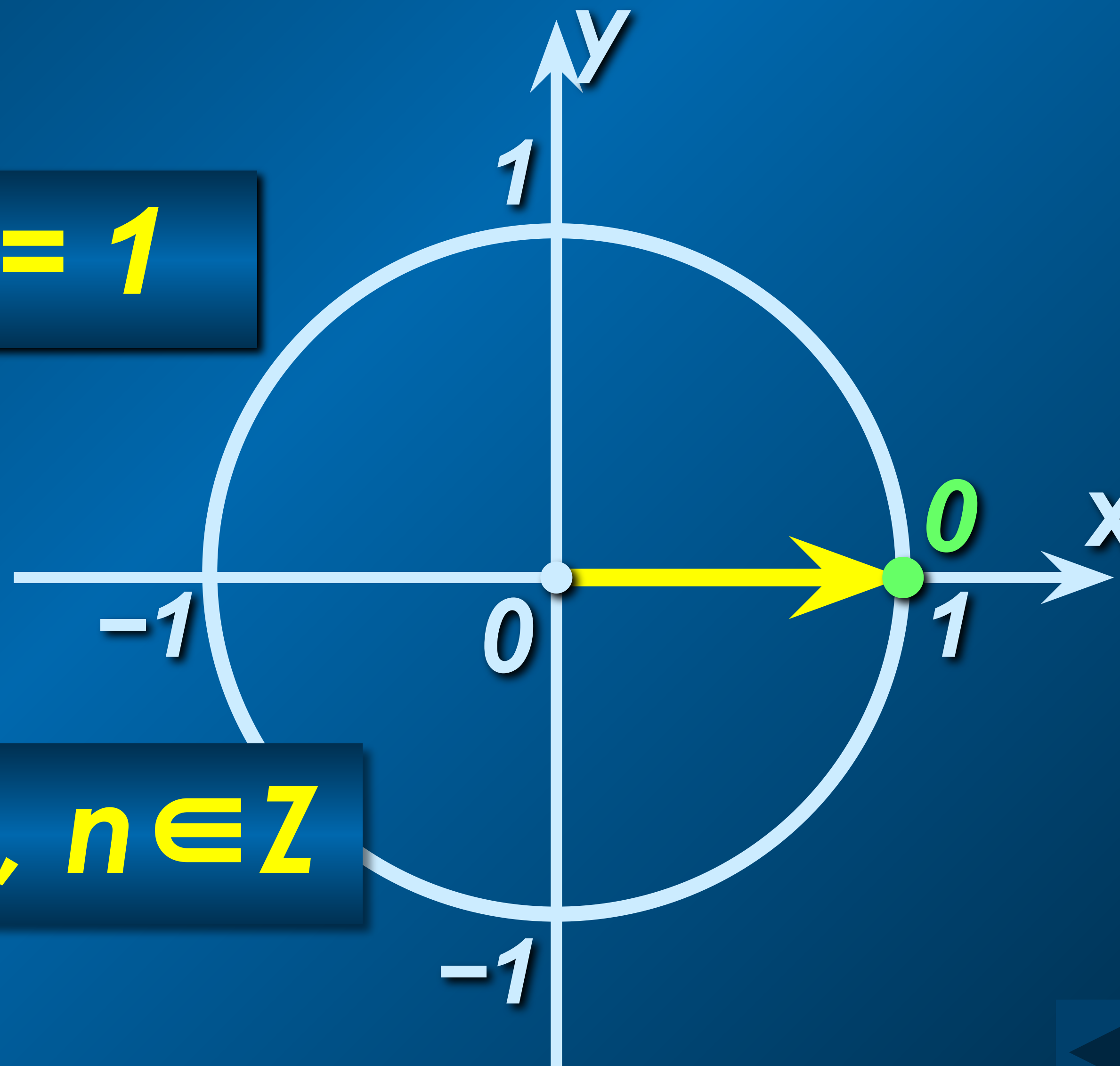


$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

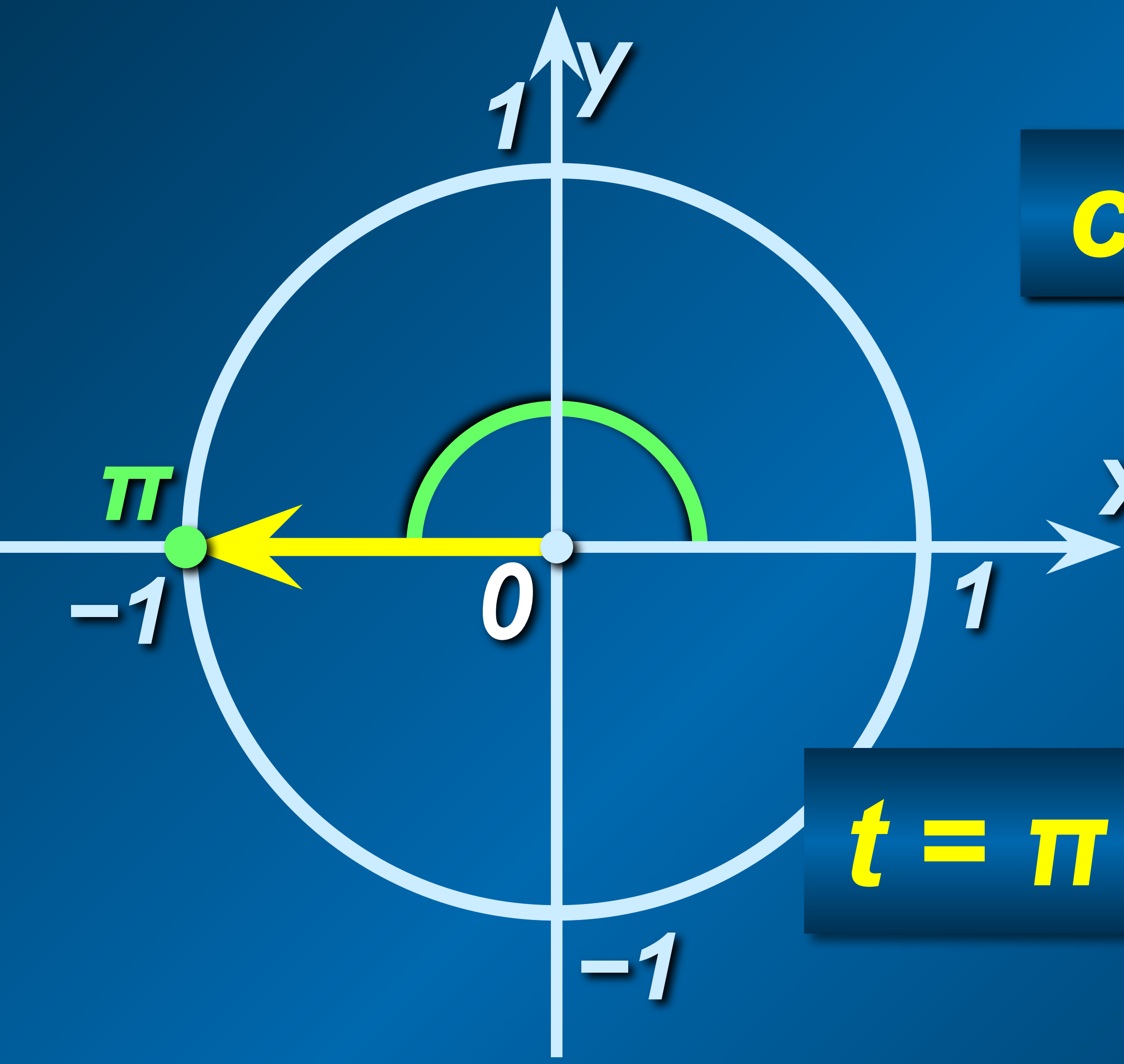
2 частный случай

$\cos t = 1$



$t = 2\pi n,\ n \in Z$

3 частный случай



$\cos t = -1$

$t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Определение арктангенса

Арктангенсом числа *a* называется такой угол из промежутка $(-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi)$, тангенс которого равен *a*.

$$\operatorname{arctg} a = t,\ \operatorname{tg} t = a$$

где $t \in (-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi)$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t,\quad t \in (-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi)$$

Уравнение $tg\ t = a$

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n,$

$n \in Z$

Пример

Определение арккотангенса

Арккотангенсом числа а называется такой угол из промежутка **(0; π)**, котангенс которого равен **а**.

$$\operatorname{arcctg} a = t,\ \operatorname{ctg} t = a$$
где $t \in (0; \pi)$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t,\quad t \in (0; \pi)$$

Уравнение ctg t = a

$$t = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\quad n \in Z$$

Пример

Примеры

Пример 1Пример 1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = -$

$\frac{1}{2}$

Пример 2Пример 2.

$\cos x =$

$\sqrt{3}$

Пример 3Пример 3. tg

1

<u>Пример 1</u> $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$$

<u>Ответ:</u> $(-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Пример 2 $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Пример 3 $tg\, x = -1$

$x = arctg\,(-1) + \pi n,\ n \in Z$

$x = -\,arctg\,1 + \pi n,\ n \in Z$

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Пример 4 $\quad ctg\,x = \sqrt{3}$

