Различные способы решений квадратных уравнений

Мавьян А.А.
МБОУ СОШ №19
2015

Цели урока:

- Определение квадратного уравнения
- Виды квадратных уравнений
- Способы решения квадратных уравнений:

1) Разложение левой части уравнения на множители
2)Решение квадратных уравнений по формуле
3)Решение уравнений с использованием теоремы Виета
4)Решение уравнений способом переброски
5)Свойства коэффициентов квадратного уравнения
6) Графическое решение квадратного уравнения
7) Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
8) Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Определение квадратного уравнения

Квадратное уравнение – алгебраическое уравнение общего вида

$$ax^2+bx+c = 0,$$

где x - свободная переменная,

a,b,c – коэффициенты, причём $a \neq 0$.

Выражение ax^2+bx+c называют квадратным трёхчленом, а элементы квадратного уравнения имеют собственные названия:

- a называют первым или старшим коэффициентом,
- b называют вторым, средним или коэффициентом при x,
- c называют свободным членом.

Виды квадратных уравнений

Квадратные уравнения могут быть:

- Полными - это квадратное уравнение, все коэффициенты которого отличны от нуля.
- Неполными - это квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов, кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член), равен нулю.
- Приведёнными - это квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице.

Например:

Полное квадратное уравнение:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где коэффициенты b и c отличны от нуля;

Неполное квадратное уравнение:

$ax^2+bx=0,\ ax^2+c=0$ или $ax^2=0$

т.е. хотя бы один из коэффициентов b или с равен нулю;

Приведённое квадратное уравнение:

$$x^2+bx+c=0,$$

т.е. уравнение, первый коэффициент которого равен единице ($a=1$)

Способы решений квадратных уравнений

1. Разложение левой части уравнения на множители

Решим уравнение $x \quad + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$x + 10x - 24 = x + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + +12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$(x + 12)(x - 2) = 0$.

Так как произведение равно нулю, то по крайне мере один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. это означает, что числа 2 и - 12 являются корнями уравнения $x \quad + 10x - 24 = 0$.

2.Решение квадратных уравнений по формуле

$$x1,2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0.$$

$a = 4,\ b = 7,\ c = 3,\ D = b - 4ac = 72 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 -$
$- 48 = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ x = \frac{-7 \pm 1}{8};$$

$$x1 = -\frac{3}{4};$$

$$x2 = -1.$$

$4x – 4x + 1 = 0,$

$a = 4,\ b = -4,\ c = 1.$

$D = b \ – \ 4ac = 16 – 4·4·1 = 0,$

$D = 0$, один корень;

$$\boldsymbol{x} = -\frac{b}{2a}, x = -\frac{-4}{2 \cdot 4}, x = \frac{1}{2}$$

$2x^2 + 3x + 4 = 0$

$a = 2,\ b = 3,\ c = 4$

$D = b \ – \ 4ac = 9 – 4·2·4 = 9 – 32 =$

-13

$D < 0$. Уравнение не имеет корней.

3.Решение уравнений с использованием теоремы Виета (прямой и обратной)

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

Теорема Виета для квадратного уравнения *ax +вx +c = 0* имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Решить уравнение $x - 9x + 14 = 0$

Попробуем найти два числа x1 и x2 ,

такие, что x1+x2 = 9 ,x1x2 = 14

Такими числами являются 2 и 7. По теореме, обратной теореме Виета, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

4.Решение уравнений способом «переброски»

Умножая обе его части на a, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = \dfrac{y}{a}$;

тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильного данному. Его корни $y1$ и $y2$ найдем с помощью теоремы Виета.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{6}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2,5 \end{array}\right.$$

5.Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если $a + b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю)*, то $x1 = 1,\ x2 = \frac{c}{a}$.

Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x1 = -1,\ x2 = -\frac{c}{a}$.

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Так как $a + b + c = 0$ $(345 - 137 - 208 = 0)$, то $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-208}{345}$

Решим уравнение:

$132x^2 + 247x + 115 = 0$, т. к. $a-b+c = 0$ $(132 - 247 + 115=0)$, то

$x1= -1,\ x2= -\frac{115}{132}$.

Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней можно записать в виде:

$$x1,2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

6.Графическое решение квадратного уравнения

Решим графически уравнение

$x^2 - 3x - 4 = 0$.

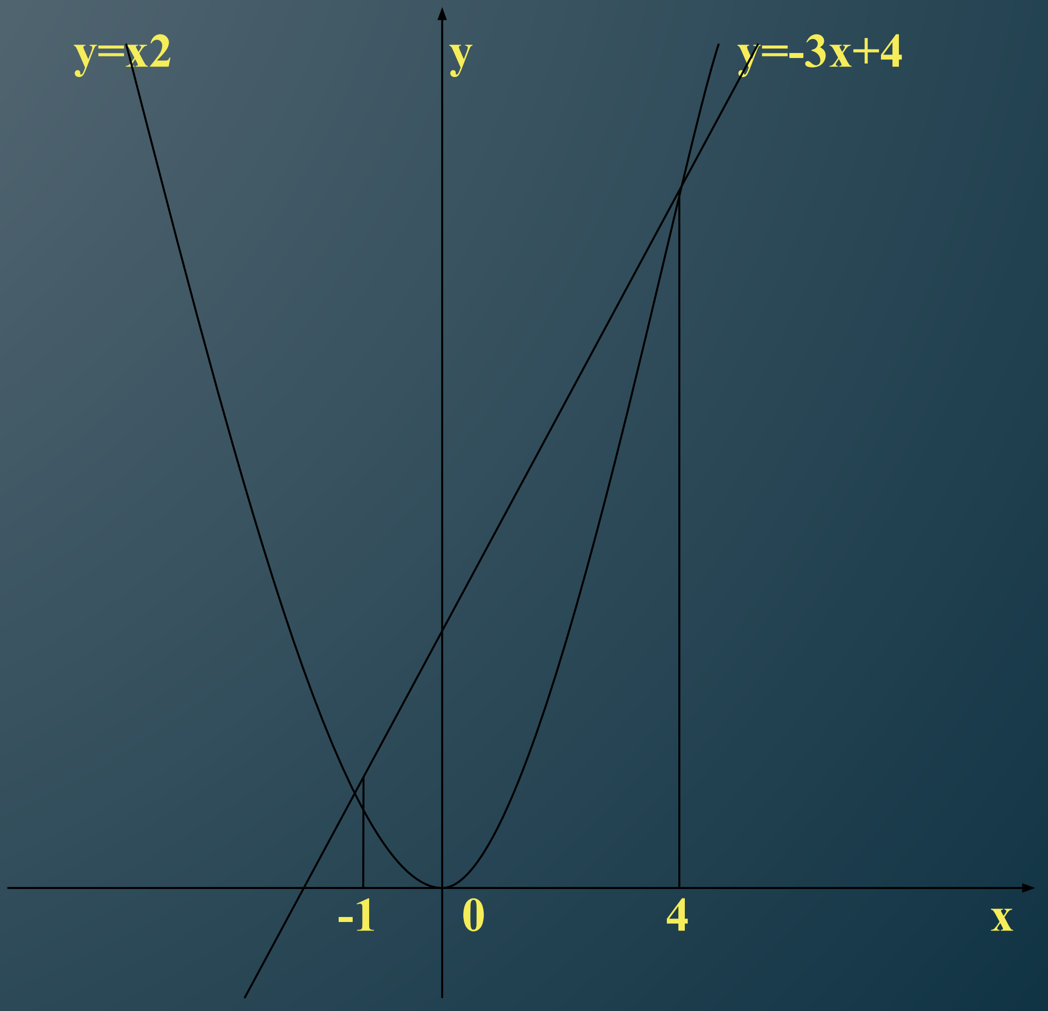
Запишем уравнение в виде

$x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M\ (0;4)$ и N (3;13).

Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x1 = -1$ и $x2 = 4$.



y=x2
y
y=-3x+4
-1
0
4
x

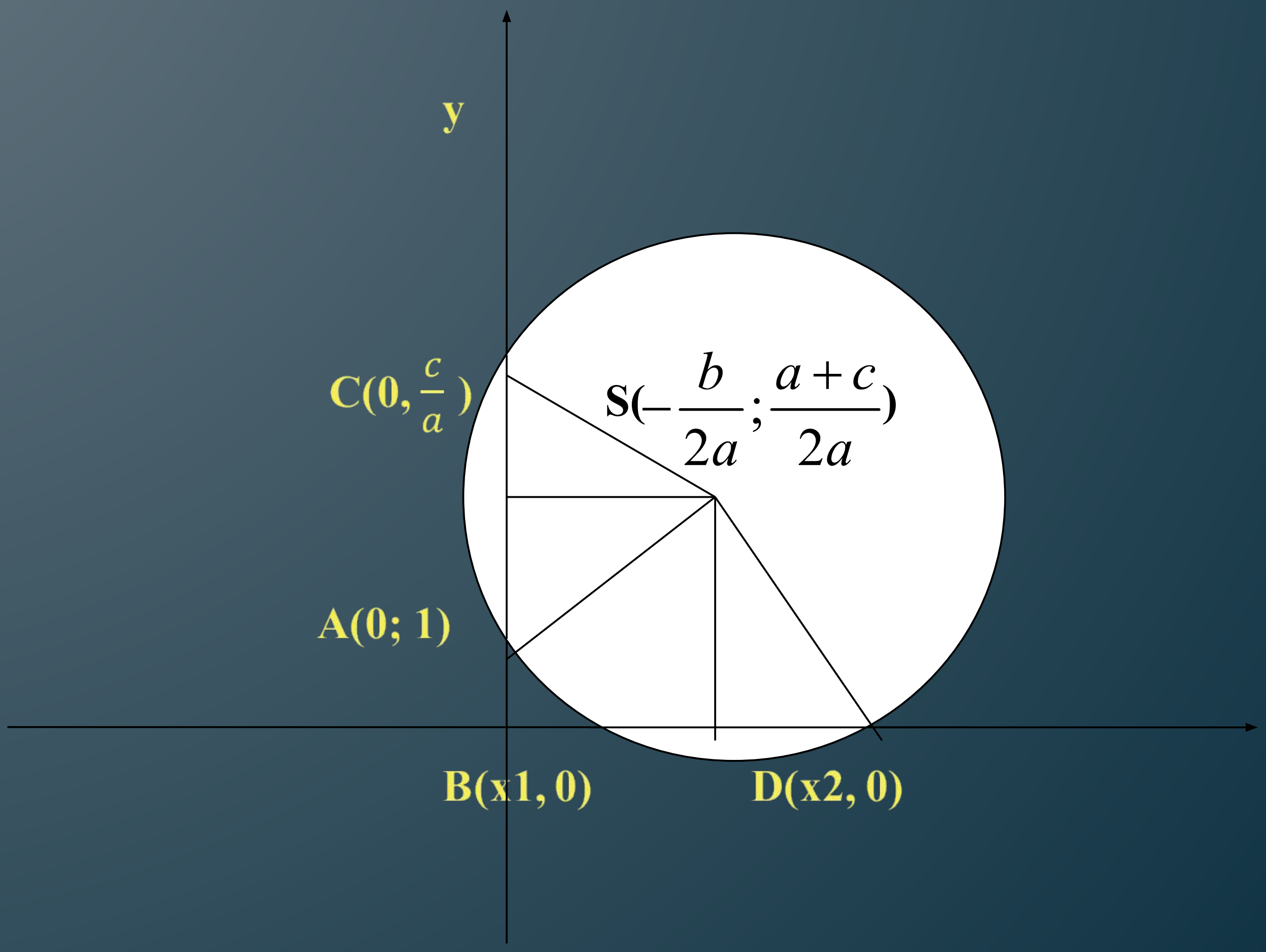
7.Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B\ (x1\ ;0)$ и $D\ (x2\ ;0)$, где $x1$ и $x2$ – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

и проходит через точки $A\ (0;1)$ и $C(0;\ \frac{c}{a}\ )$ на оси ординат.

Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$ откуда

$$OC = \frac{OB \cdot OD}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}$$


y
$C(0, \frac{c}{a})$
$S(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a})$
A(0; 1)
B(x1, 0)
D(x2, 0)

Решим графически уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

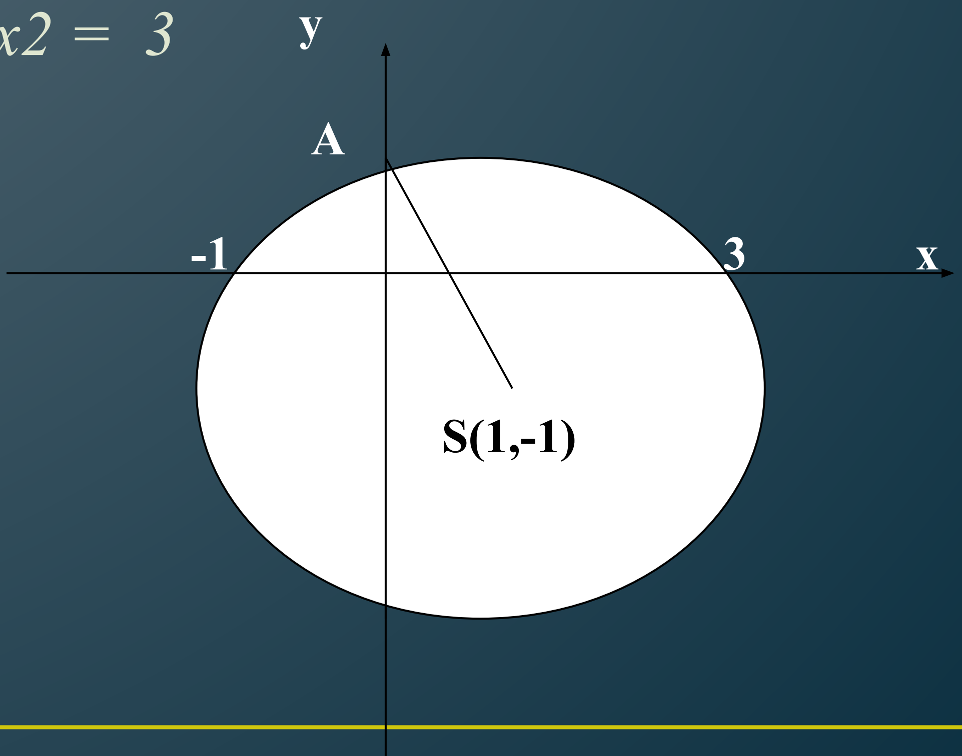
Определим координаты точки центра окружности по формулам

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2\cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса *S A,* где *A* (0;1).

Ответ: $x1 = -1$, $x2 = 3$



8.Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 (*см. Брадис В.М.* Четырехзначные математические таблицы. – М., Просвещение, 1990).

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2+pz+q=0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

1.Для уравнения

$z^2 - 9z + 8 = 0$.

Номограмма дает корни

$z1 = 8, 0$ и $z2 = 1$,

2.Решим с помощью номограммы уравнение

$2 z^2 - 9 z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты

Этого уравнения на 2, получим уравнение

$z^2 - 4, 5 + 1 = 0$.

Номограмма дает корни

$z1 = 4$ и $z2 = 0,5$.

