Методическая разработка урока по алгебре в 10 классе «Производная и ее применение»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА УРОКА АЛГЕБРЫ В 10 КЛАССЕ

«ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ»

- *Цели:*
- Образовательные: рассмотреть применение производной в
- заданиях В-8, В-14 (ЕГЭ), вырабатывать у учащихся практические
- умения и навыки по применению производной.
- Развивающие: способствовать дальнейшему развитию
- математически грамотной речи, внимания, наблюдательности,
- самоконтроля, исследовательских навыков учащихся,
- математического и логического мышления, активизации
- познавательской деятельности.
- Воспитательные: воспитывать аккуратность,
- дисциплинированность, способность самостоятельно принимать
- решения.
- *Место урока в системе уроков по теме*: обобщающий урок по
- теме
- «Производная и ее применение»
- *Тип урока*: комбинированный
- *Формы урока*: фронтальные, индивидуальные
- *Оборудование:* компьютер, проектор, карточки с проверочной
- работой, доска, мел.

СТРУКТУРА УРОКА:

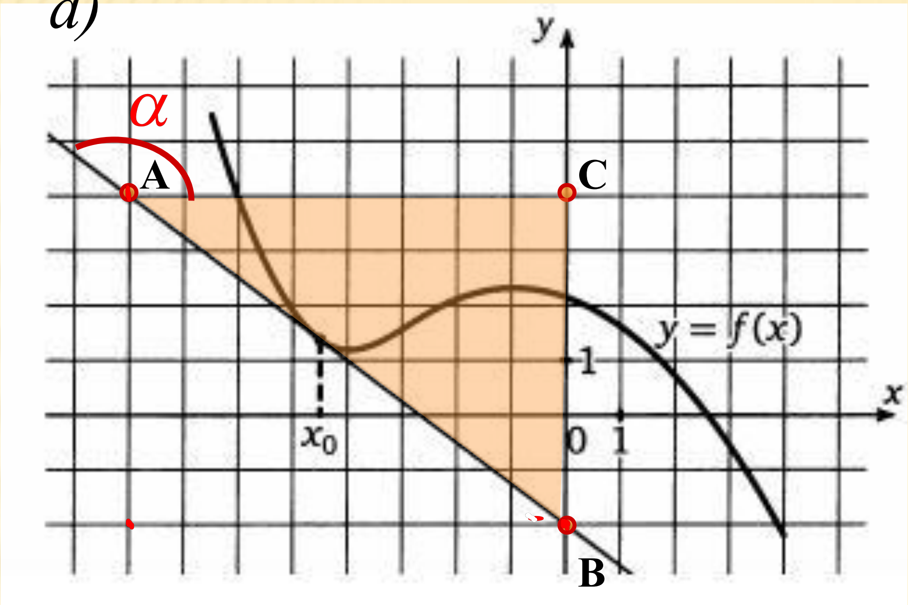
- 1. Организационный момент
- 2. Устные задания
- 3. Проверочная работа
- 4. Отработка навыков по применению изученного материала
- 5. Презентация самостоятельно выполненных заданий
- 6. Исторические сведения о производной, ее применение
- 7. Домашнее задание
- 8. Подведение итогов

ХОД УРОКА
1. ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ МОМЕНТ
2. УСТНЫЕ ЗАДАНИЯ (РАССМОТРЕТЬ РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЗАДАНИЙ В-8 (ЕГЭ))

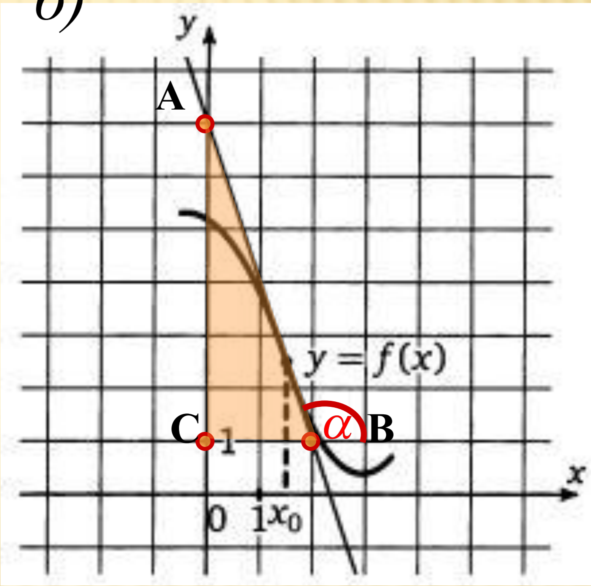
- 1)Найти значение производной в точке х
- 2)Определить количество целых значений х, в которых функция положительна
- 3)Найти количество точек, в которых производная равна 0
- 4)Найти количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой
- у=с
- 5)Найти точку экстремума функции
- 6)Найти количество точек экстремума функции
- 7)Найти длину наибольшего из промежутков возрастания
- 8)Найти количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой
- у=кх+в

Задача 1.3. **На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.**

а)



б)



Решение.

$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

$$tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{BC}{AC} = -\frac{6}{8} = -0,75.$$

Ответ: - 0,75 .

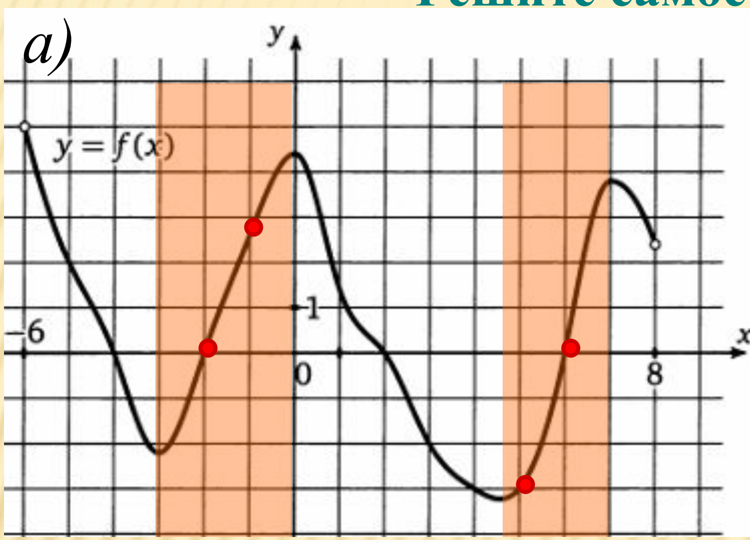
$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

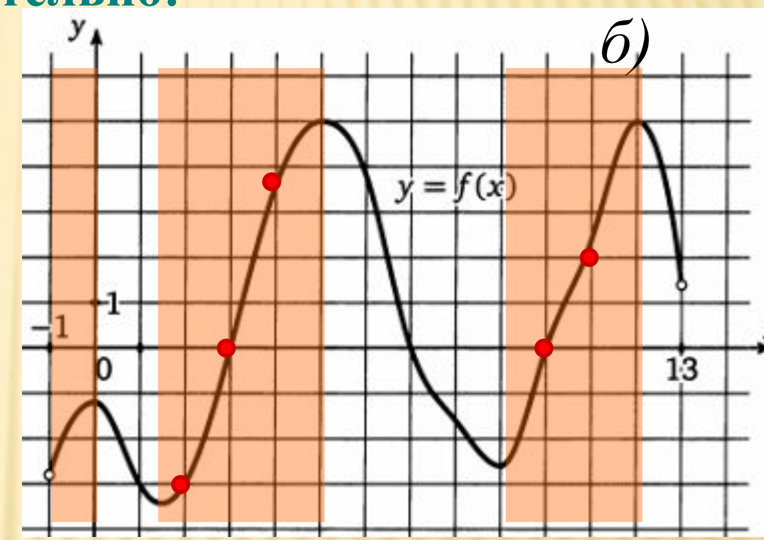
$$tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{AC}{BC} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Ответ: - 3 .

Задача 3.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a;b)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решите самостоятельно!





Решение.

$f'(x) > 0$, если $f(x)$ возрастает.

Целые решения при :

x=-2; x=-1; x=5; x=6.

Их количество равно 4.

Ответ: 4.

Целые решения при :

x=2; x=3; x=4; x=10; x=11.

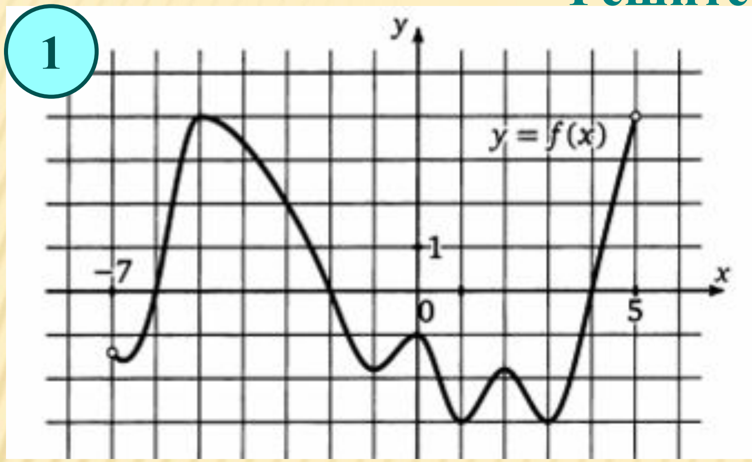
Их количество равно 5.

Ответ: 5.

Задача 4.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $y = f(x)$ равна 0.

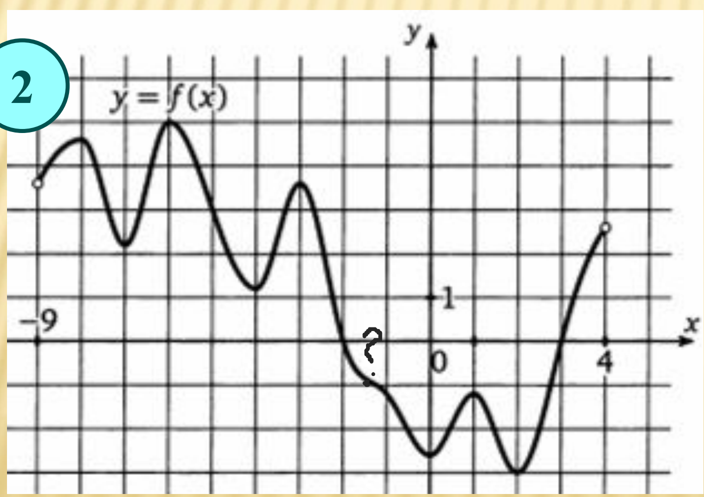
Решите устно!

1



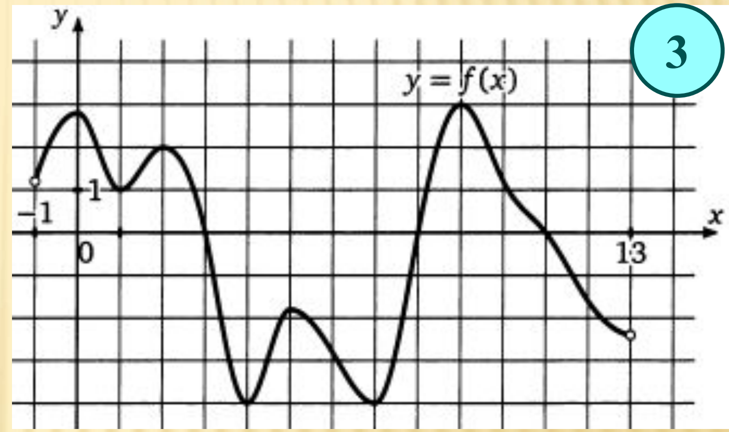
Ответ: 7.