$x = arcctg\sqrt{3} + \pi n,$
$n \in Z$

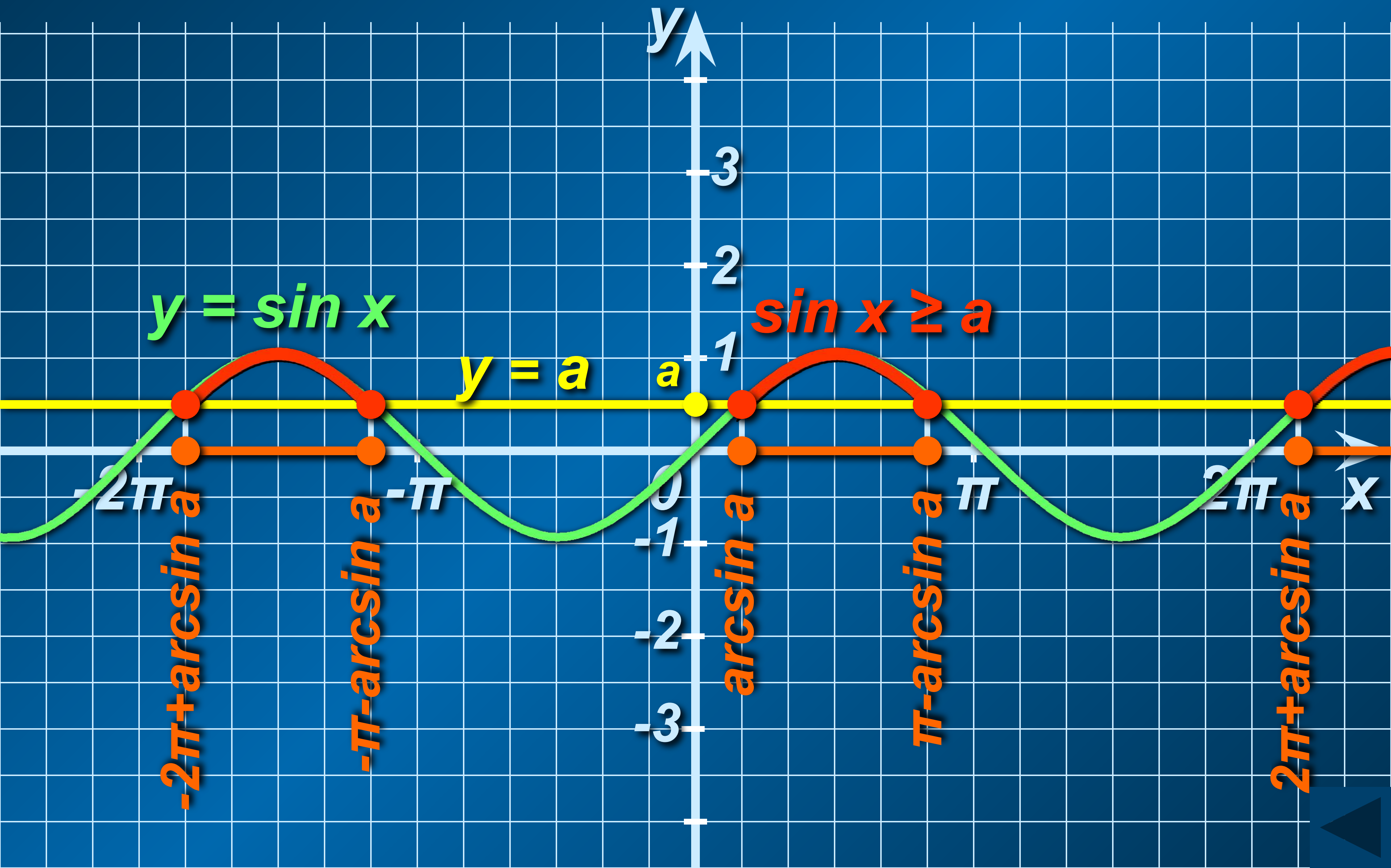
$x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n,$
$n \in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Простейшие тригонометрические неравенства

- Неравенство $\sin x \geq a$
- Неравенство $\cos x < a$
- Неравенство $\mathrm{tg}\, x > a$
- Неравенство $\mathrm{ctg}\, x \leq a$
- Примеры

Неравенство *sin x ≥ a*



Неравенство $\sin x \geq a$

$$\arcsin a \leq x \leq \pi - \arcsin a$$

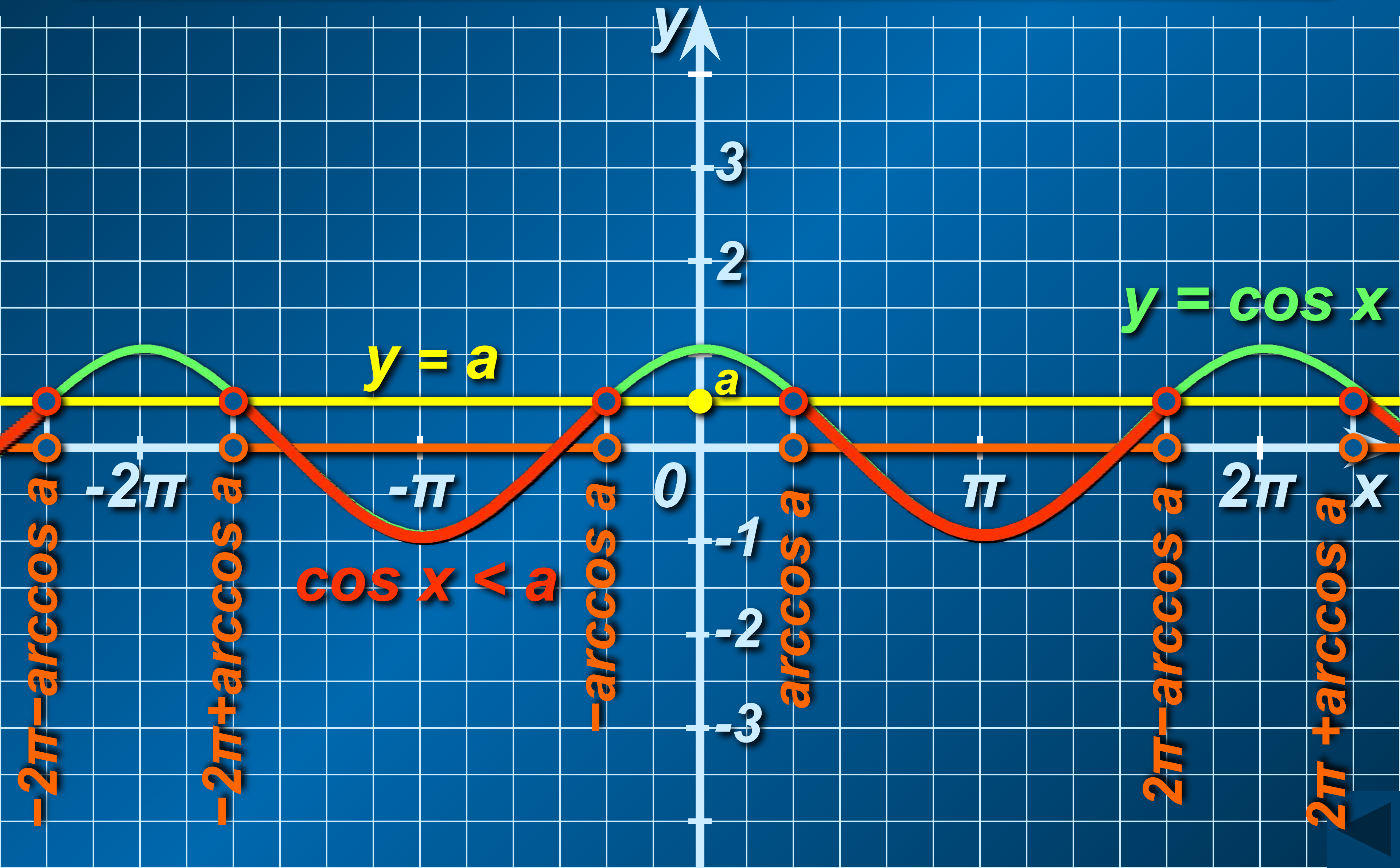
С учетом периодичности:

