МБОУ «Шахмайкинская СОШ Новошешминского муниципального района РТ»

Корень n-ой степени

$$\sqrt[n]{a}$$

Автор: Мирьякупова Г.А.

Понятие корня n-ой степени

Корнем n-ой степени из неотрицательного числа a (n = 2, 3, 4, 5, …) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a.

$$\sqrt[n]{a} = b,\ b^n = a,\ \text{где } a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in N,\ n > 1$$

Число a называют подкоренным числом,
а число n – показателем корня

Примеры

1) $\sqrt[3]{27}=3;\quad 3^3=27$

2) $\sqrt[4]{256}=4;\quad 4^4=256$

3) $\sqrt[5]{0{,}00243}=0{,}3;\quad 0{,}3^5=0{,}00243$

4) $\sqrt[3]{1000000}=100;\quad 100^3=1000000$

5) $\sqrt[3]{64000}=40;\quad 40^3=64000$

6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

Свойства корня n-ой степени
(для $n \in N,\ k \in N,\ n > 1,\ k > 1$)

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, где $a \geq 0,\ b \geq 0$

2° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0,\ b > 0$

3° $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \geq 0$

4° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, где $a \geq 0$

5° $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \geq 0$

6° $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n - \text{четно} \\ a, & n - \text{нечетно} \end{cases}$

7° $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, n – нечетно

8° $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \geq 0$

Вычисление производной

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x^k}\right)' = \left(x^{\frac{k}{n}}\right)' = \frac{k}{n}x^{\frac{k}{n}-1} = \frac{k}{n}x^{\frac{k-n}{n}} = \frac{k}{n}\sqrt[n]{x^{k-n}} = \frac{k}{n\sqrt[n]{x^{n-k}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{kx+b}\right)' = \left((kx+b)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{k}{n}\sqrt[n]{(kx+b)^{1-n}} = \frac{k}{n\sqrt[n]{(kx+b)^{n-1}}}$$

Вычисление производной

Примеры

1) $$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^{-2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2) $$\left(\sqrt[7]{x^2}\right)' = \frac{2}{7}\sqrt[7]{x^{-5}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^5}}$$

3) $$\left(\sqrt[4]{5x-7}\right)' = \frac{5}{4}\sqrt[4]{(5x-7)^{-3}} = \frac{5}{4\sqrt[4]{(5x-7)^3}}$$

4) $$\left(\sqrt[6]{(7x+4)^5}\right)' = \frac{35}{6}\sqrt[6]{(7x+4)^{-1}} = \frac{35}{6\sqrt[6]{7x+4}}$$

Формула сложного радикала

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

Примеры

МБОУ СОШ №5 – «Школа здоровья и развития» г. Радужный

Степень с рациональным показателем

$$a^r$$

Автор: Елена Юрьевна Семёнова

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad где\ a \geq 0,\ q \in N,\ p \in Z$$

Примеры

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

Свойства степени с рациональным показателем (для $n \in R$, $k \in R$)

$1^\circ \quad a^0 = 1,\quad$ где $a \neq 0$

$2^\circ \quad a^1 = a$

$3^\circ \quad a^{-1} = \dfrac{1}{a},\quad$ где $a \neq 0$

$4^\circ \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\quad$ где $a \neq 0$

$5^\circ \quad a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

$6^\circ \quad \dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k},\quad$ где $a \neq 0$

$7^\circ \quad \left(a^n\right)^k = a^{nk}$

$8^\circ \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$9^\circ \quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n,\quad$ где $b \neq 0$

$10^\circ \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n,\quad$ где $a \neq 0,\ b \neq 0$