2



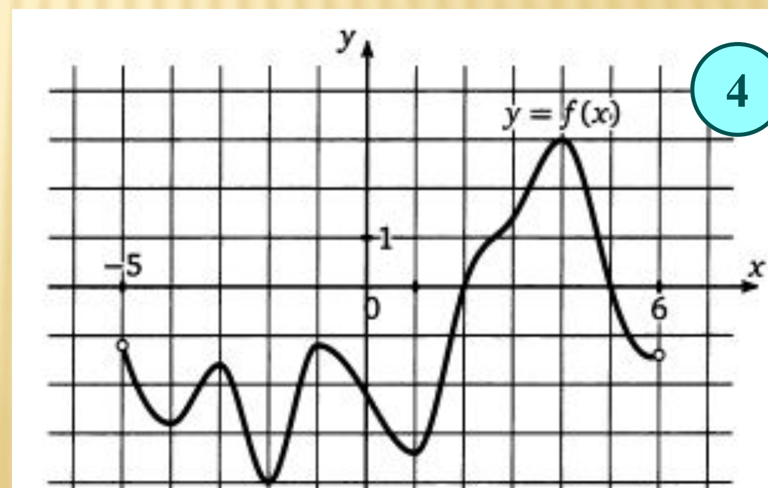
Ответ: 8. ?

3



Ответ: 7.

4

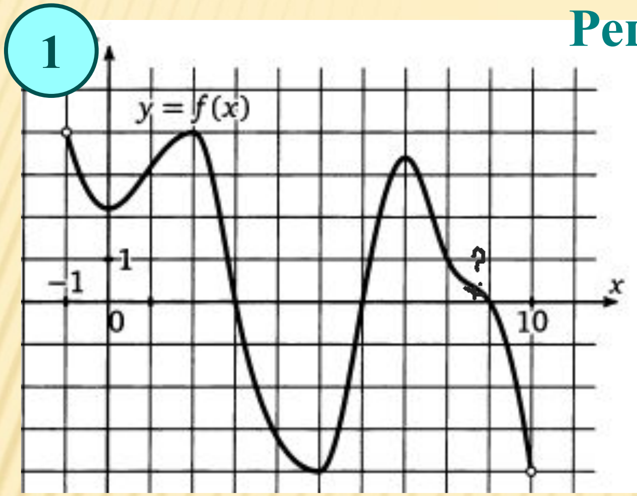


Ответ: 6.

Задача 5.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = c$.

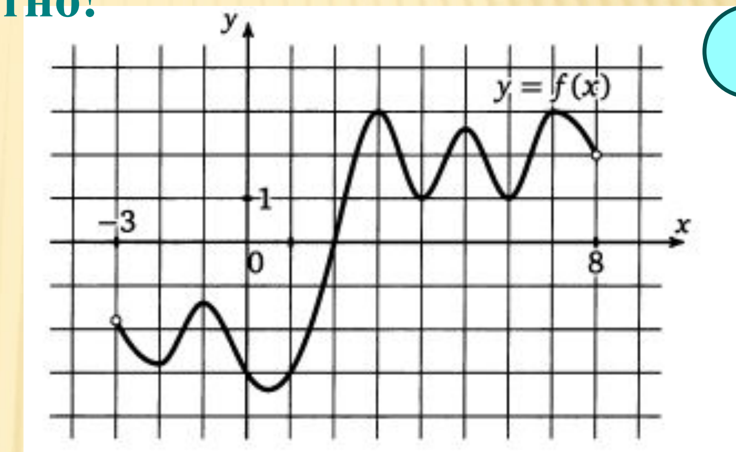
Решите устно!

1



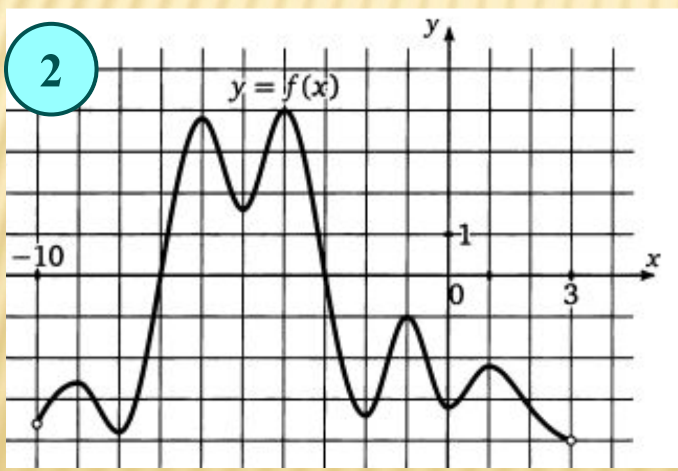
Ответ: 4.?

3



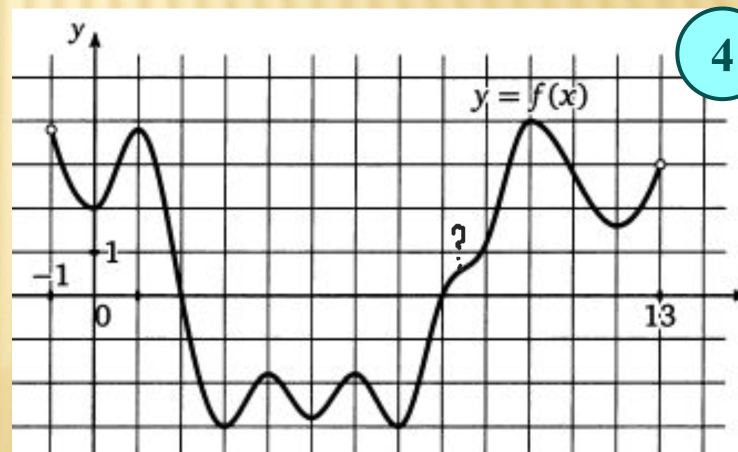
Ответ: 8.

2



Ответ: 9.

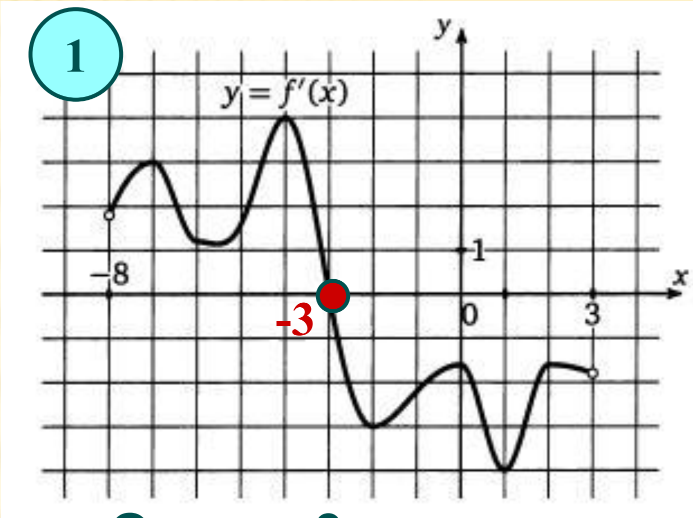
4



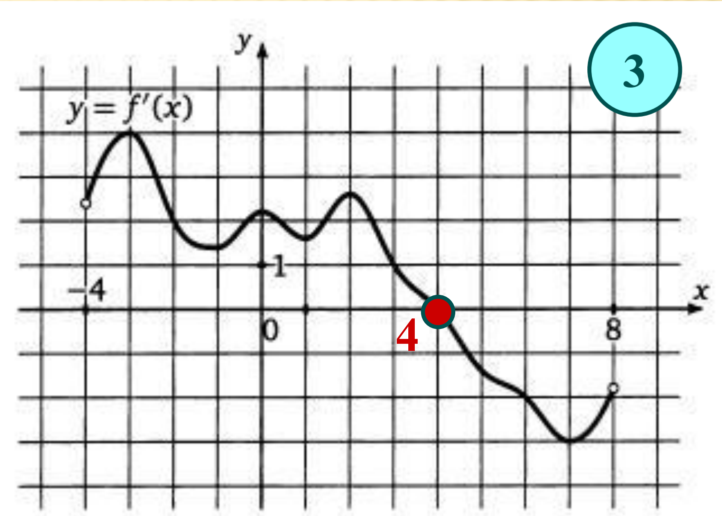
Ответ: 9.?

Задача 6.2. **На рисунке изображен график производной функции *f (x)*, определенной на интервале (*a; b*). Найдите точку экстремума функции *f (x)* .**

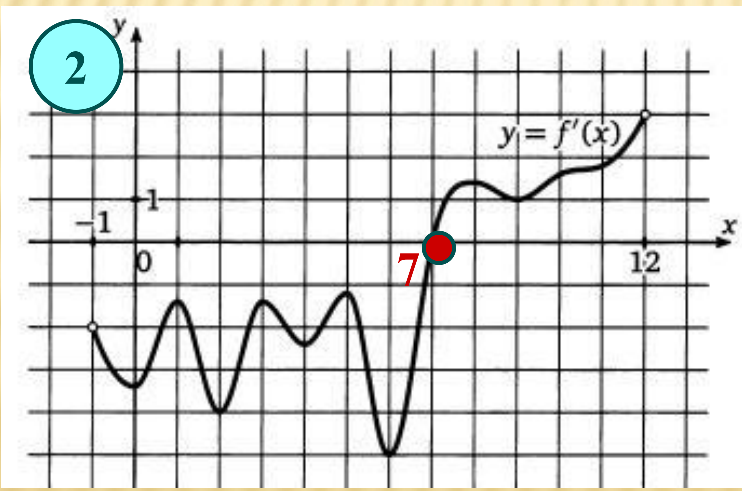
Решите устно!



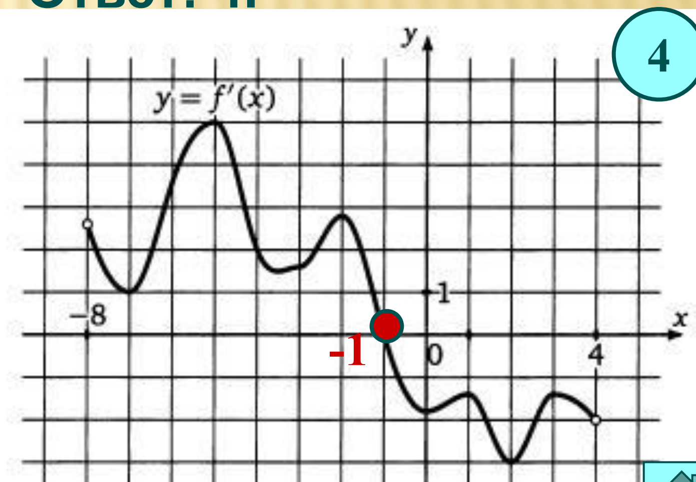
Ответ: -3.



Ответ: 4.