$$\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a +$$
$$+ 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$[\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n],\ n \in Z$

Неравенство $\cos x < a$



Неравенство $\cos x < a$

$$\arccos a < x < 2\pi - \arccos a$$

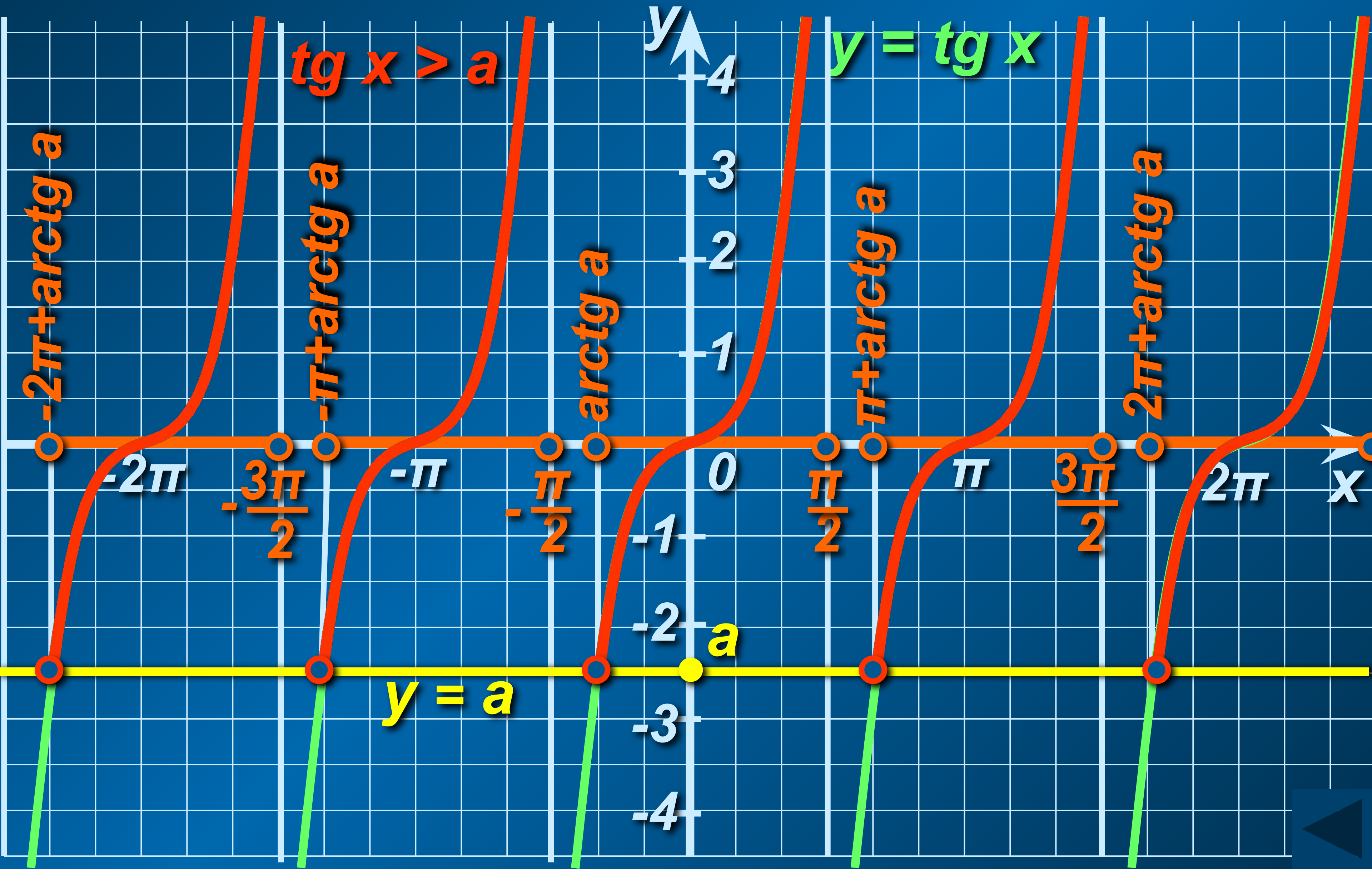
С учетом периодичности:

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + \\ + 2\pi n,\ n \in Z$$

<u>Ответ:</u>

$$(\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z$$

Неравенство tg x > a



Неравенство $tg\,x > a$

$$\operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2}$$

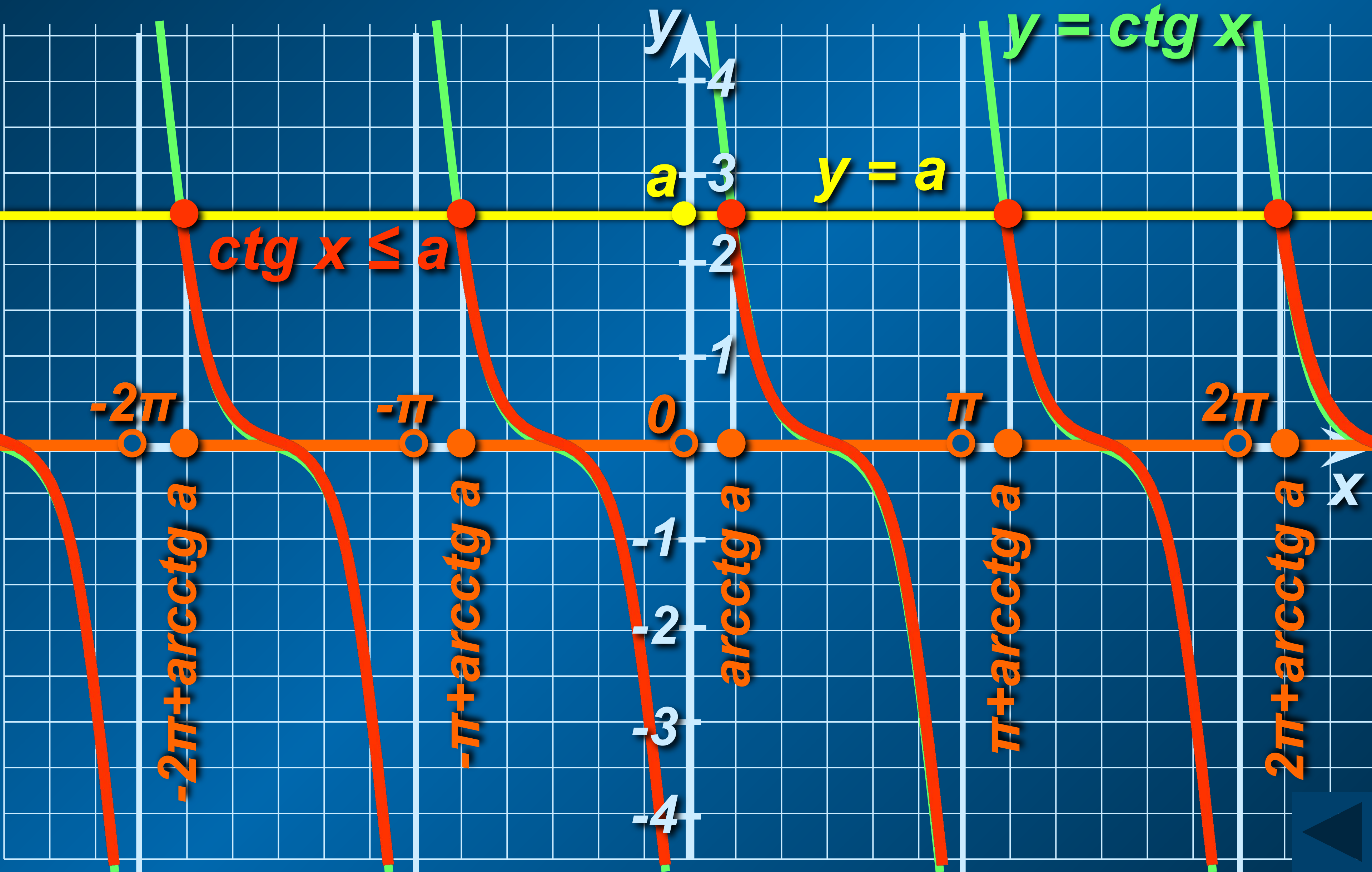
С учетом периодичности:

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$$\left(\operatorname{arctg} a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$$

Неравенство $ctg\ x \le a$



Неравенство $ctg\, x \le a$

$$arcctg\, a \le x < \pi$$

С учетом периодичности:

$$arcctg\, a + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$$

<u>Ответ:</u>

$$[arctg\, a + \pi n;\ \ \pi + \pi n),\ n \in Z$$

Примеры

Пример 1Пример 1.