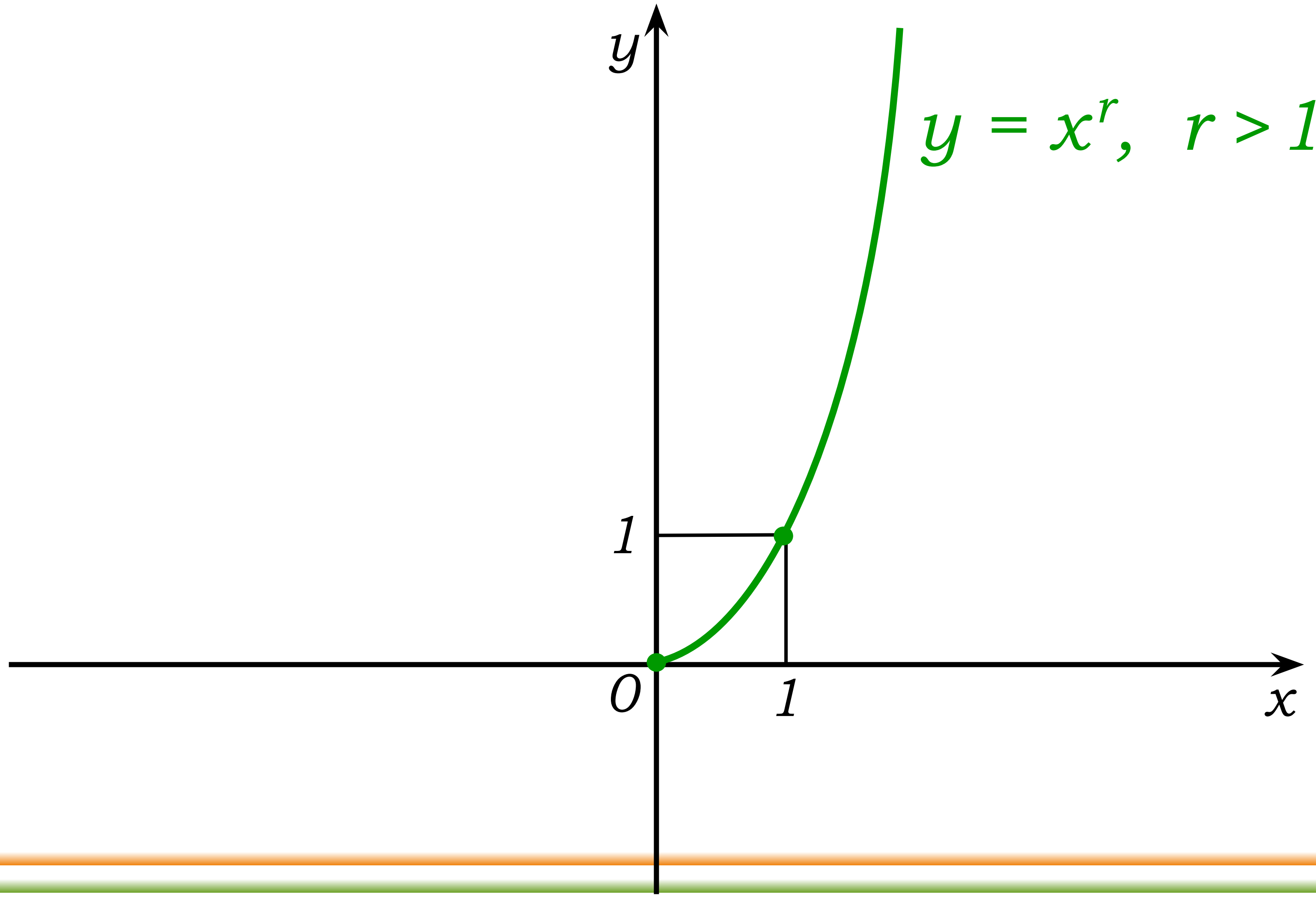
Степенные функции $y = x^r$

Свойства функции $y = x^r$, $r \in R$, $r > 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: (0; 0).
   б) Точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.} = 0$;
   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in R$, $r > 1$