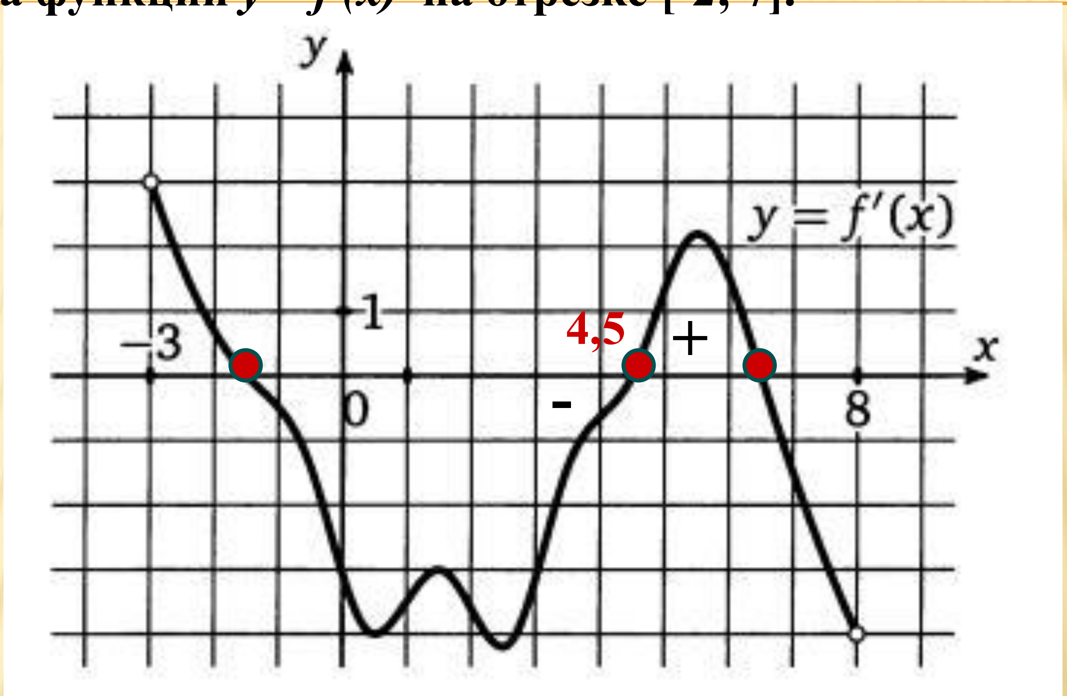


Ответ: 7.



Ответ: -1.

Задача 7.1. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-3; 8). Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$ на отрезке [-2; 7].

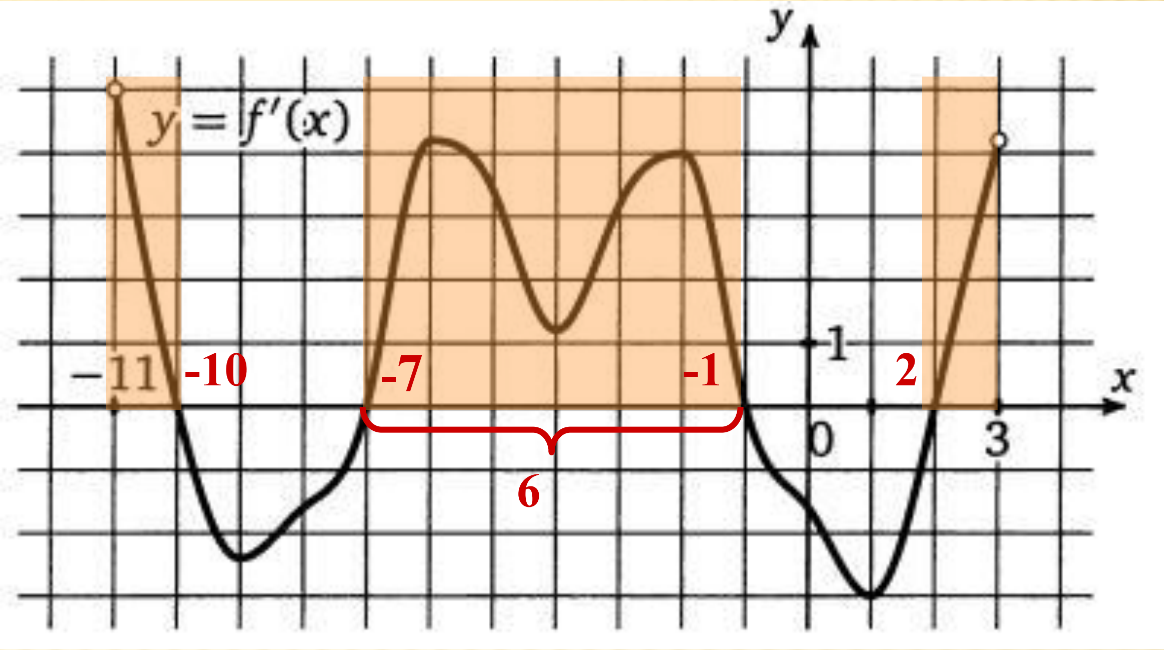


Решение.

В точке минимума производная функции равна нулю либо не существует. Видно, что таких точек на отрезке [-2; 7] три: —1,5; 4,5; 6,5. При этом в точке 4,5 производная слева отрицательна, а справа положительна, значит, это точка минимума. В точках -1,5 и 6,5 производная меняет знак с «+» на «—» это точки максимума.

Ответ: 1 .

Задача 8.1. На рисунке изображен график производной функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение.

В этой задаче необходимо сначала найти промежутки возрастания функции, т. е. промежутки на которых $f'(x) > 0$.

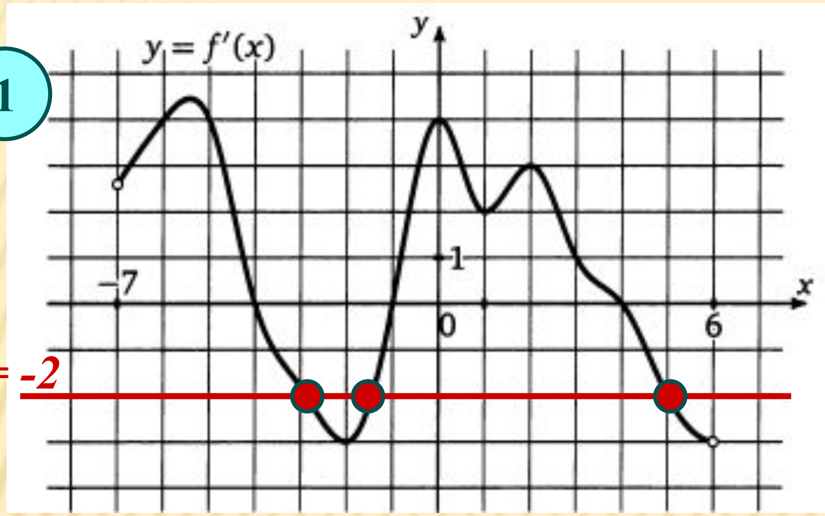
В нашем случае их три: (-11; -10), (-7; -1) и (2; 3), наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток (-7; -1), его длина равна:
-1-(-7) = 6.

Ответ: 6 .

<u>Задача 9.2.</u> **На рисунке изображен график производной функции** ***f(x)*****, определенной на интервале (*x_1*; *x_2*). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции** ***f(x)*** **параллельна прямой** ***y = -2x + 7*** **или совпадает с ней.**

1

y = -2



Решение.

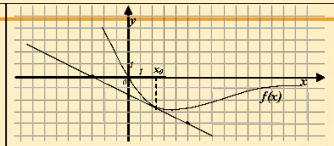
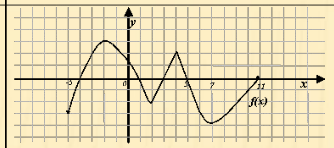
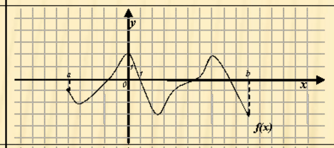
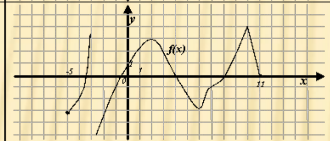
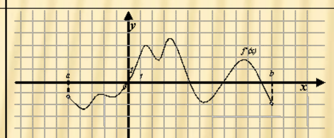
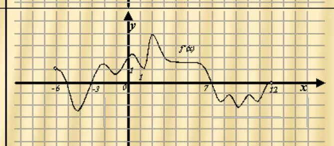
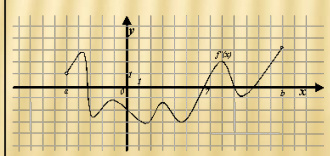
Касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой *y* = -2*x*+7 или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен -2.

Найдем количество точек, в которых *f′(x)*= -2.

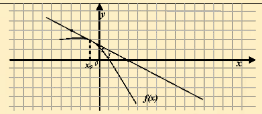
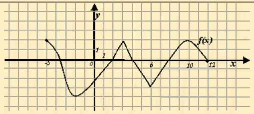
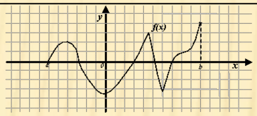
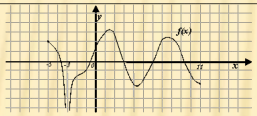
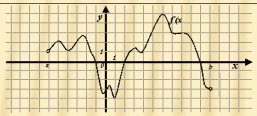
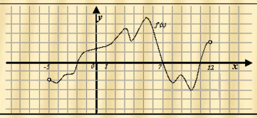
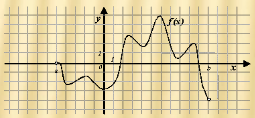
Ответ: 3 .

2

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА

1.		Найдите значение производной функции в точке x_0 по рисунку с изображенным графиком функции $y=f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой x_0
2.		На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ определенный на [-5;11]. Определите количество целых значений x, в которых $f'(x) < 0$
3.		На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ на [a;b]. Найдите количество точек, в которых $f'(x)=0$
4.		На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ на [-5;-3)U(-3;11]. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=C$
5.		На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$ на (a;b). Найдите количество точек максимума
6.		Функция определена на отрезке [-6;12]. На рисунке изображен график ее производной. Укажите длину наибольшего из промежутков возрастания функции.
7.		На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=-2x+1$ или совпадает с ней.

ВАРИАНТ 2

1.		На рисунке изображен график функции и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.
2.		На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ определенный на [-5;12]. Определите количество целых значений x, при которых $f'(x)>0$
3.		На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ на [a;b]. Найдите количество точек, в которых $f'(x)=0$
4.		На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ на [-5;-3)U(-3;11]. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=C
5.		На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$ на (a;b). Найдите количество точек минимума.
6.		Функция определена на отрезке [-5;12]. На рисунке изображен график ее производной. Укажите длину наименьшего из промежутков убывания функции.
7.		На рисунке изображен график производной функции f(x). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=x+5 или совпадает с ней.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА

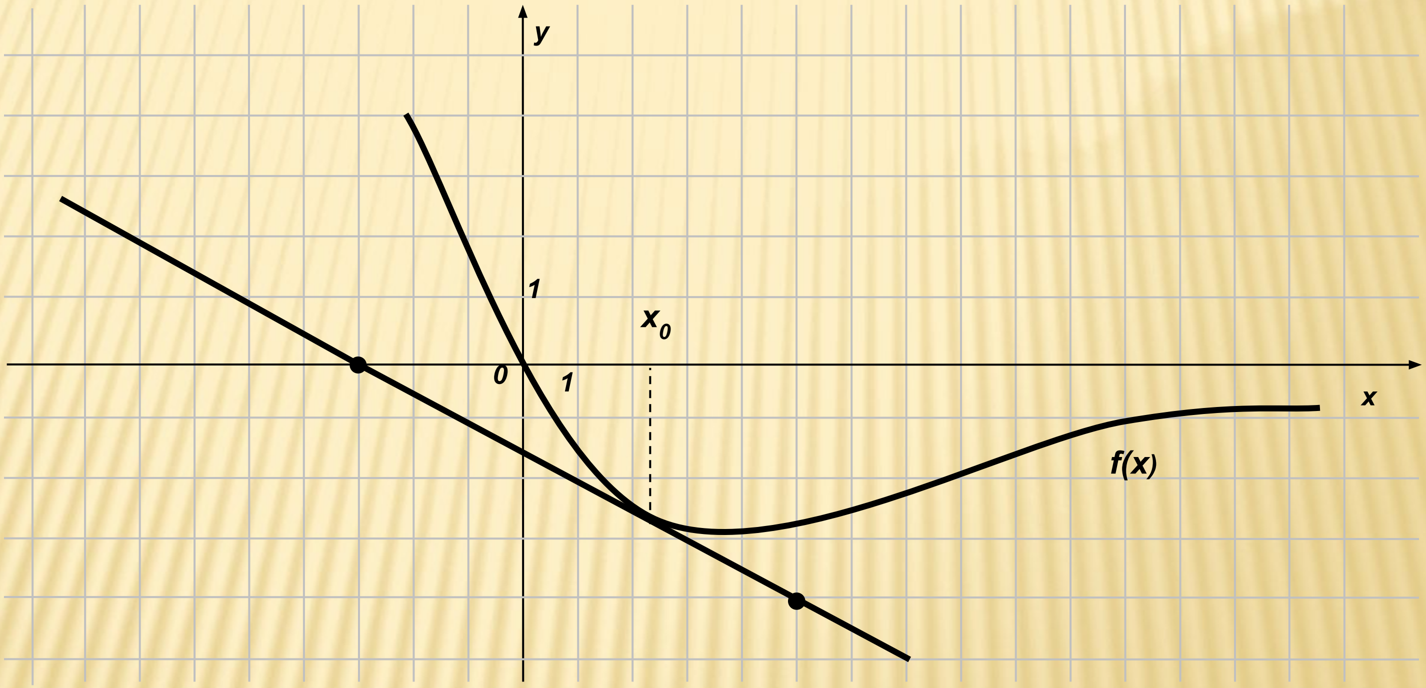
Вариант 1		Вариант 2	
1.	-0,5	1.	-0,5
2.	5	2.	8
3.	5	3.	3
4.	3	4.	4
5.	2	5.	1
6.	10	6.	3
7.	6	7.	4

Ответы

Вариант 1

1.