$\sin x \geq \frac{1}{2}$

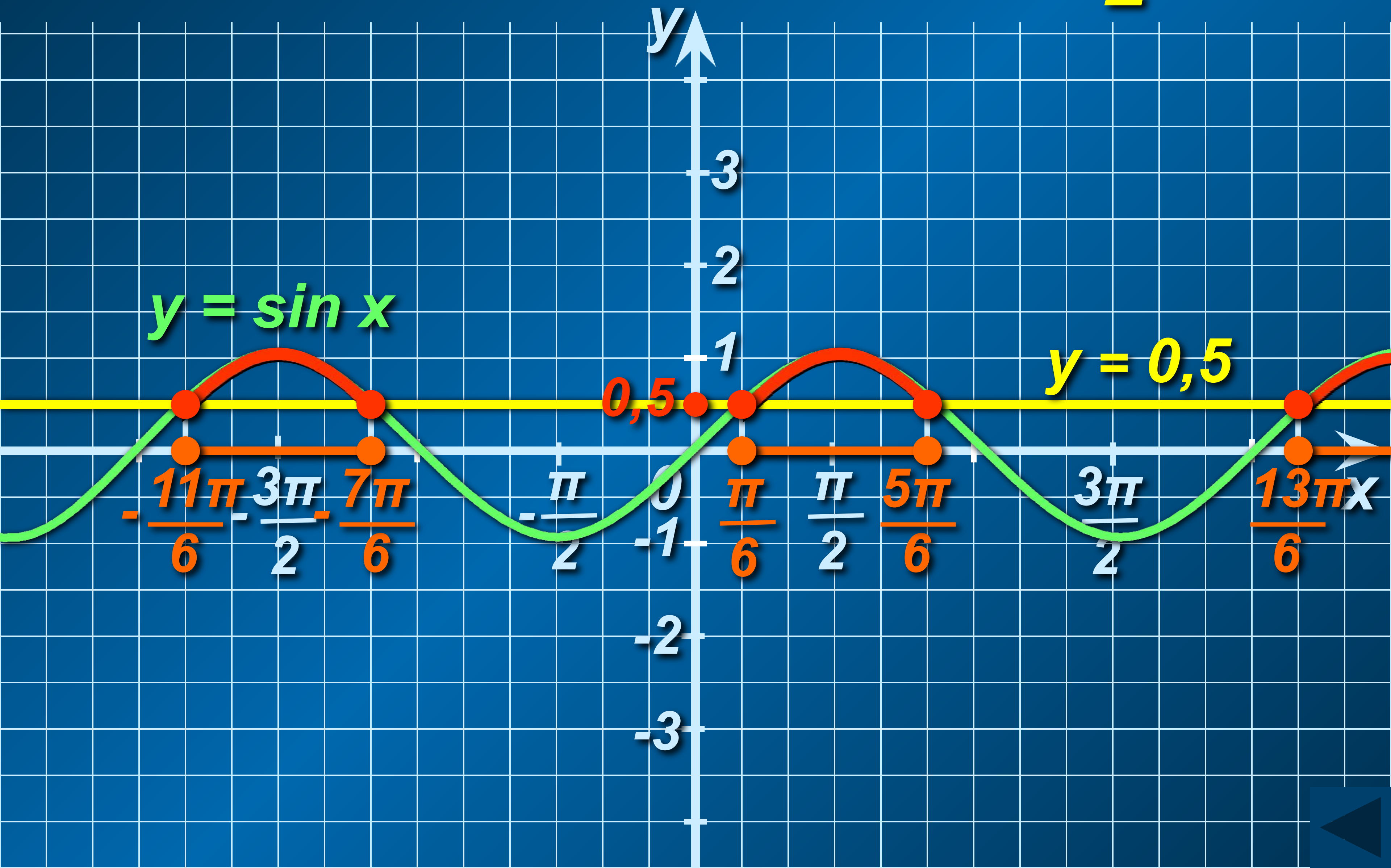
Пример 2Пример 2.

$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пример 3Пример 3.

$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 1: $\sin x \geq \frac{1}{2}$



