Техника интегрирования

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Устные упражнения

Найдите интегралы, поясняя, какие правила интегрирования применяли.

$$\int (x^3 + \cos x - \frac{1}{x^2})dx = \frac{x^4}{4} + \sin x + \frac{1}{x} + C$$

интегрирование суммы

$$\int (\frac{1}{3} - 4x)^5 dx = -\frac{1}{4 \cdot 6}(\frac{1}{3} - 4x)^6 + C =$$

$$= -\frac{1}{24}(\frac{1}{3} - 4x)^6 + C$$

правило нахождения первообразной сложной функции

$$\int \frac{1}{5} \ell^{x} dx = \frac{1}{5} \ell^{x} + C$$

постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int \left(2\sin 3x - \frac{3}{\sqrt{7x-1}} - \frac{2}{x}\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{6}{7}\sqrt{7x-1} - 2\ln|x| + C$$

$$\int \frac{5}{\sin^2 \frac{x}{5}} dx = -25 ctg \frac{x}{5} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\int (2 - \frac{1}{5}x)^7 dx = -\frac{5}{8}(2 - \frac{1}{5}x)^8 + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$$

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$t = \cos x$$

$$dt = -\boxed{\sin dx}$$

$$\sin x dx = -dt$$

$$= -\ln|t| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{3x^2+\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{x}}dx$$ Представим подинтегральную функцию в виде суммы

$$=\int \left(\frac{3x^2}{5x^{\frac{1}{4}}}+\frac{\sqrt{2}}{5x^{\frac{1}{4}}}\right)dx=\int \left(\frac{3}{5}x^{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{5}x^{-\frac{1}{4}}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{11}{4}}\cdot\frac{4}{11}+\frac{\sqrt{2}}{5}x^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{4}{3}+C=$$

$$=\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^3}\left(\frac{3}{11}x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+C$$

Метод подстановки:

$$\int \frac{\ell^x}{1+4\ell^{2x}}dx$$

Пусть

$$t = 2\ell^x$$

$$dt = 2\ell^x dx$$

$$\ell^x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{\ell^x dx}{1+4\ell^{2x}} = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctgt + C = \frac{1}{2} arctg 2\ell^x + C$$

$$\int \frac{\ell^x}{1-2\ell^x}dx = \int \frac{dt}{-2(t)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$t = 1-2\ell^x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$dt = -2\boxed{\ell^x dx}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2\ell^x\right| + C$$

$$\ell^x dx = \frac{dt}{-2}$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$t = 1 + x^2$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$dt = 2\boxed{xdt}$

$xdt = \dfrac{dx}{2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пусть

$$\int x \cos dx =$$

u=x; dv=cos x dx

du=dx, v=sin x.

$$x \sin x - \int \sin dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

$$\int arctgx\,dx$$

$$u = arctgx$$

$$\int arctgx\,dx = x \cdot arctgx - \int x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x \cdot arctgx - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$v = x$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\int arctgx\,dx = x \cdot arctgx - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Решите самостоятельно

$$\int \arccos x\,dx$$

$$\int \arcsin x\,dx$$

$$\int x \ln x\,dx$$

$$\int x e^{x}\,dx$$

$$\int \frac{6x^3 - x^2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int x\sqrt[3]{3x^2 + 1}\,dx$$

$$\int (3x + 5)\sin x\,dx$$

$$\int (2x + 3)\cos x\,dx$$