Степенные функции $y = x^r$

Свойства функции $y = x^r$, $r \in R$, $0 < r < 1$

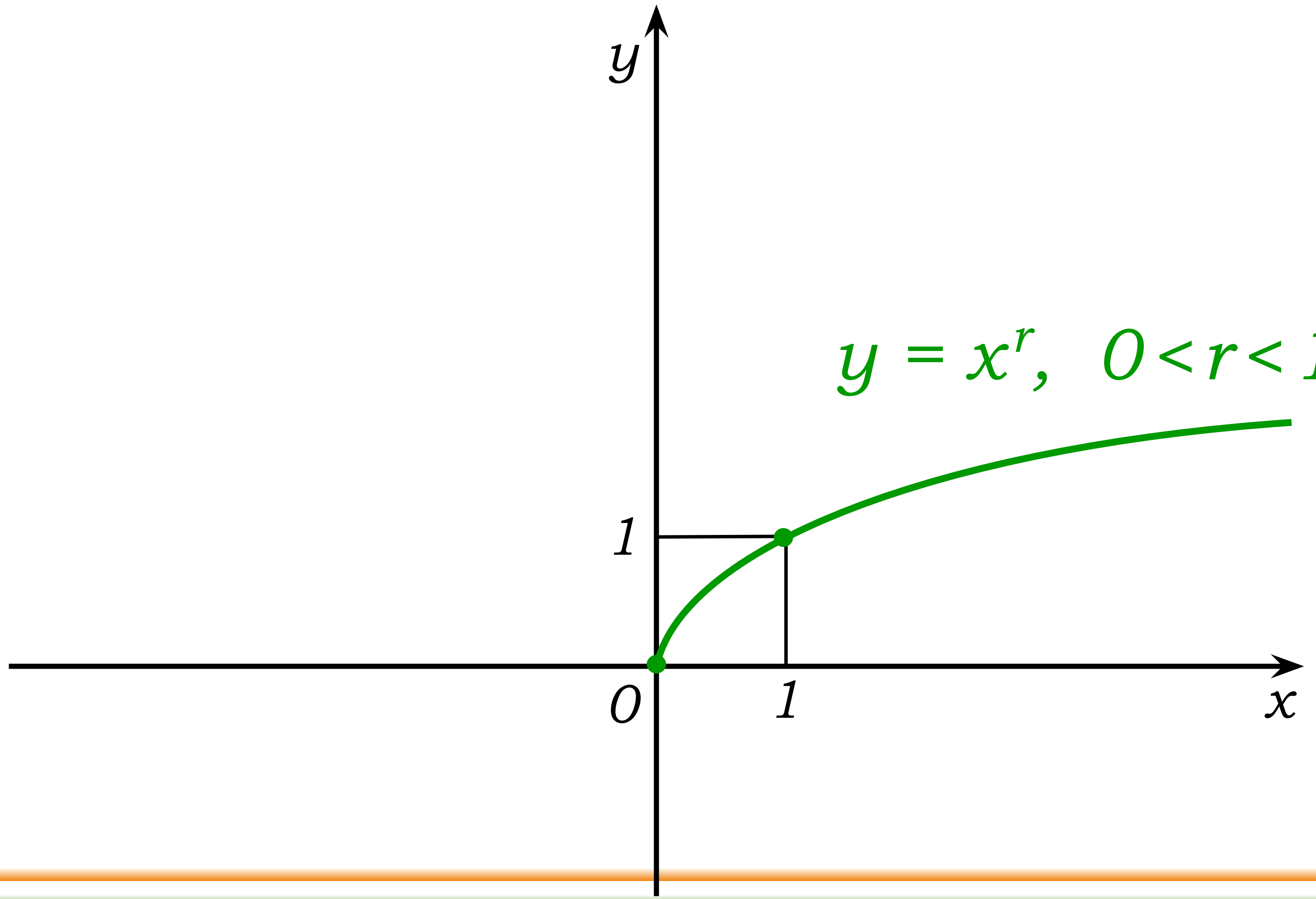
1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: (0; 0).

