Тригонометрическое уравнение. Отбор корней в нем.

- Наиболее распространенным типом экзаменационных заданий является тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратным относительно тригонометрической функции.
- При этом исходное уравнение бывает определено не при всех значениях переменной или в условии явно указан промежуток, которому должны принадлежать корни: в том и другом случае необходимо проводить отбор найденных решений.

Отбор корней можно провести

- Графически:

1.на тригонометрической окружности

2.на графике соответствующей тригонометрической функции

- Аналитически:

1.Решая неравенства с целочисленными параметрами. 2. Подставляя целочисленные значения параметра.

Это надо знать

- Основные формулы тригонометрии
- Правило для запоминания формул приведения:

1)определить четверть, в которой лежит аргумент приводимой функции, предполагаяα острым углом;

2)определить знак приводимой функции в этой четверти;

3)определить вид функции, не меняя ее названия для аргументов $\pi \pm \alpha$ и изменяя функцию на сходственную для аргументов $0,5\ \pi \pm \alpha$, $0,5\ \pi \pm \alpha$

- Следствия из формул приведения

Если $\alpha + \beta = 90°$, то $\sin \alpha = \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, а

Если $\alpha + \beta = 180°$,то $\sin \alpha = \sin \beta$, $\cos \alpha = -\cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \beta$

Это надо знать

- Свойства четности и нечетности функции
- Табличные значения тригонометрических функций
- Решение простейших тригонометрических уравнений и их частных случаев
- Табличные значения обратных тригонометрических функций
- Свойства обратных тригонометрических функций

ЗАДАНИЯ С1: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ. ОТБОР КОРНЕЙ В НЕМ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: умение решать тригонометрические уравнения на заданных промежутках.

Ориентировочное время выполнения учащимися: 15–20 минут.

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Наиболее распространенным типом экзаменационных заданий является тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному относительно тригонометрической функции. При этом исходное уравнение бывает определено не при всех значениях переменной или в условии явно указан промежуток, которому должны принадлежать корни: в том и в другом случае необходимо проводить отбор найденных решений. Ниже мы рассматриваем различные типы уравнений и способы отбора корней.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Для того чтобы свести уравнение к квадратному относительно тригонометрической функции, можно использовать следующие формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

Отбор корней можно провести графически – на тригонометрической окружности или на графике соответствующей тригонометрической функции или аналитически, решая неравенства с целочисленными параметрами.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Примеры экзаменационных заданий №1

C1101. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - 7\sin x + 3}{\sin 2x} = 0.$

Решение. Введем обозначение $t = \sin x$. Имеем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{7 + \sqrt{49 - 24}}{4}; \\ t = \dfrac{7 - \sqrt{49 - 24}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3; \\ t = 0,5. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Уравнение $\sin x = 3$ не имеет решений. Решим уравнение $\sin x = 0,5$. Имеем:

$$\sin x = 0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Осталось выяснить, какие из найденных решений удовлетворяют условию $\sin 2x \neq 0$. Поскольку $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, имеем:

$$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin x \neq \pm 1. \end{cases}$$

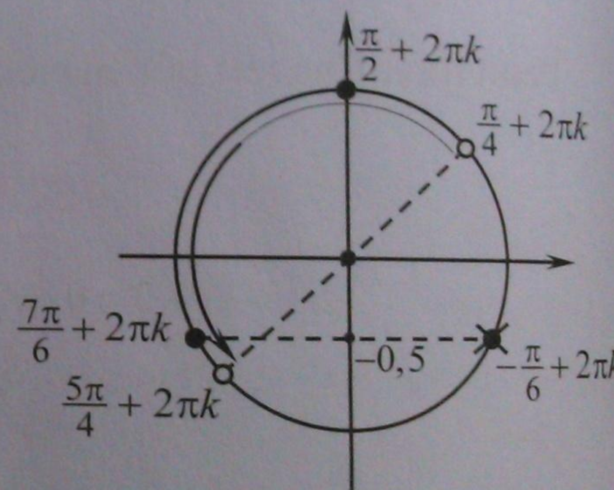
Поскольку мы искали решения уравнения $\sin x = 0,5$, они удовлетворяют указанным условиям.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

Примеры экзаменационных заданий №2

С1102. Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}} = 0.$

Решение. Область определения уравнения задается неравенством $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$. Изобразим решения неравенства на рисунке. Имеем:



$$2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k,$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Решим уравнение $\cos 2x + \sin x = 0$:

$$\cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1; \\ \sin x = -0,5. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ (см. рис.) получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Примеры экзаменационных заданий №3

С1103. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin 2x - 2\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

Решение. Найдем область определения уравнения: $-1 < x < 1$.

Определим, при каких значениях переменной числитель дроби обращается в нуль.