Найдите значение производной функции в точке x_0 по рисунку с изображенным графиком функции $y=f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой x_0



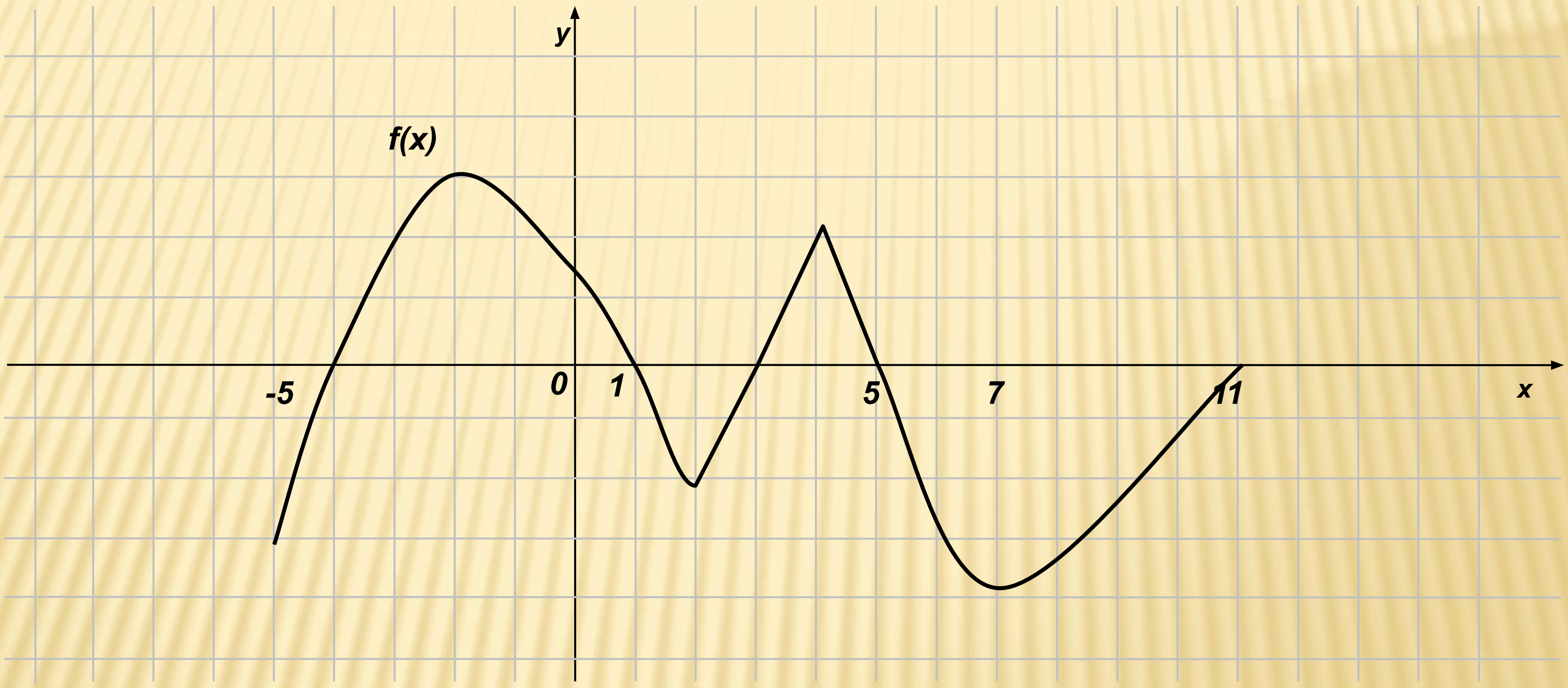
Введите ответ:

далее

2

Вариант 1

На рисунке изображен график функции y=f(x) определенный на [-5;11]. Определите количество целых значений x, в которых f'(x) < 0



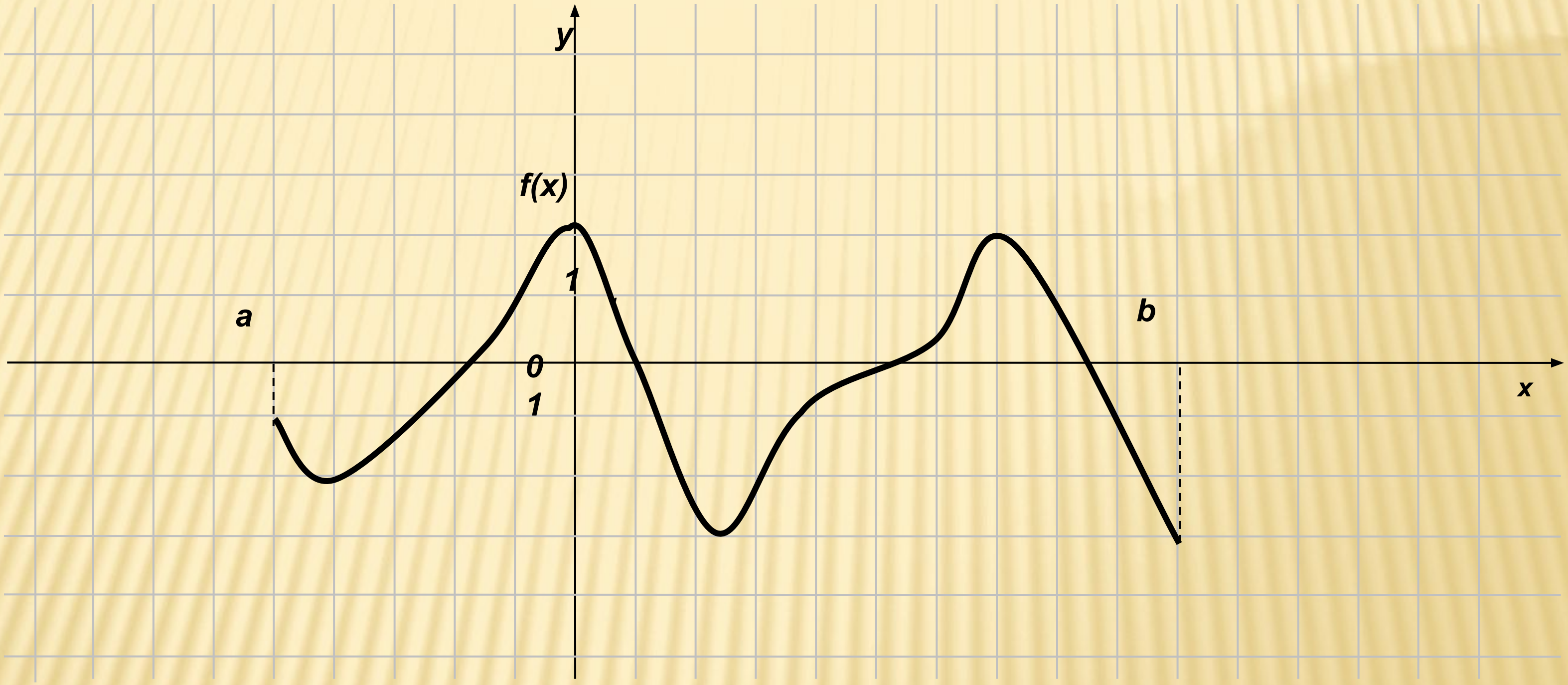
Введите ответ:

далее

3

Вариант 1

На рисунке изображен график функции y=f(x) на [a;b]. Найдите количество точек, в которых f'(x) =0



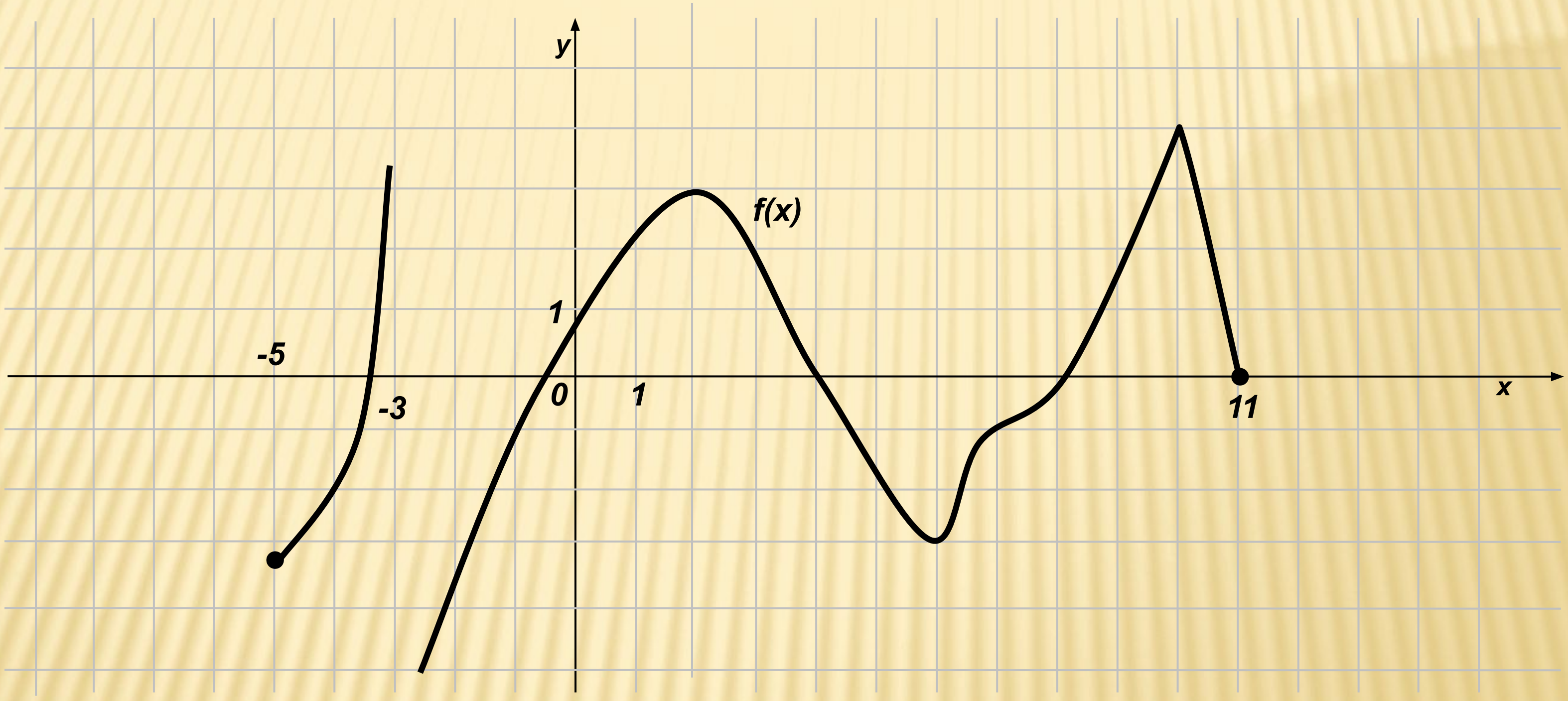
Введите ответ:

далее

Вариант 1

4.