   б) Точка пересечения с Оу: (0; 0).
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.} = 0$;

   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in R$, $0 < r < 1$



Степенные функции $y=x^r$

Свойства функции $y=x^r$, $r \in R$, $r<0$

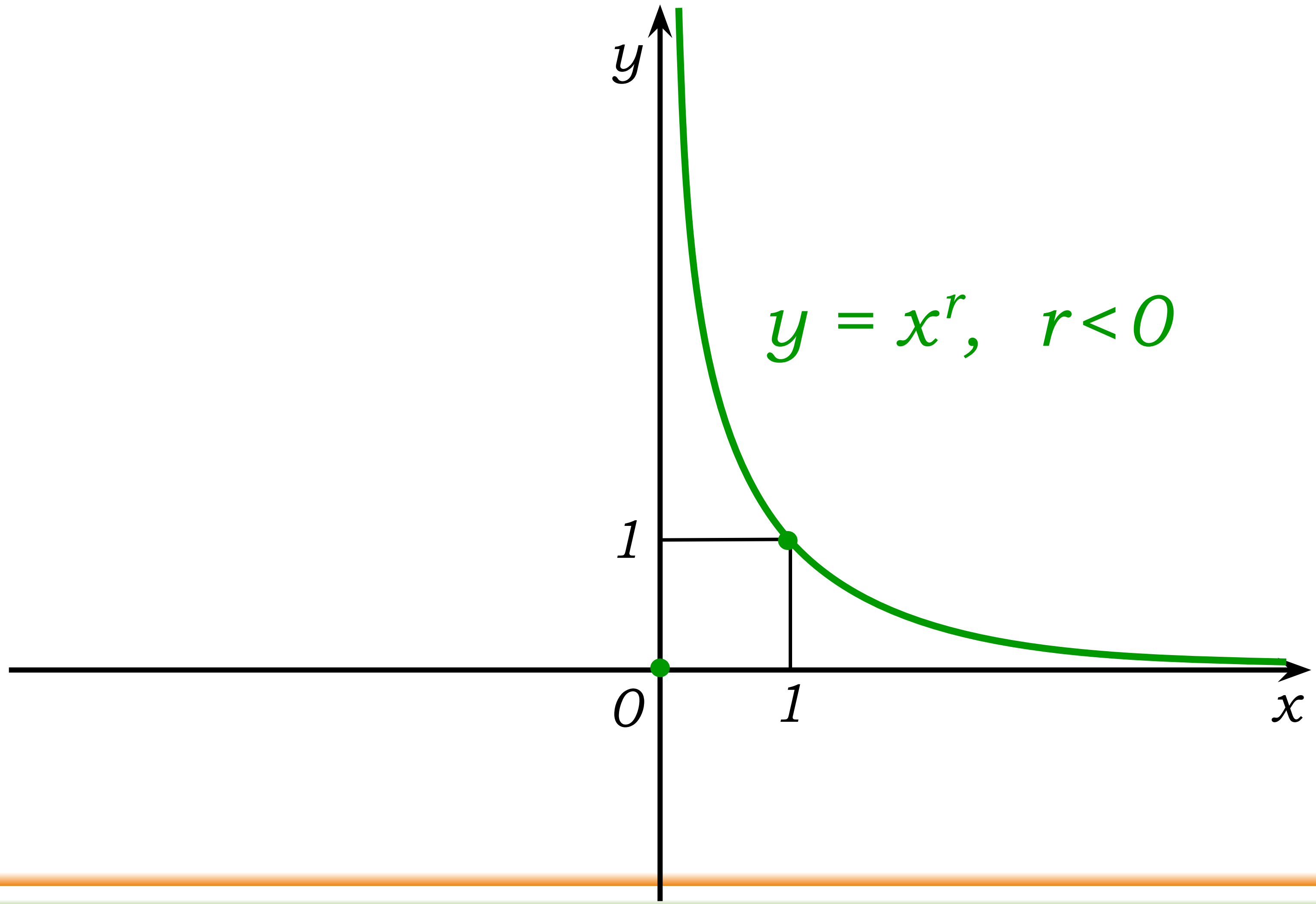
1. $D(y) = (0; +\infty)$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: нет.