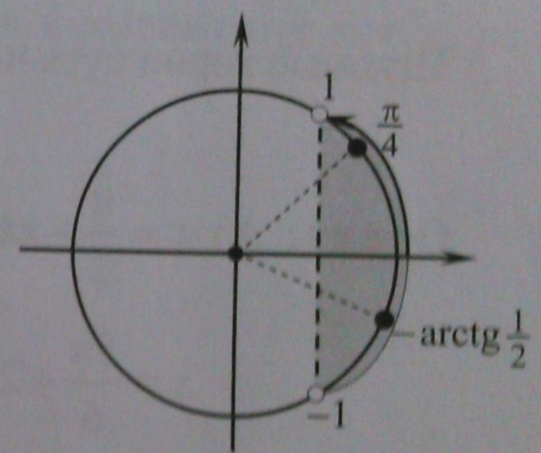
Имеем

$$2\sin^2 x - \sin 2x - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 1; \\ \mathrm{tg}\, x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$



С учетом ОДЗ (см. рис.) получаем: $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = -\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$, $-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Примеры экзаменационных заданий №4

С1104. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

А) решите уравнение;

В) укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

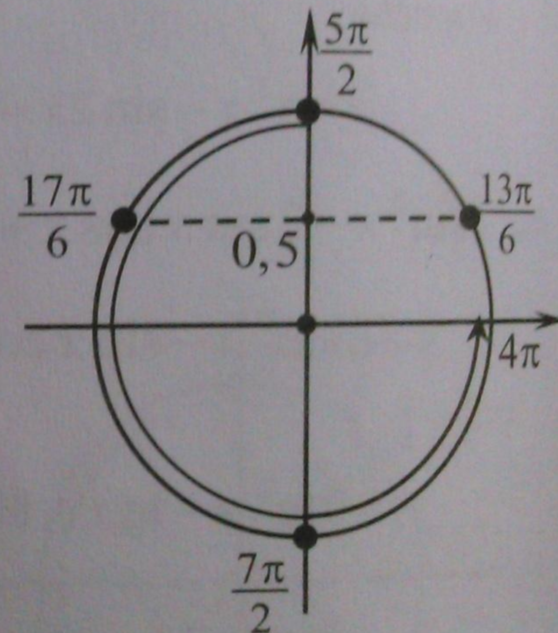
Решение. Решим уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x \Leftrightarrow \sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\ x=\frac{5\pi}{6}+5\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Изобразим на единичной окружности отрезок $[2{,}5\pi;\,4\pi]$ и точки, соответствующие найденным решениям (см. рис.).

Искомые корни суть числа $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$.



Ответ: А) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$.

Примеры экзаменационных заданий №5

С1105. Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x = 1$. Укажите корни, лежащие в отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$.

Решение. Используя тождество $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем:

$$6\sin^2 x + 7\cos x = 1 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{5}{3}; \\ \cos x = -0,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = -0,5.$$

Откуда $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ n,\ k \in \mathbb{Z}$.

3 3

Найдем корни, принадлежащие заданному отрезку. Для этого решим войные неравенства $-\pi \le x \le 2\pi$:

$$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le n \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0; \\ n = 1 \end{array}\right.$$

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Подставляя найденные значения параметров ходим лежащие в отрезке корни: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Отрезку принадлежат корни $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Примеры экзаменационных заданий №6

РАССМОТРИМ РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ОТБОРОМ РЕШЕНИЙ

С1006. Решите уравнение $|\sin x| = 3\sin x - 2\cos x$.

Решение. Уравнение $|\sin x| = 3\sin x - 2\cos x$ равносильно совокупности систем, содержащих однородные тригонометрические уравнения первой степени:

$$\begin{cases} \sin x = 3\sin x - 2\cos x, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -\sin x = 3\sin x - 2\cos x, \\ \sin x < 0. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем:

Решим каждую из этих систем:

$$\begin{cases}\sin x = 3\sin x - 2\cos x,\\ \sin x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x = 1,\\ \sin x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

и

$$\begin{cases}-\sin x = 3\sin x - 2\cos x,\\ \sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2},\\ \sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}.$

Примеры экзаменационных заданий №7

С1007. Решите уравнение $\dfrac{2+2\sin^2 x}{\sin x+\cos x}=3\sin x.$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\frac{2+2\sin^2 x}{\sin x+\cos x}=3\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2\sin^2 x=3\sin^2 x+3\sin x\cos x, \\ \sin x+\cos x\neq 0. \end{cases}$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаем систему

$$\begin{cases} 2(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin^2 x=3\sin^2 x+3\sin x\cos x, \\ \sin x+\cos x\neq 0, \end{cases}$$

содержащую однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Далее имеем:

содержащую однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Далее имеем:

$$\begin{cases} 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x = 3\sin^2 x + 3\sin x\cos x, \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1; \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k; \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Примеры экзаменационных заданий №8

С1108. Решите уравнение $\sin^2 x \sin 5x = 1$.

Решение. Так как $\sin^2 x \leq 1$ и $\sin 5x \leq 1$, уравнение $\sin^2 x \sin 5x = 1$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем.

Подставив решения первого уравнения первой системы $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ во второе уравнение этой системы, получим верное для всех целых значений k равенство $\sin(2{,}5\pi + 10\pi k) = 1$. Следовательно, числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ – решения первой системы.

Аналогично, подставив решения первого уравнения второй системы $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ во второе уравнение этой системы, получим неверное ни для каких целых значений k равенство $\sin(-2{,}5\pi + 10\pi k) = 1$. Следовательно, числа $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ не являются решениями этой системы.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$