

Различные способы решений квадратных уравнений

Мавьян А.А.
МБОУ СОШ №19
2015

Цели урока:

- Определение квадратного уравнения
- Виды квадратных уравнений
- Способы решения квадратных уравнений:
 - 1) Разложение левой части уравнения на множители
 - 2) Решение квадратных уравнений по формуле
 - 3) Решение уравнений с использованием теоремы Виета
 - 4) Решение уравнений способом переброски
 - 5) Свойства коэффициентов квадратного уравнения
 - 6) Графическое решение квадратного уравнения
 - 7) Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
 - 8) Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Определение квадратного уравнения

Квадратное уравнение – алгебраическое уравнение общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x - свободная переменная,

a, b, c – коэффициенты, причём $a \neq 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$ называют квадратным трёхчленом, а элементы квадратного уравнения имеют собственные названия:

- a называют первым или старшим коэффициентом,
- b называют вторым, средним или коэффициентом при x ,
- c называют свободным членом.

Виды квадратных уравнений

Квадратные уравнения могут быть:

- **Полными** - это квадратное уравнение, все коэффициенты которого отличны от нуля.
- **Неполными** - это квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов, кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член), равен нулю.
- **Приведёнными** - это квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице.

Например:

Полное квадратное уравнение:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где коэффициенты b и c отличны от нуля;

Неполное квадратное уравнение:

$$ax^2+bx=0, ax^2+c=0 \text{ или } ax^2=0$$

т.е. хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю;

Приведённое квадратное уравнение:

$$x^2+bx+c=0,$$

т.е. уравнение, первый коэффициент которого равен единице ($a=1$)

Способы решений квадратных уравнений

1. Разложение левой части уравнения на множители

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то по крайней мере один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = -12$. Это означает, что числа 2 и -12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2. Решение квадратных уравнений по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0.$$

$$a = 4, b = 7, c = 3, D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x = \frac{-7 \pm 1}{8};$$

$$x_1 = -\frac{3}{4};$$

$$x_2 = -1.$$

$$4x - 4x + 1 = 0,$$

$$a = 4, b = -4, c = 1.$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0,$$

$D = 0$, один корень;

$$x = -\frac{b}{2a}, x = -\frac{-4}{2 \cdot 4}, x = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$a = 2, b = 3, c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -13$$

$D < 0$. Уравнение не имеет корней.

3. Решение уравнений с использованием теоремы Виета (прямой и обратной)

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

Теорема Виета для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Решить уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$

Попробуем найти два числа x_1 и x_2 ,

такие, что $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 x_2 = 14$

Таковыми числами являются 2 и 7. По теореме, обратной теореме Виета, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

4. Решение уравнений способом «переброски»

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$;

тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2,5 \end{cases}$$

5. Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Так как $a + b + c = 0$ ($345 - 137 - 208 = 0$), то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{208}{345}$

Решим уравнение:

$132x^2 + 247x + 115 = 0$, т. к. $a - b + c = 0$ ($132 - 247 + 115 = 0$), то

$x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{115}{132}$.

Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней можно записать в виде:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