Пример 1: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

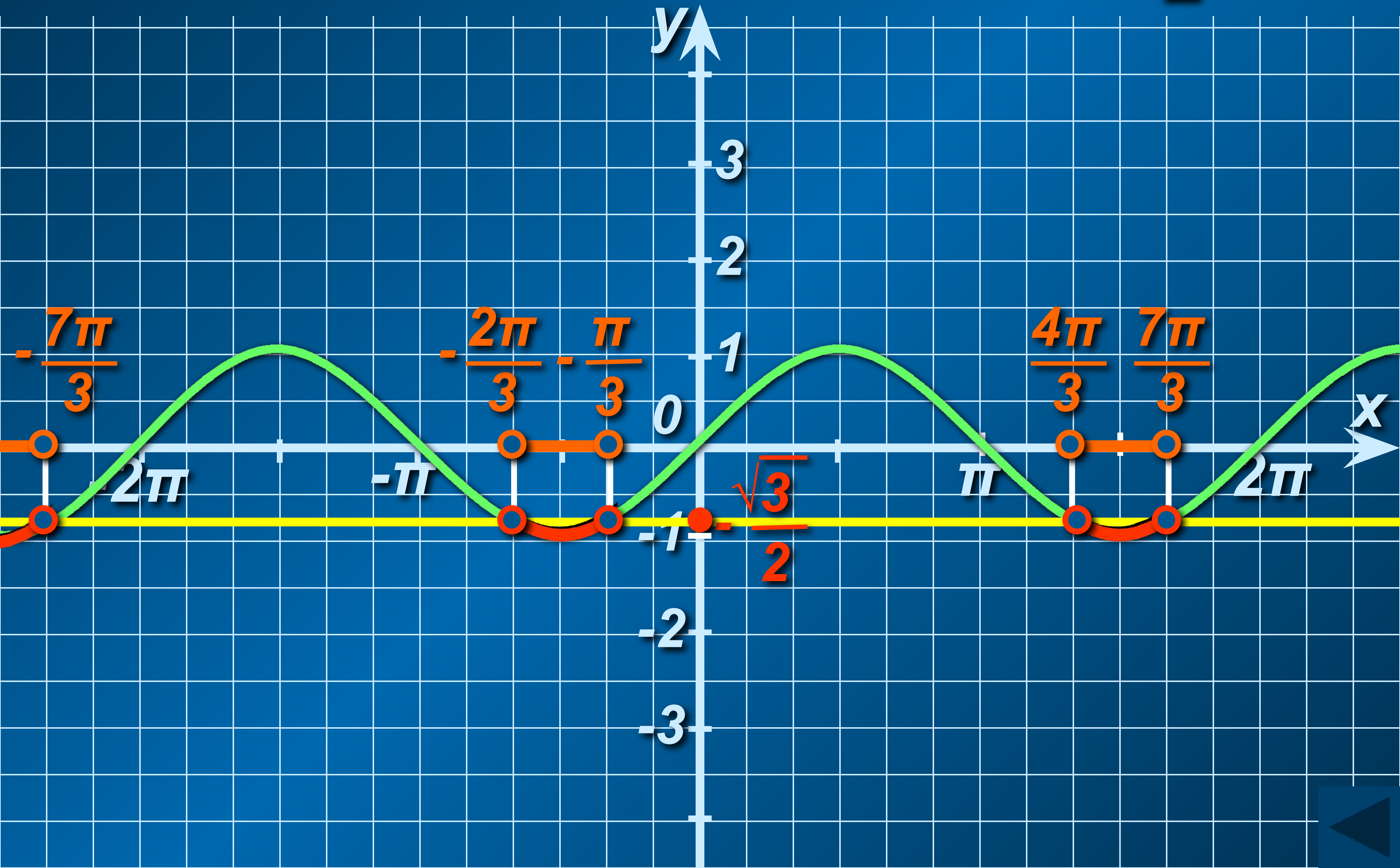
С учетом периодичности:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z$$

Пример 2: $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Пример 2: $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}$$

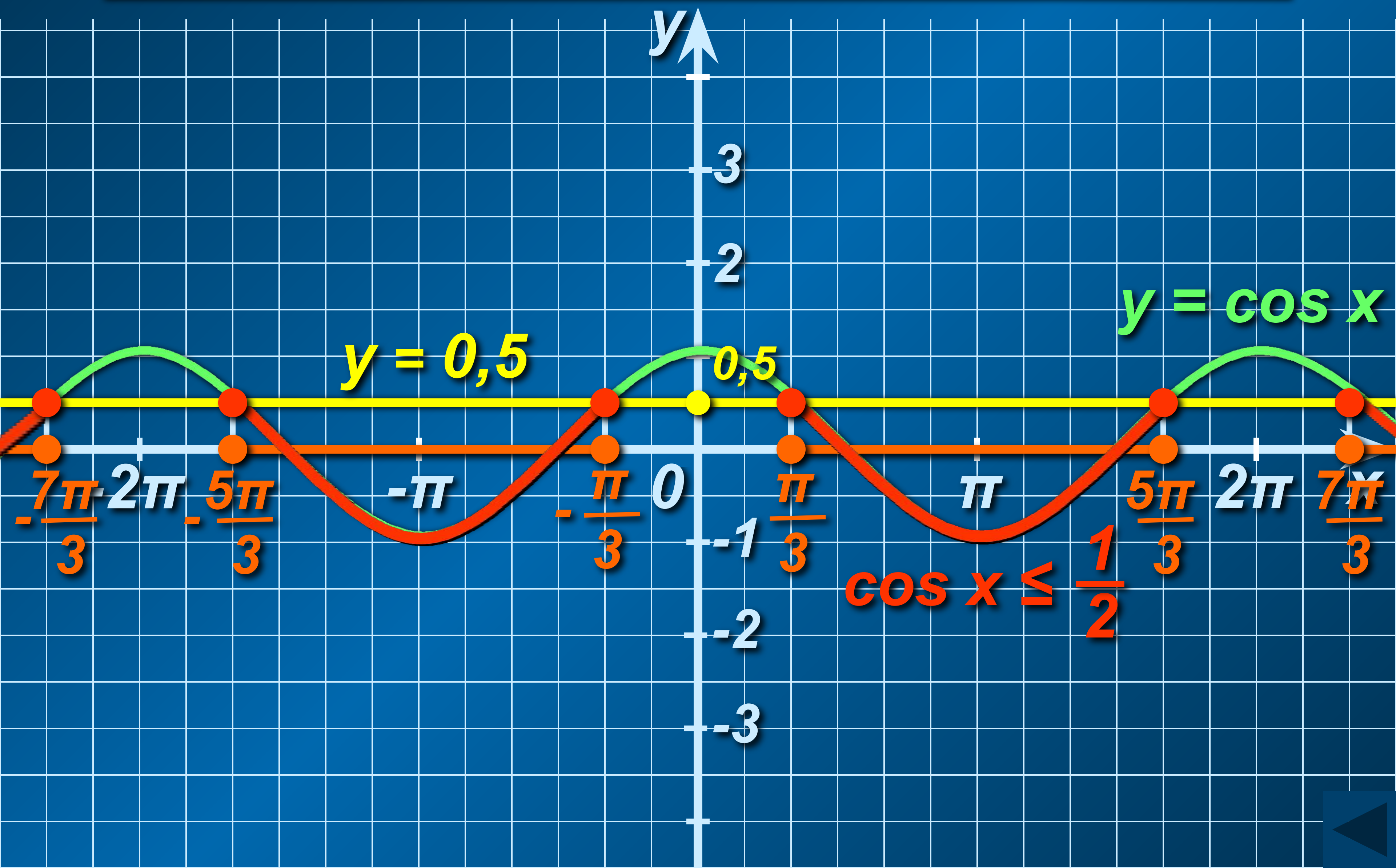
С учетом периодичности:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$$