На рисунке изображен график функции y=f(x) на [-5;-3)U(-3;11]. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=C.



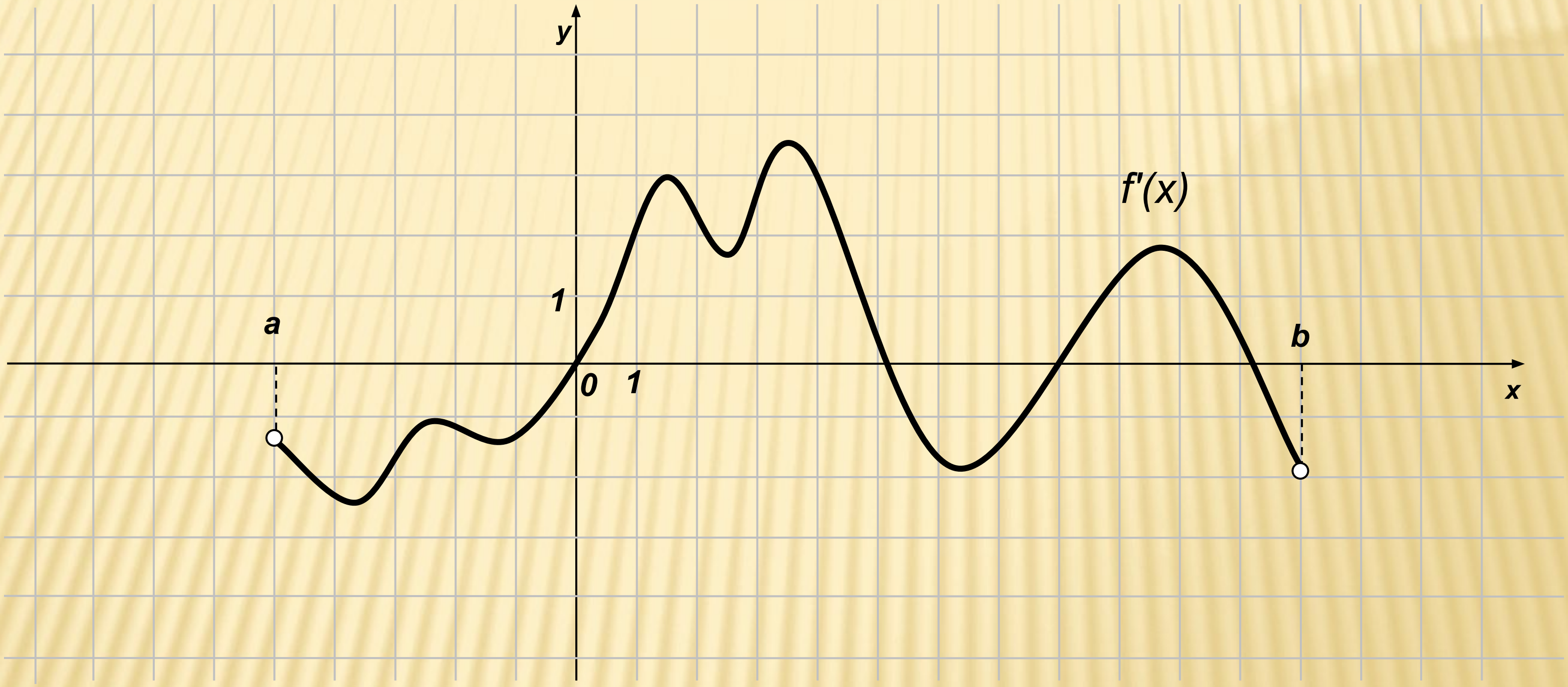
Введите ответ:

далее

Вариант 1

5.

На рисунке изображен график производной функции y=f'(x) на (a;b). Найдите количество точек максимума.



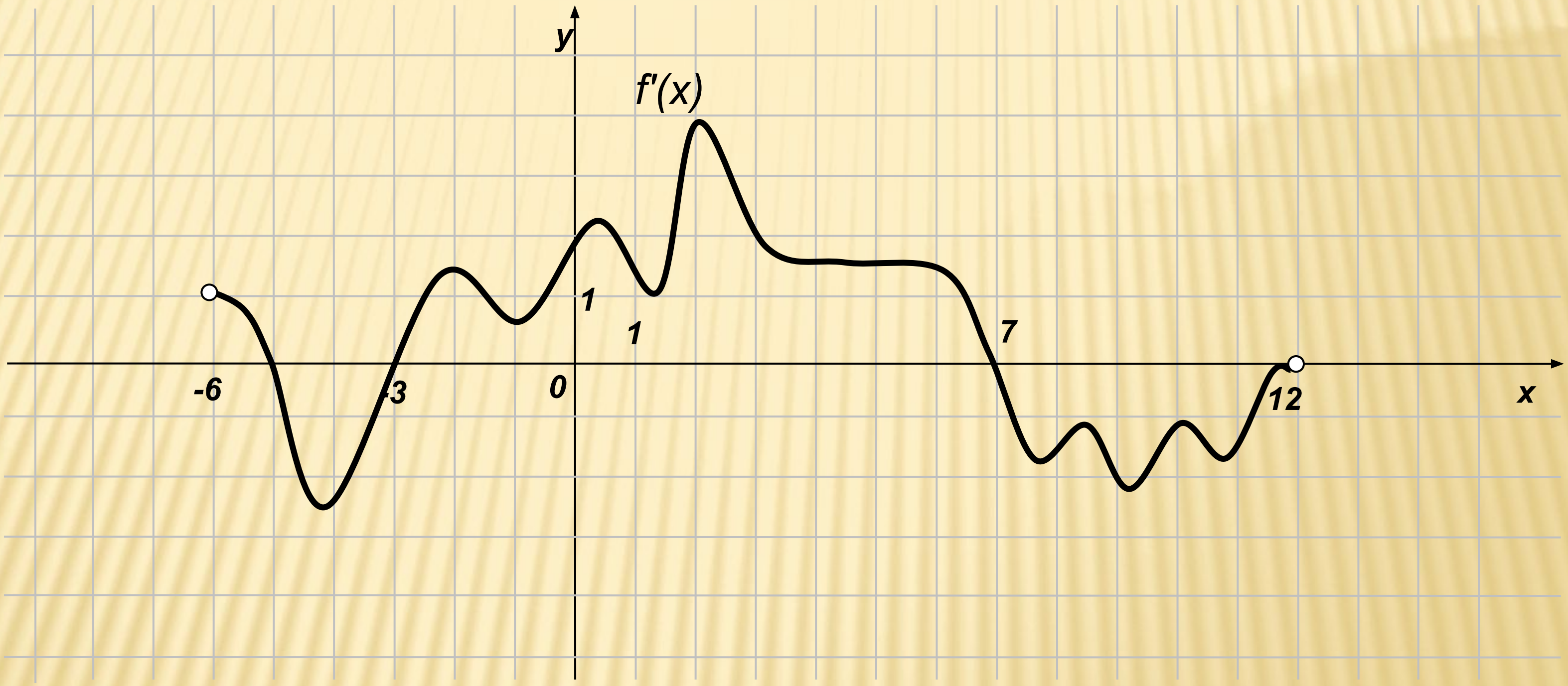
Введите ответ:

далее

6

Вариант 1

Функция определена на отрезке [-6;12]. На рисунке изображен график ее производной. Укажите длину наибольшего из промежутков возрастания функции.



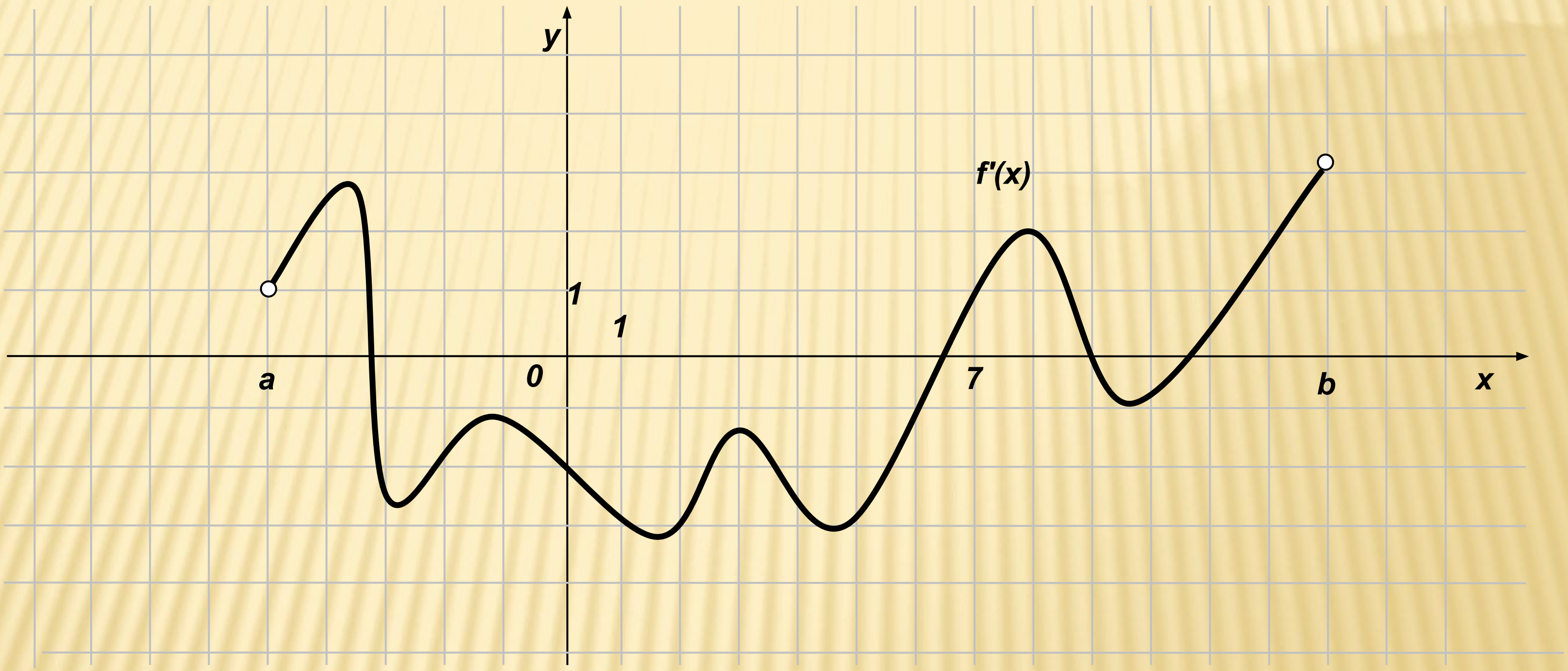
Введите ответ:

далее

Вариант 1

7.

На рисунке изображен график производной функции f(x). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y= -2 x +1 или совпадает с ней.