6.Графическое решение квадратного уравнения

Решим графически уравнение

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

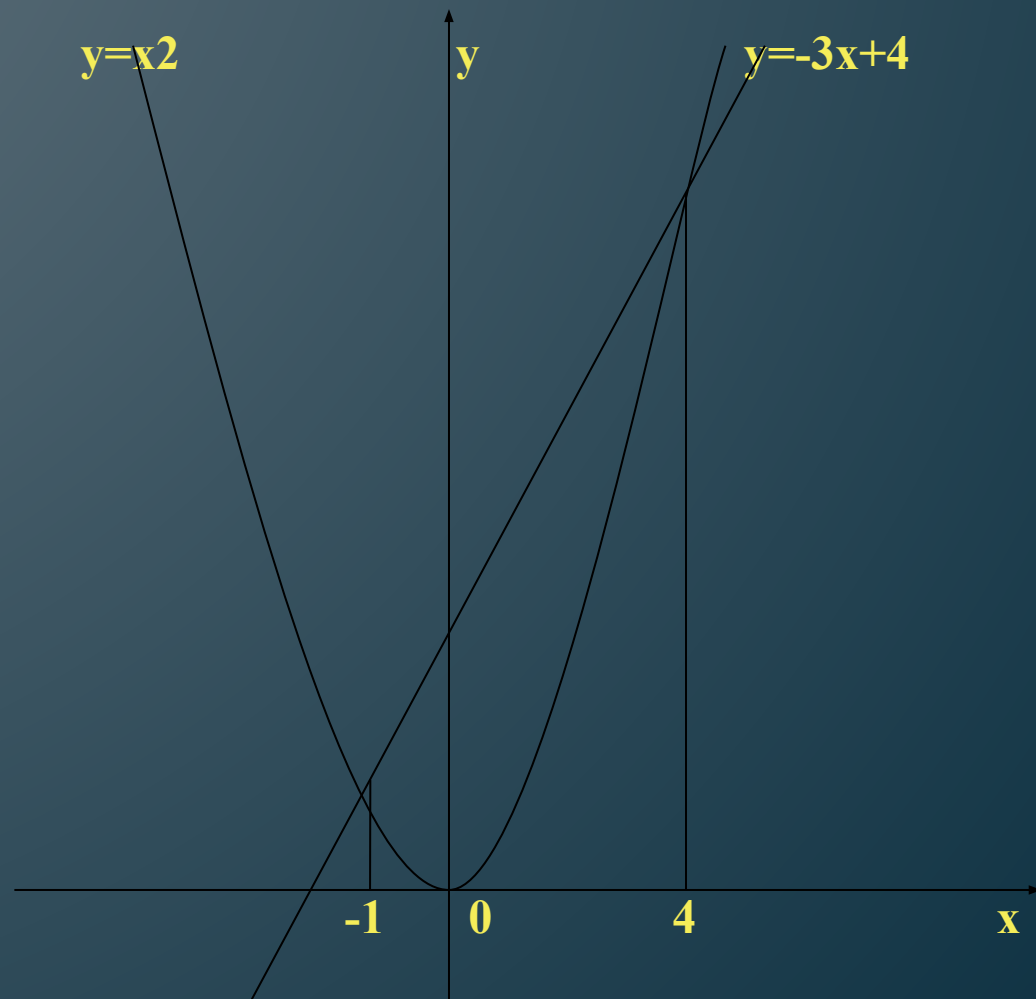
Запишем уравнение в виде

$$x^2 = 3x + 4 .$$

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M(0;4)$ и $N(3;13)$.

Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.



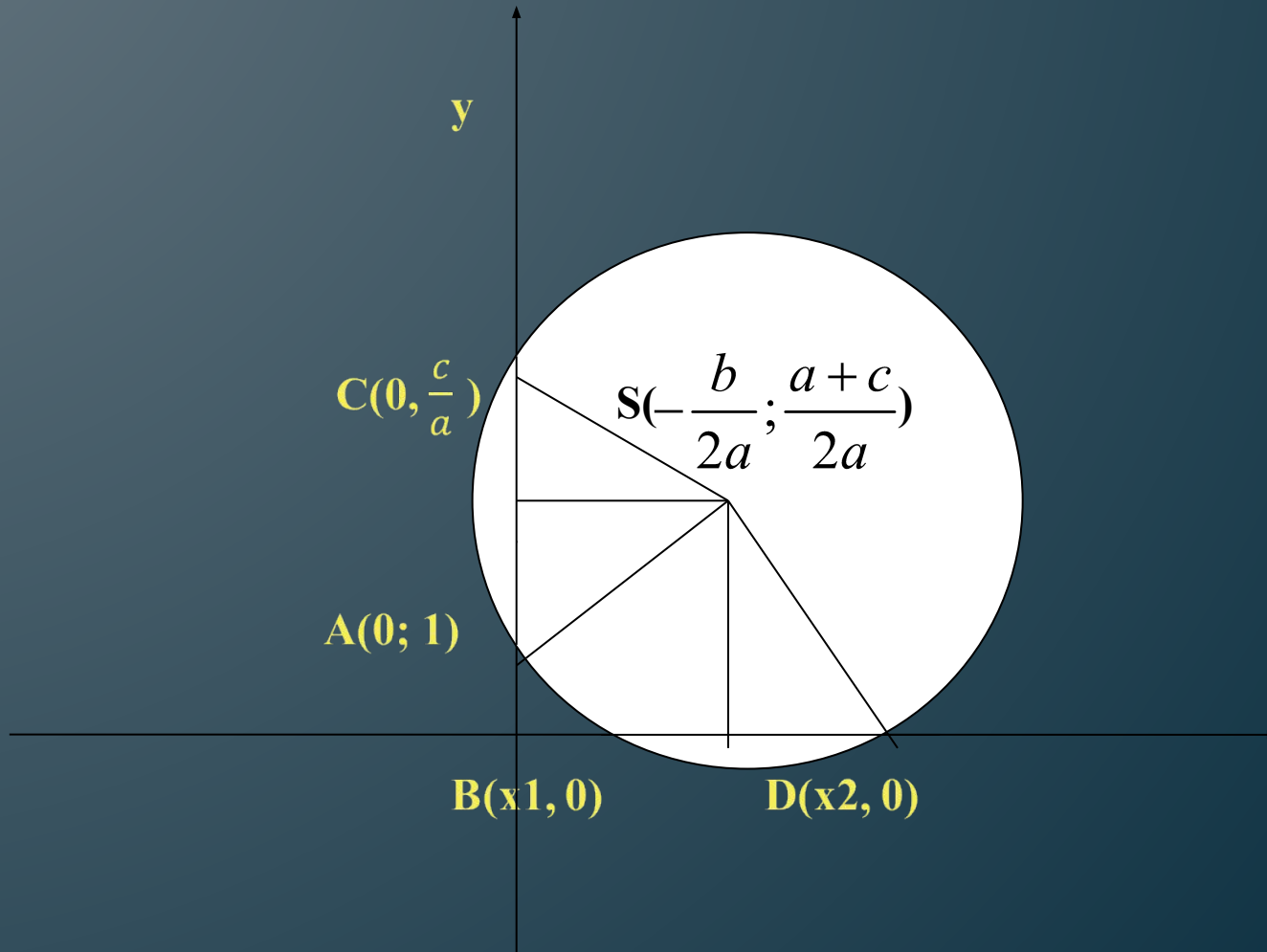
7. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; \frac{c}{a})$ на оси ординат.

Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$
откуда

$$OC = \frac{OB \cdot OD}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}$$



Решим графически уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

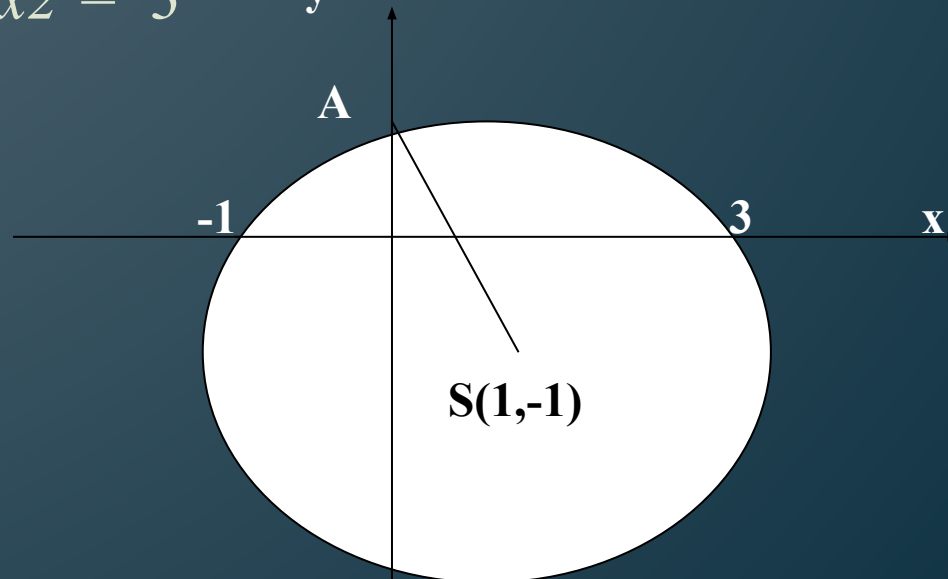
Определим координаты точки центра окружности по формулам

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0;1)$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$



8. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 (см. *Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы.* – М., Просвещение, 1990).

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2+pz+q=0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

1. Для уравнения
 $z^2 - 9z + 8 = 0$.