<u>Пример 3:</u> $\cos x \le \frac{1}{2}$.



Пример 3: $\cos x \le \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$$

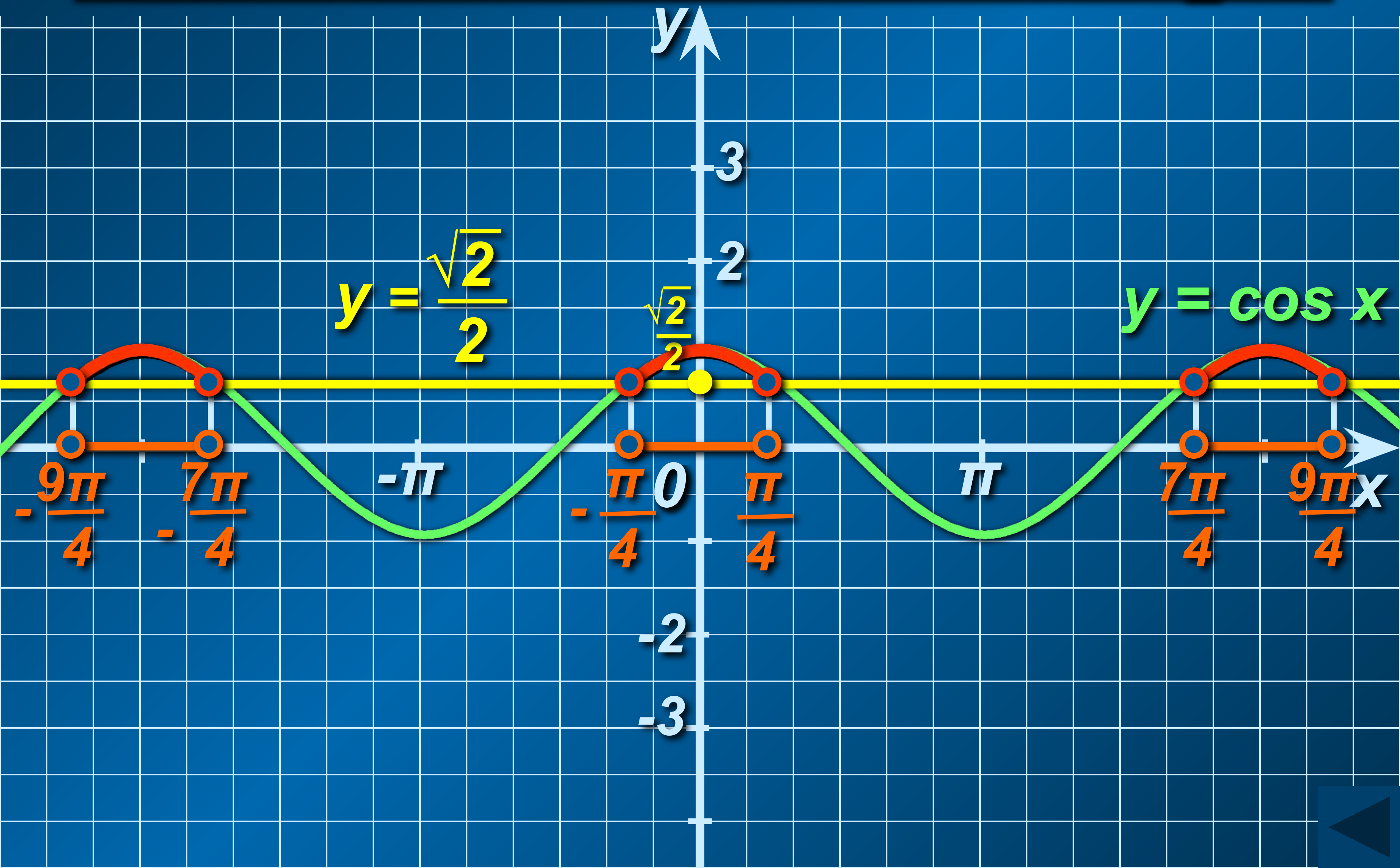
С учетом периодичности:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z$$

Пример 4: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Пример 4: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

С учетом периодичности:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ:

$$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z$$