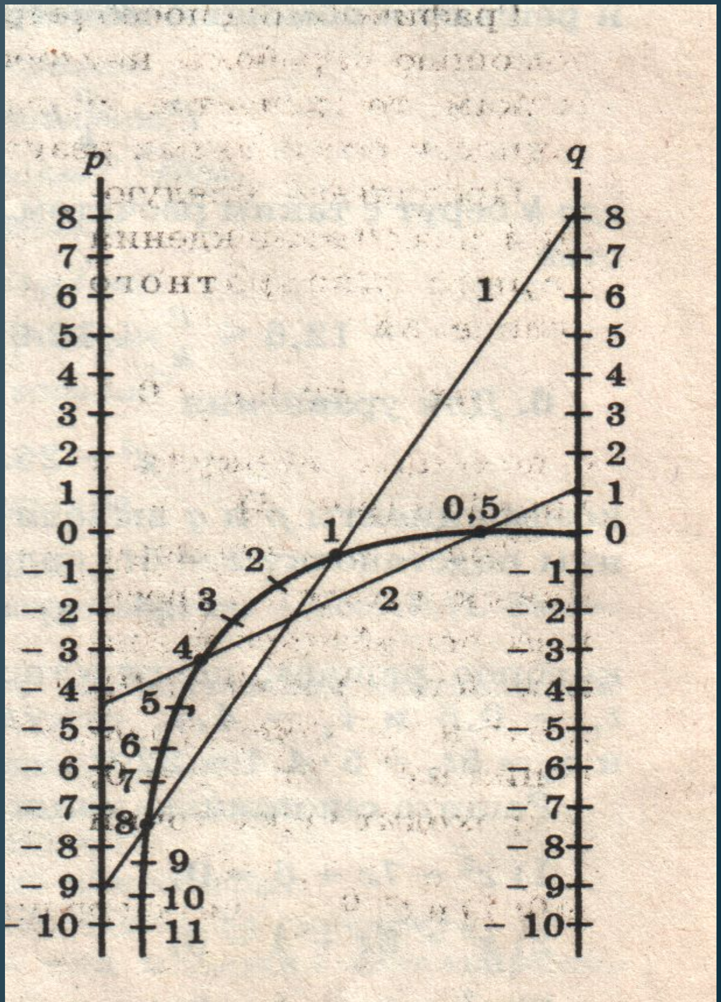
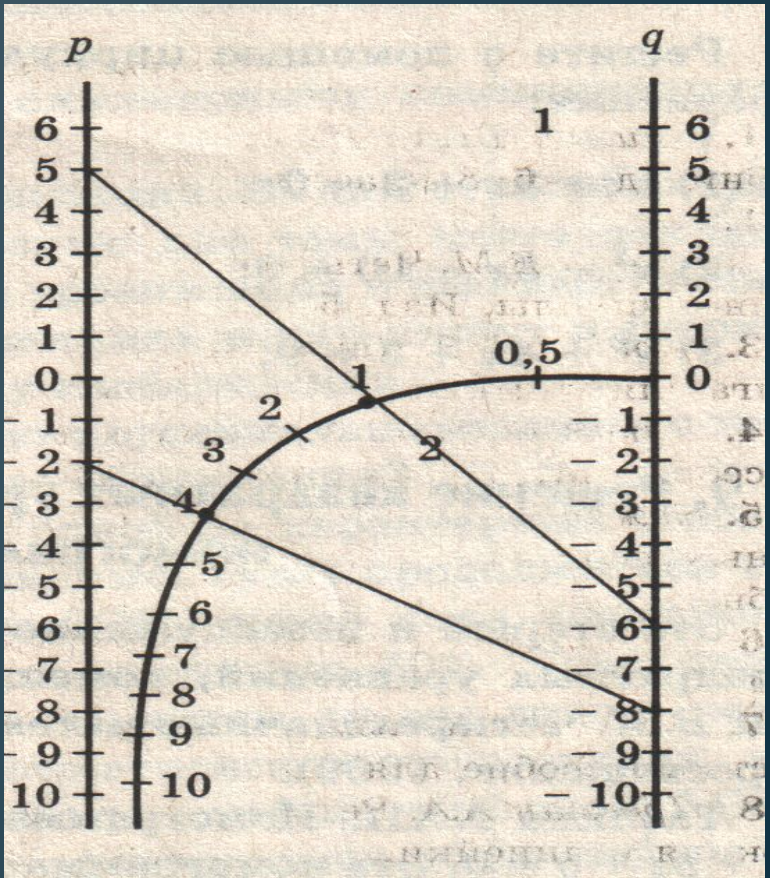


Рис. 12

3. Для уравнения

$z^2 + 5z - 6 = 0$

номограмма дает положительный корень z1 = 1,0, а отрицательный корень находим, вычитая положительный корень из – *p*, т.е. z2 = – *p* – 1 = = – 5 – 1 = – 6,0 (рис.13.)



4. Для уравнения

$z^2 - 2z - 8 = 0$

номограмма дает положительный корень z1 = 4,0, отрицательный равен z2 = – *p* – z1 = 2 – 4 = – 2,0.

Вывод