   б) Точка пересечения с Оу: нет.
5. $(0; +\infty)$ – промежуток убывания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{наим.}$ – не существует;

   б) $y_{наиб.}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вниз.

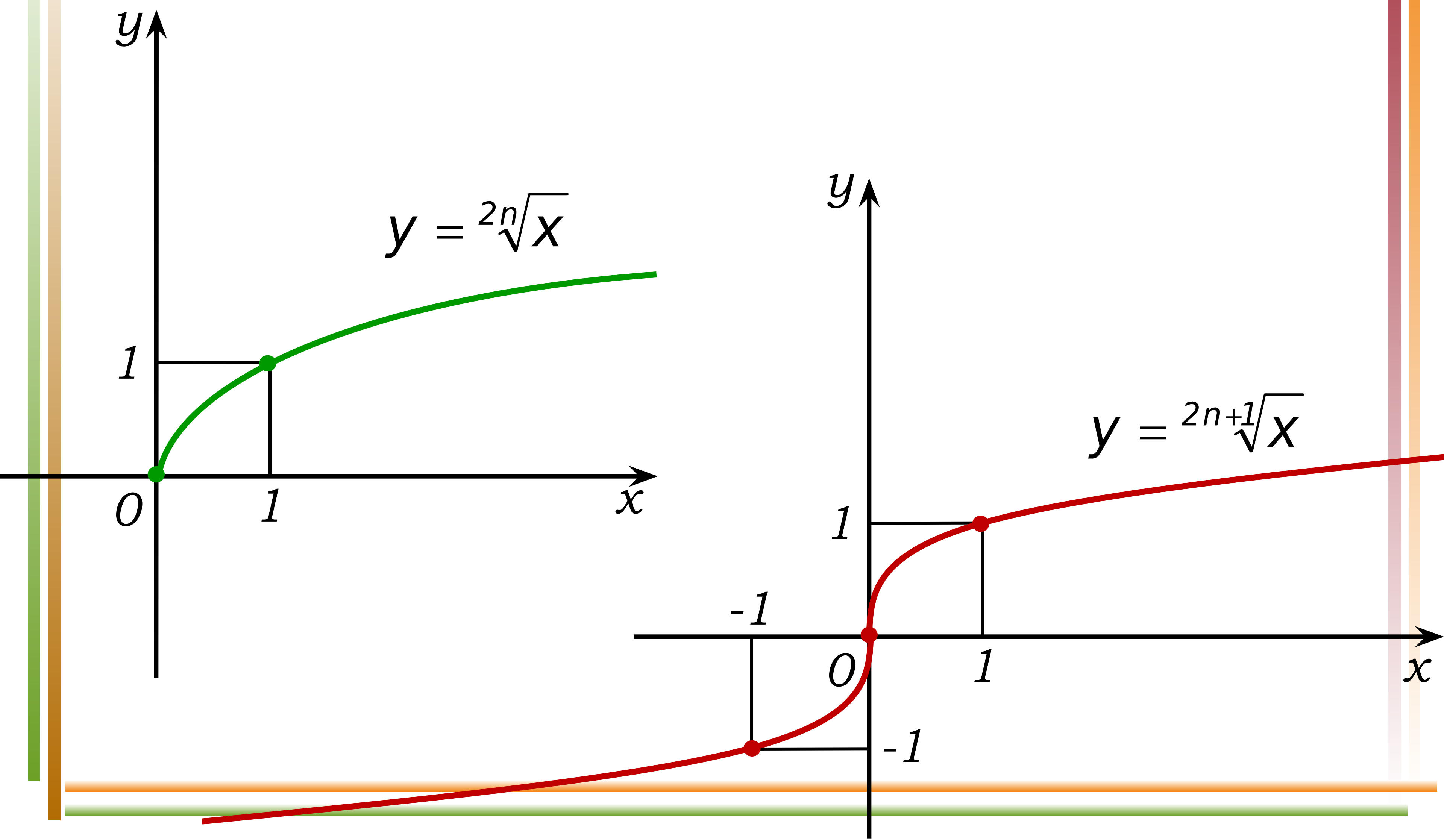
Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in R$, $r < 0$