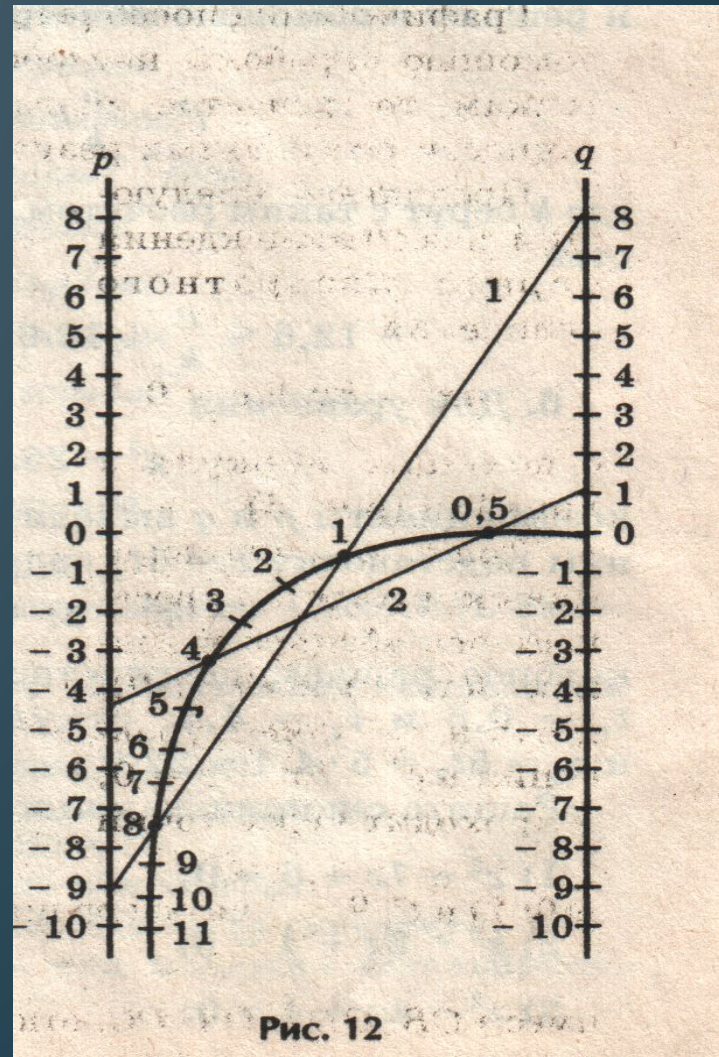
Номограмма дает корни
 $z_1 = 8, 0$ и $z_2 = 1$,

2. Решим с помощью
номограммы уравнение
 $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты
Этого уравнения на 2,
получим уравнение

$$z^2 - 4,5 + 1 = 0.$$

Номограмма дает корни
 $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.



3. Для уравнения

$$z^2 + 5z - 6 = 0$$

номограмма дает положительный корень $z_1 = 1,0$, а отрицательный корень находим, вычитая

положительный корень

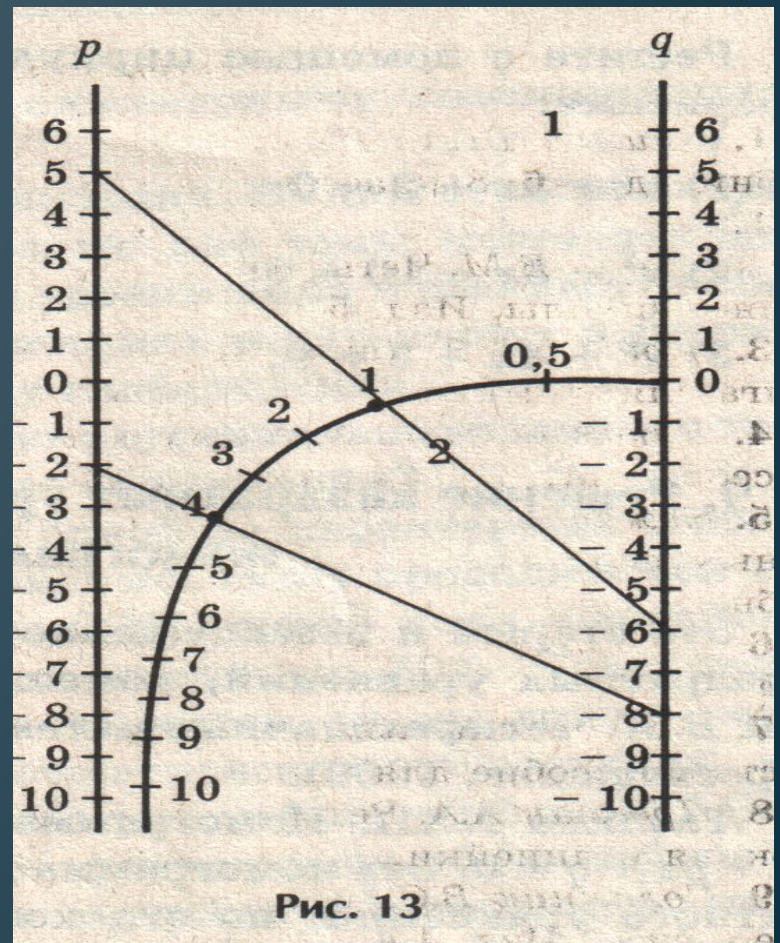
$$\text{из } -p, \text{ т.е. } z_2 = -p - 1 = \\ = -5 - 1 = -6,0 \quad (\text{рис.13.})$$

4. Для уравнения

$$z^2 - 2z - 8 = 0$$

номограмма дает положительный корень $z_1 = 4,0$, отрицательный

равен $z_2 = -p - z_1 = 2 - 4 = -2,0$.



Вывод