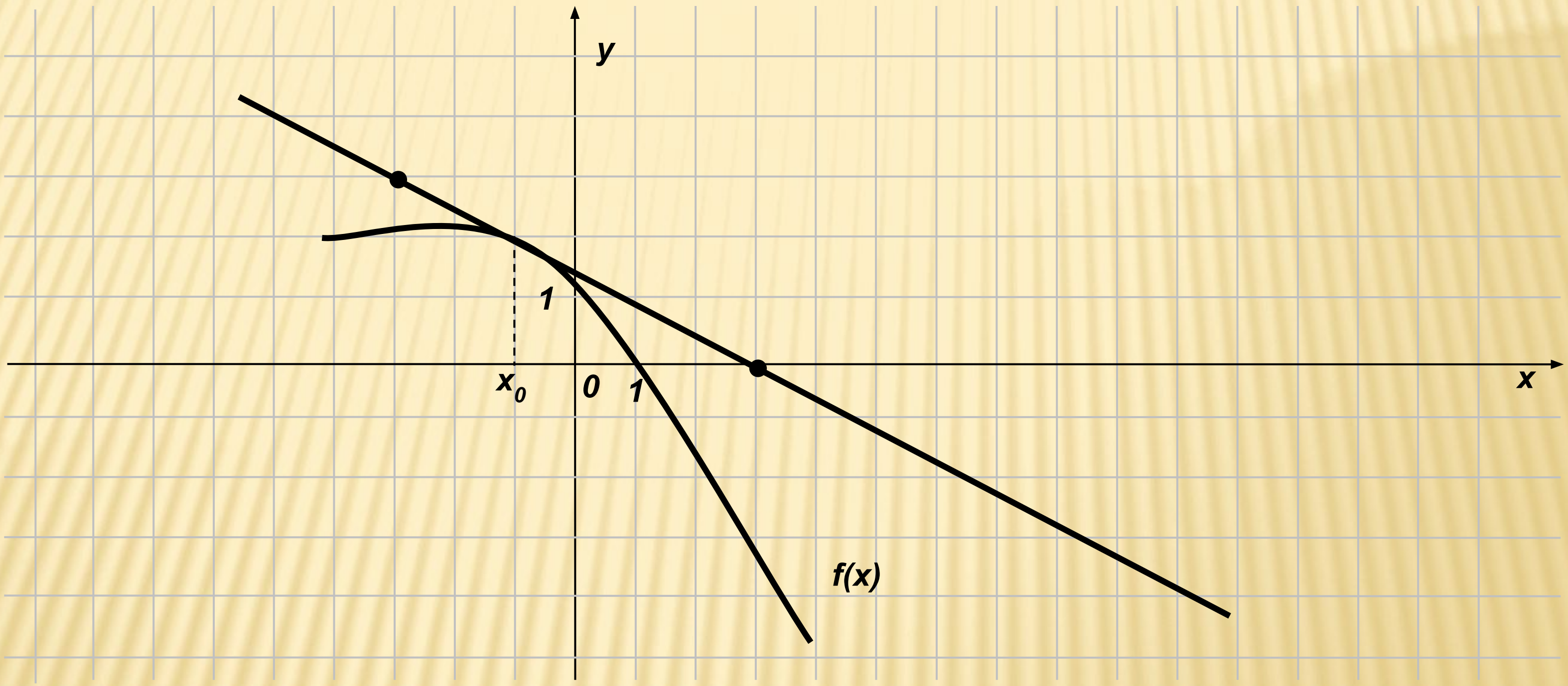
Введите ответ:

далее

1

Вариант 2

На рисунке изображен график функции и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



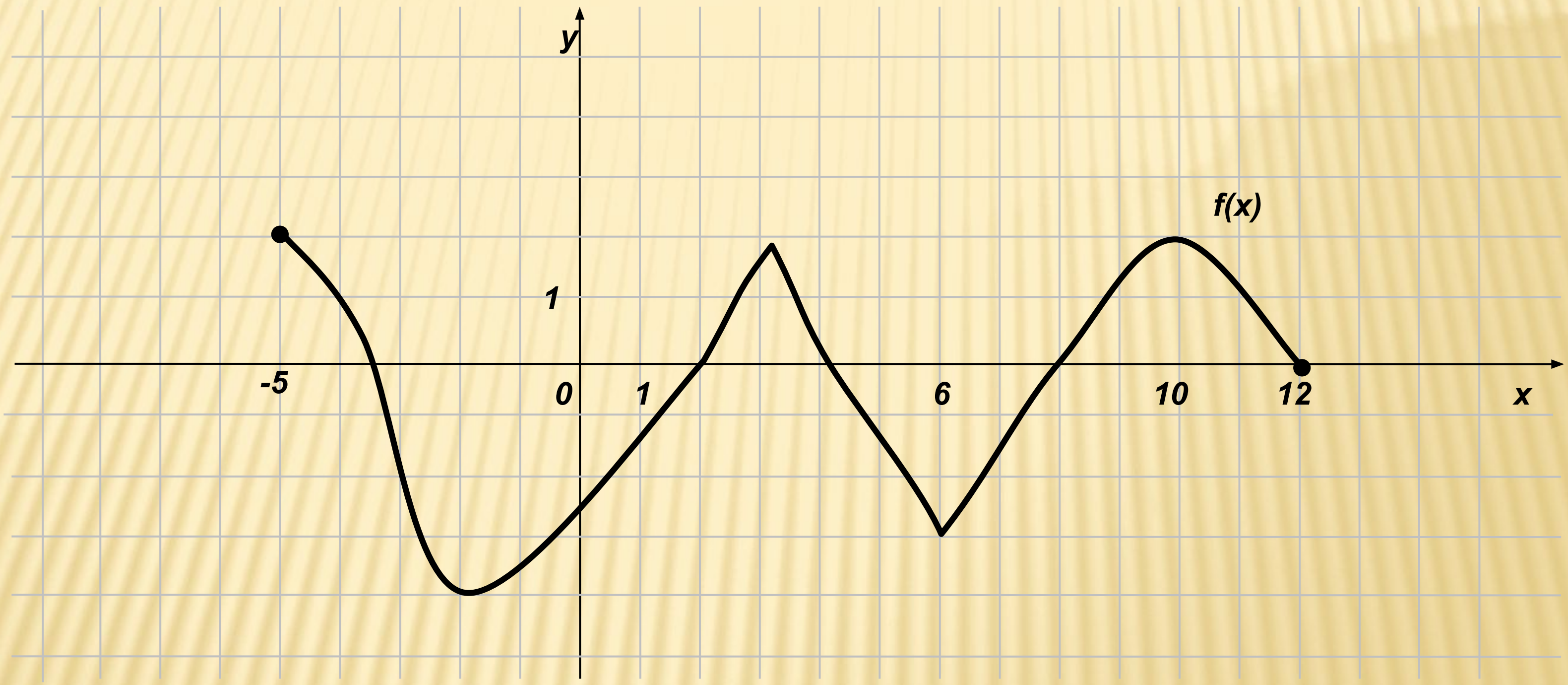
Введите ответ:

далее

Вариант 2

2

На рисунке изображен график функции y = f(x) определенный на [-5;12]. Определите количество целых значений x, при которых f'(x)>0



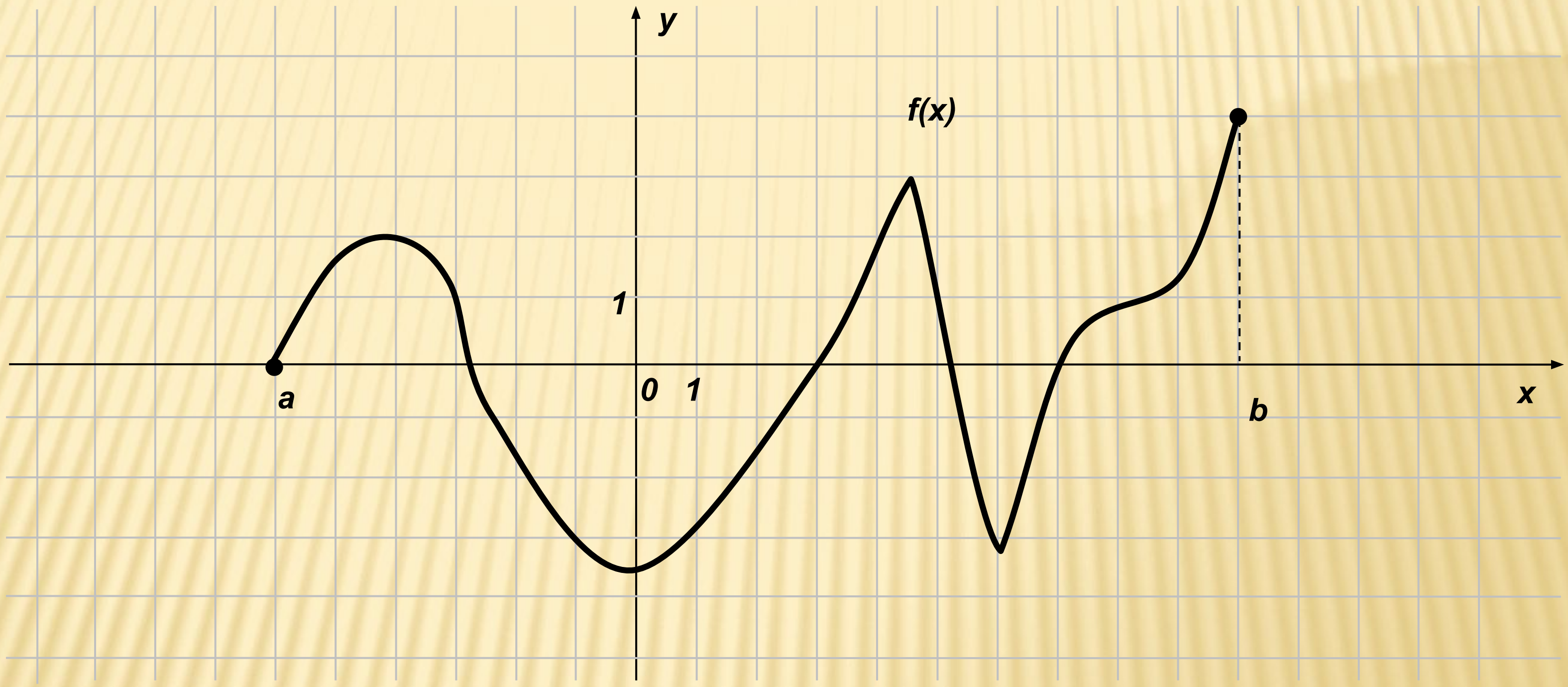
Введите ответ:

далее

Вариант 2

3.