Степенные функции $y=x^r$

Графики функций вида $y=\sqrt[n]{x},\ n\in N$



Задания открытого банка задач

1. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2-56^2}$.

Решение.

$$\sqrt{65^2-56^2}=\sqrt{(65-56)(65+56)}=\sqrt{9\cdot 121}=3\cdot 11=33.$$

2. Найдите значение выражения $\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.

Решение.

$$\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{4\cdot 7}{14}=\frac{28}{14}=2.$$

3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$.

Решение.

$$\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)=\sqrt{13}^2-\sqrt{7}^2=13-7=6.$$

Задания открытого банка задач

4. Найдите значение выражения $5^{0,36}\cdot 25^{0,32}$.

Решение.

$$5^{0,36}\cdot 25^{0,32}=5^{0,36}\cdot\left(5^2\right)^{0,32}=5^{0,36}\cdot 5^{0,64}=5^{0,36+0,64}=5^1=5.$$

5. Найдите значение выражения $\dfrac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$.

Решение.

$$\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}=\frac{3^{6,5}}{\left(3^2\right)^{2,25}}=\frac{3^{6,5}}{3^{4,5}}=3^{6,5-4,5}=3^2=9.$$

6. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}}\cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

Решение.

$$7^{\frac{4}{9}}\cdot 49^{\frac{5}{18}}=7^{\frac{4}{9}}\cdot\left(7^2\right)^{\frac{5}{18}}=7^{\frac{4}{9}}\cdot 7^{\frac{5}{9}}=7^{\frac{4}{9}+\frac{5}{9}}=7^{\frac{9}{9}}=7^1=7.$$

Задания открытого банка задач

7. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.

Решение.

$$\frac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}=\frac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{(2\cdot 3)^{4,5}}=\frac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{2^{4,5}\cdot 3^{4,5}}=2^{3,5-4,5}\cdot 3^{5,5-4,5}=2^{-1}\cdot 3^{1}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

8. Найдите значение выражения $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}:5^{-3,7}$.

Решение.

$$35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}:5^{-3,7}=(5\cdot 7)^{-4,7}\cdot 7^{5,7}\cdot 5^{3,7}=5^{-4,7}\cdot 7^{-4,7}\cdot 7^{5,7}\cdot 5^{3,7}=$$

$$=5^{-4,7+3,7}\cdot 7^{-4,7+5,7}=5^{-1}\cdot 7^{1}=\frac{7}{5}=1{,}4.$$

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}=\sqrt{\frac{2,8\cdot 4,2}{0,24}}=\sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}}=\sqrt{49}=7.$$

Задания открытого банка задач

10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$.

Решение.

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right)\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{27}{7}}\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{27\cdot 28}{7\cdot 3}}-\sqrt{\frac{12\cdot 28}{7\cdot 3}}=\sqrt{9\cdot 4}-\sqrt{4\cdot 4}=6-4=2.$$

11. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{\sqrt[18]{7^2}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}}=\sqrt[18]{\frac{7^2\cdot 7}{7^3}}=\sqrt[18]{\frac{7^3}{7^3}}=\sqrt[18]{1}=1.$$

Задания открытого банка задач

12. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{\frac{10\cdot16}{5}}=\sqrt[5]{32}=2.$$

13. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

Решение.

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2=\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}}}\right)^2=\left(2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}\right)^2=\left(2^{\frac{4+3-1}{12}}\right)^2=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2.$$