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ на $[a;b]$. Найдите количество точек, в которых $f'(x)=0$



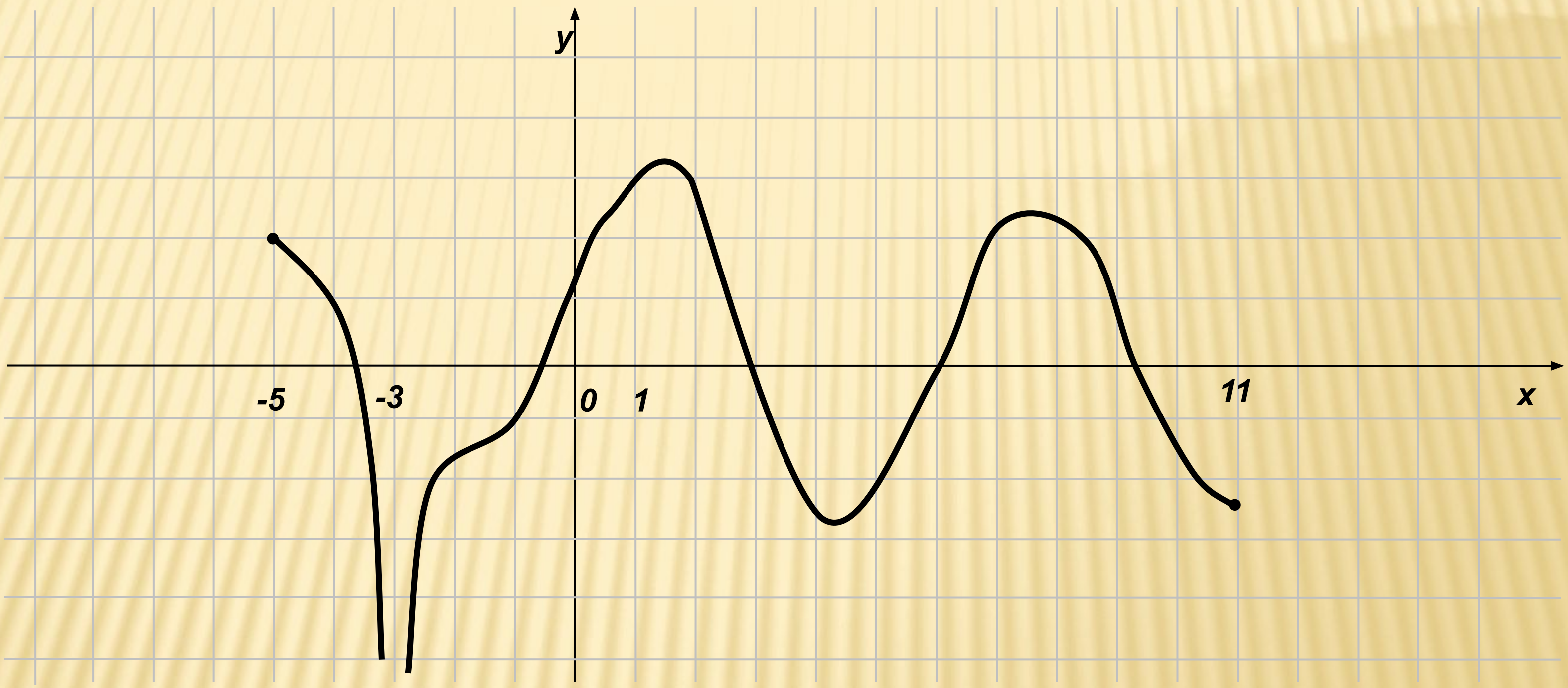
Введите ответ:

далее

Вариант 2

4.

На рисунке изображен график функции *y=f(x)* на [-5;-3)U(-3;11]. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=C



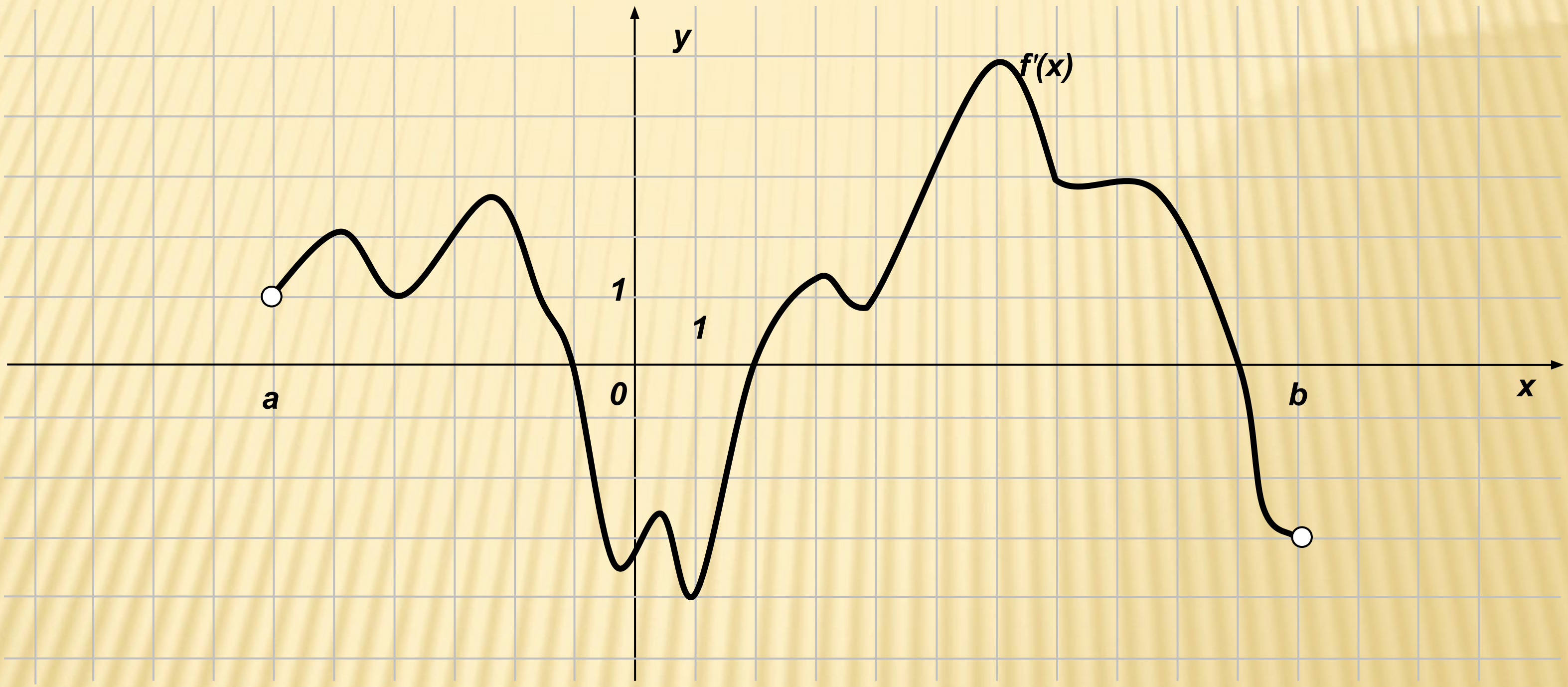
Введите ответ:

далее

5

Вариант 2

На рисунке изображен график производной функции y=f'(x) на (a;b). Найдите количество точек минимума.



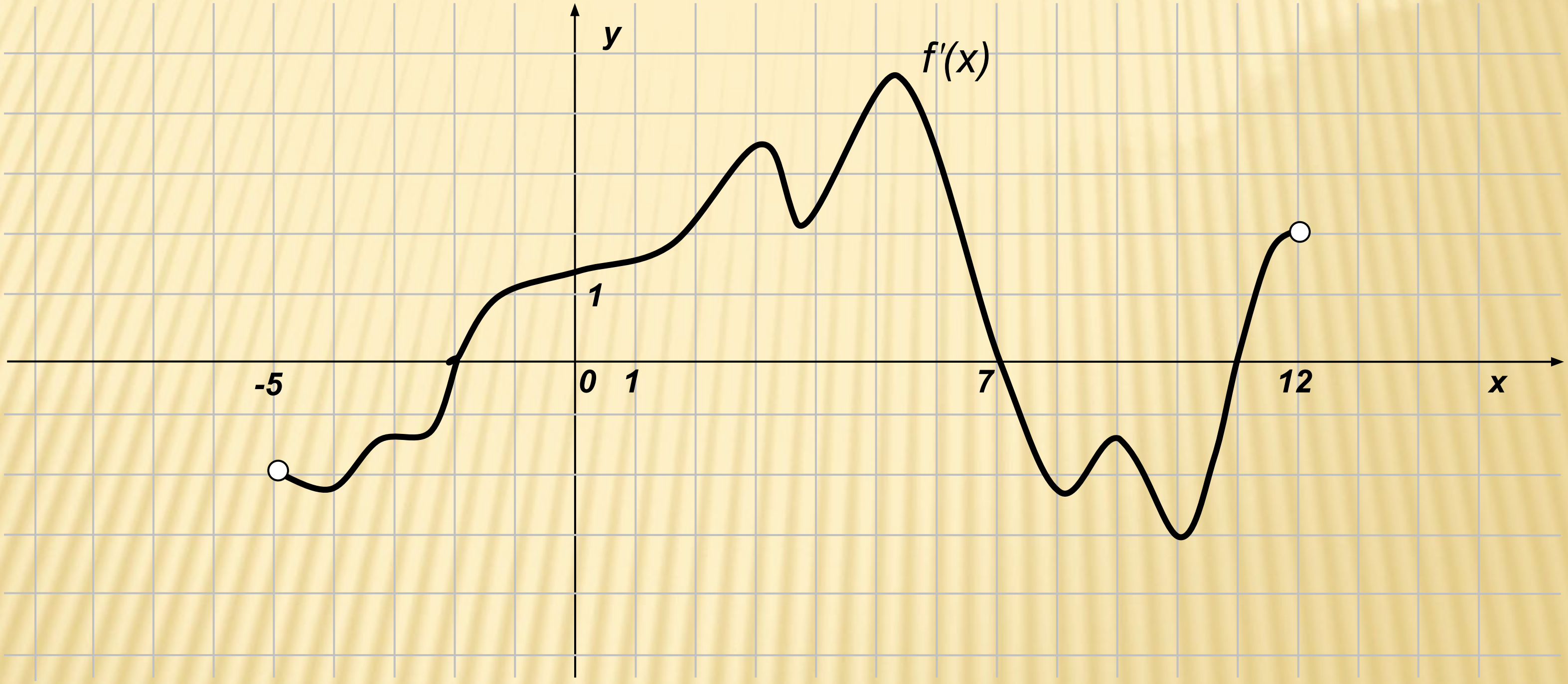
Введите ответ:

далее

Вариант 2

6.

Функция определена на отрезке [-5;12]. На рисунке изображен график ее производной. Укажите длину наименьшего из промежутков убывания функции.



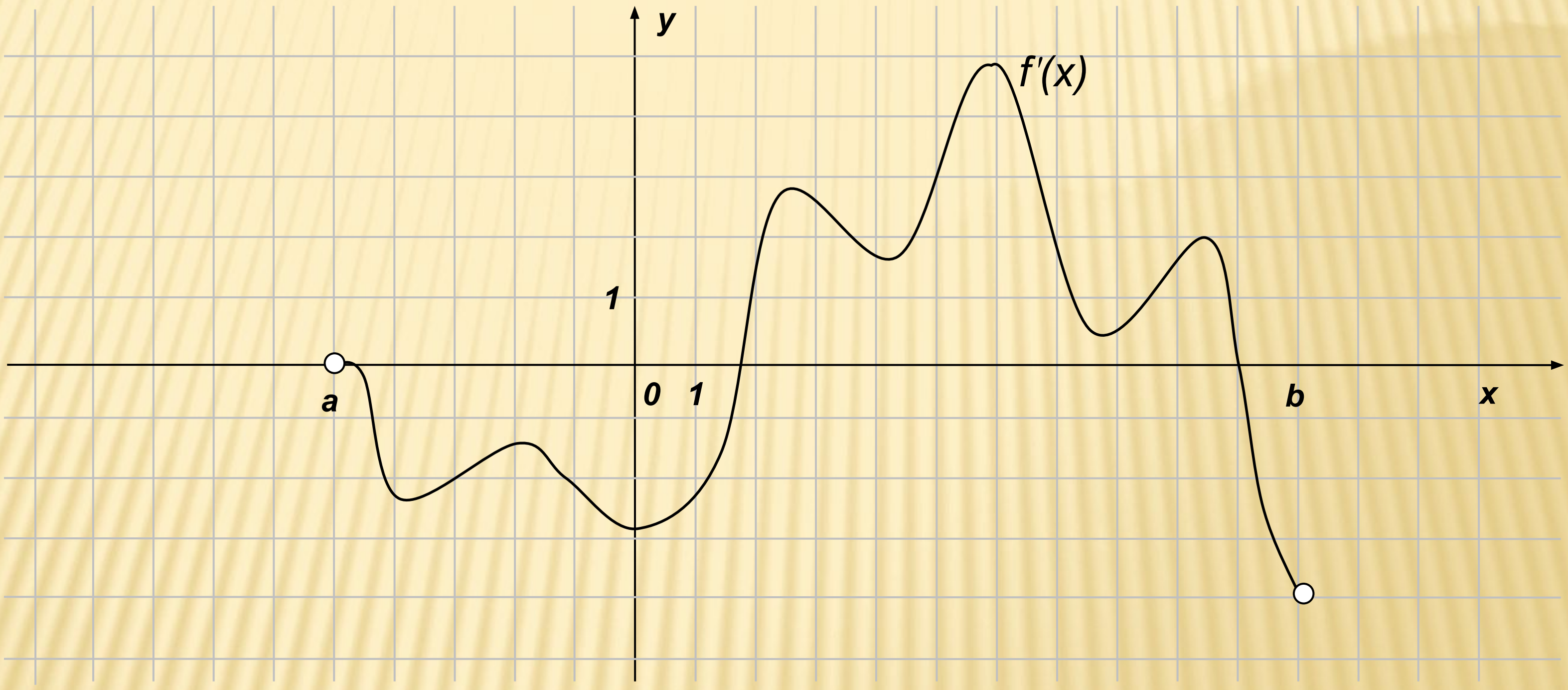
Введите ответ:

далее

7

Вариант 2

На рисунке изображен график производной функции f(x). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=x+5 или совпадает с ней.



Введите ответ:

далее

РАССМОТРЕТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ (В-14), НАПРИМЕР: ДАННОЕ ЗАДАНИЕ ИЛИ ОДНО ИЗ ПРЕДЛОЖЕННЫХ ДАЛЬШЕ

- Найдите наименьшее значение
- функции у=3+5$\pi/4$-5х-5$\sqrt{2}\cos x$
- на $[0;\pi/2]$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1.

Найдите наибольшее значение функции
y = ln(x+5)^5 – 5x на отрезке [-4,5; 0]

1. Найти f $'$(x)

y = 5ln(x+5) – 5x

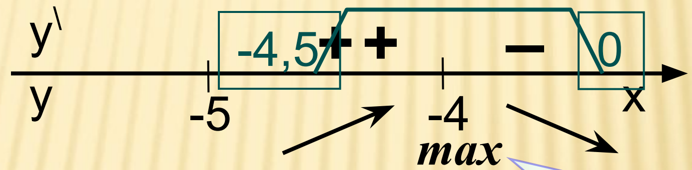
Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y' = 5\cdot\frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x-20}{x+5} = -\frac{5(x+4)}{x+5}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

x = -4 $\in$ [-4,5; 0]

Можно рассуждать иначе



Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

3. Вычислить значения функции в критических точках
~~и на концах отрезка.~~

0

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5\cdot(-4) =$$
$$= 0 + 20 = 20$$

~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.~~

Ответ: 20

назад

$(cosx)' = -sinx$

2

Найдите наибольшее значение функции
y = 7cosx +16x – 2 на отрезке [-3π/;0]

1. Найти f '(x)

$$y' = -7\sin x + 16$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что y ' > 0.
Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16\cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

назад

Ответ: 5

$(\sin x)' = \cos x$

3

Найдите наибольшее значение функции

y = 10sinx – $\frac{36}{\pi}$ x + 7 на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\,0\right]$

1. Найти f $'$(x)

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \cos x \in [-1;1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка! Как?

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10\cdot\frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус –нечетная функция

Формула приведения

0

$$y(0) = 10\sin 0 - 0 + 7 = 7$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: 32

назад

$(\cos x)' = -\sin x$

4

Найдите наименьшее значение функции

y = 5cosx – 6x + 4 на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

1. Найти f $'$(x) $\quad y' = -5\sin x - 6$

Функция на всей области определения убывает. Нетрудно догадаться, что y $'$ < 0.
Тогда наименьшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-5\sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 9\pi + 4$$

1

$$y(0) = 5\cos 0 - 0 + 4 = 9$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наименьшее.

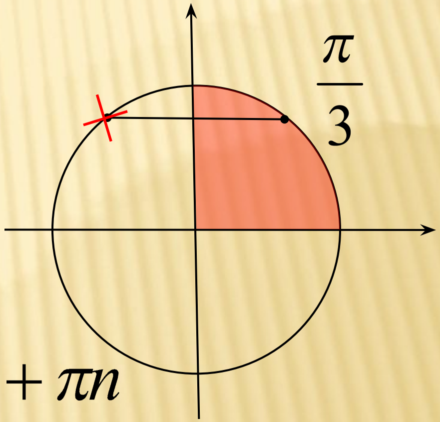
Ответ: 9

назад

4 Найдите наибольшее значение функции

$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1. Найти $f'(x)$ $\quad y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$



2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + \sqrt{3}\pi$$

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y(0) = 12\cos 0 + 6\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$$

Ответ: 12

назад

ПРЕЗЕНТАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНО ВЫПОЛНЕННЫХ ЗАДАНИЙ

- Найдите наименьшее значение
- функции у=13 $\cos x$-15х+7
- на $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. (1 вариант)

- Найдите наибольшее значение
- функции у=2 $\tan x$-2х+5
- на $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$. (2 вариант)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

Найдите наименьшее значение функции **$y= 13\cos(x)-15x+7$** на $[-3\pi/2;0]$

Решение

$y' = -13\sin(x)-15$

$y' = 0$ $\quad -13\sin(x)-15=0$

$\sin(x)=-15/13<-1$

Критических точек нет, т.к $|\sin(x)|\le 1$

Находим значение функции на границах промежутка

$y(-3\pi/2)= 13\cos(-3\pi/2)-15*(-3\pi/2)+7$

$y(-3\pi/2)=45\pi/2+7$

$y(0)= 13\cos(0)-15*0+7=20$

$20<45\pi/2+7$

<u>Ответ</u>: Наименьшее значение функции

20

Вариант 2

Найдите наибольшее значение функции **$y= 2tg(x)-2x+5$** на $[-\pi/4;0]$

Решение

$y' = 2/\cos^2(x)-2$

$y' = 0$ $\quad 2/\cos^2(x)-2=0$

$\cos^2(x)= 1$ $\quad \cos(x)=1$ или $\cos(x)=-1$

$x=0$ *<u>единственная</u> точка принадлежащая $[-\pi/4;0]$*

$y(0)= 5$

Находим значение функции на границах промежутка

$y(0)= 5$

$y(-\pi/4)= y= 2tg(-\pi/4)-2*(-\pi/4)+5$

$y(-\pi/4)=3+\pi/2 < y(0)= 5$

<u>Ответ</u>: Наибольшее значение функции

5

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

- Российский математик Х1Х века П.Л.Чебышев говорил: «Особую важность имеют те методы науки, которые позволяют решать практические задачи».
- С такими задачами в наше время приходится иметь дело
- представителям самых разных специальностей:
- 1) инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции;
- 2) конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;
- 3) экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными и т.д.
- Задачи подобного рода носят общее название – задачи
- на оптимизацию.

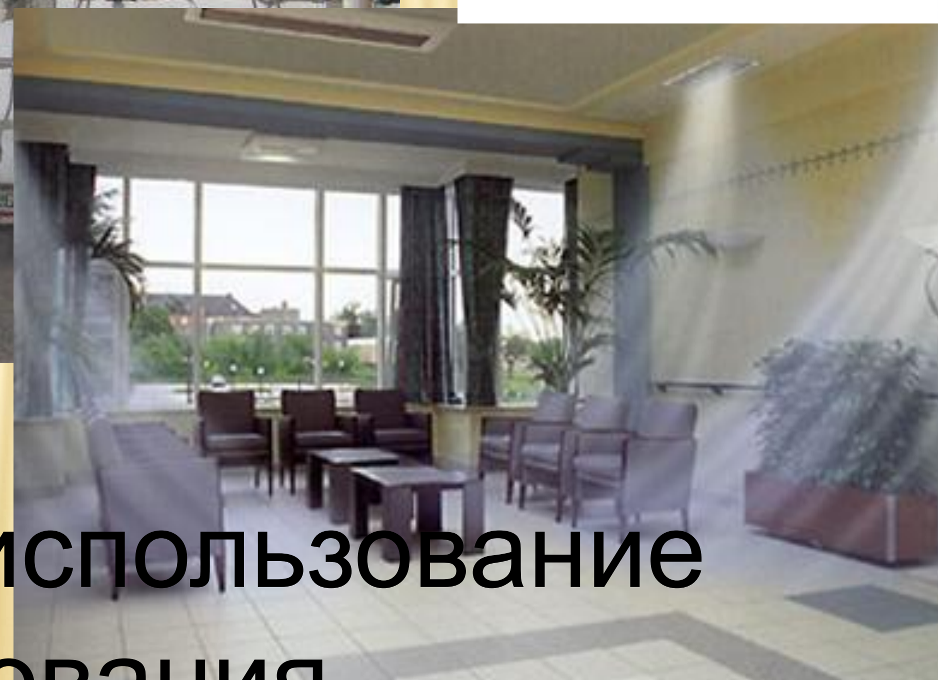
Перевезти дешевле

Получить максимальную энергию солнечных батарей

максимально увеличить полезную площадь

выполнить
объем работ
в кратчайший срок

ЭКОНОМИЯ ПРЕСНОЙ ВОДЫ



эффективное использование
оборудования

ЗАДАЧА. (№46)

Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей?

$b=(100-X)$ м

$a=x$ м

Дано: Прямоугольник
$P=200$м
$S=S_{наиб}$
Найти: a, b

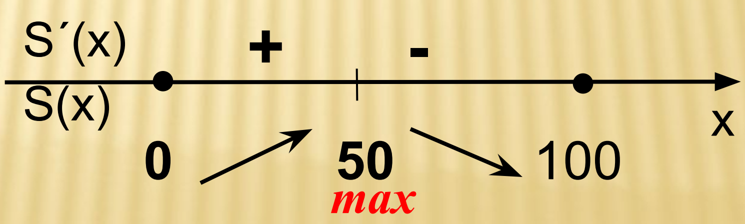
Решение: Пусть $a = x$ м, тогда $b= (100-x)$ м
$S=a*b$ $S=x(x-100)$ $S=x^2-100x$

Найдем, при каких значениях x, функция $S=S(x) = x^2-100x$ принимает наибольшее значение при x принадлежащем [0;100]

$S'=2x-100$

$2x-100 >0$

$X=50$ – точка максимума



Т.О. $a=50$м $b=50$м Значит, искомый прямоугольник – квадрат

- **Стих о производной**
- В данной функции от икс, наречённой игреком,
  Вы фиксируете икс, отмечая индексом,
  Придаёте вы ему тотчас приращение,
  Тем у функции самой вызвав изменение.
  Приращений тех теперь взявши отношение,
  Пробуждаете к нулю у дельта икс стремление.
  Предел такого отношенья выясняется,
  Он производною в науке называется!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Настольная книга учителя математики М.: ООО «Издательство АСТ»:
- ООО «Издательство Астрель» 2004 г.;
- Тематическое приложение к вестнику образования № 4 2005 г.;
- Программа для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. Математика 5–11 кл. М.: Дрофа 2001 г.;
- А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа 10–11 классы. Учебник - М.: Мнемозина 2007 г.;
- А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская . Алгебра и начала анализа 10–11 классы. Задачник – М: Мнемозина 2007, 2007 г.;
- А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа 10–11 классы. Пособие для учителей М.: Мнемозина 2004 г.;
- А. Г. Мордкович, Е. Е. Тульчинская . Алгебра и начала анализа 10–11 классы. Контрольные работы - М.: Мнемозина 2005 г

1.Чудаева Елена Владимировна, учитель математики МОУ «Инсарская СОШ №1»

2. Савченко Е.М., МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманская обл.