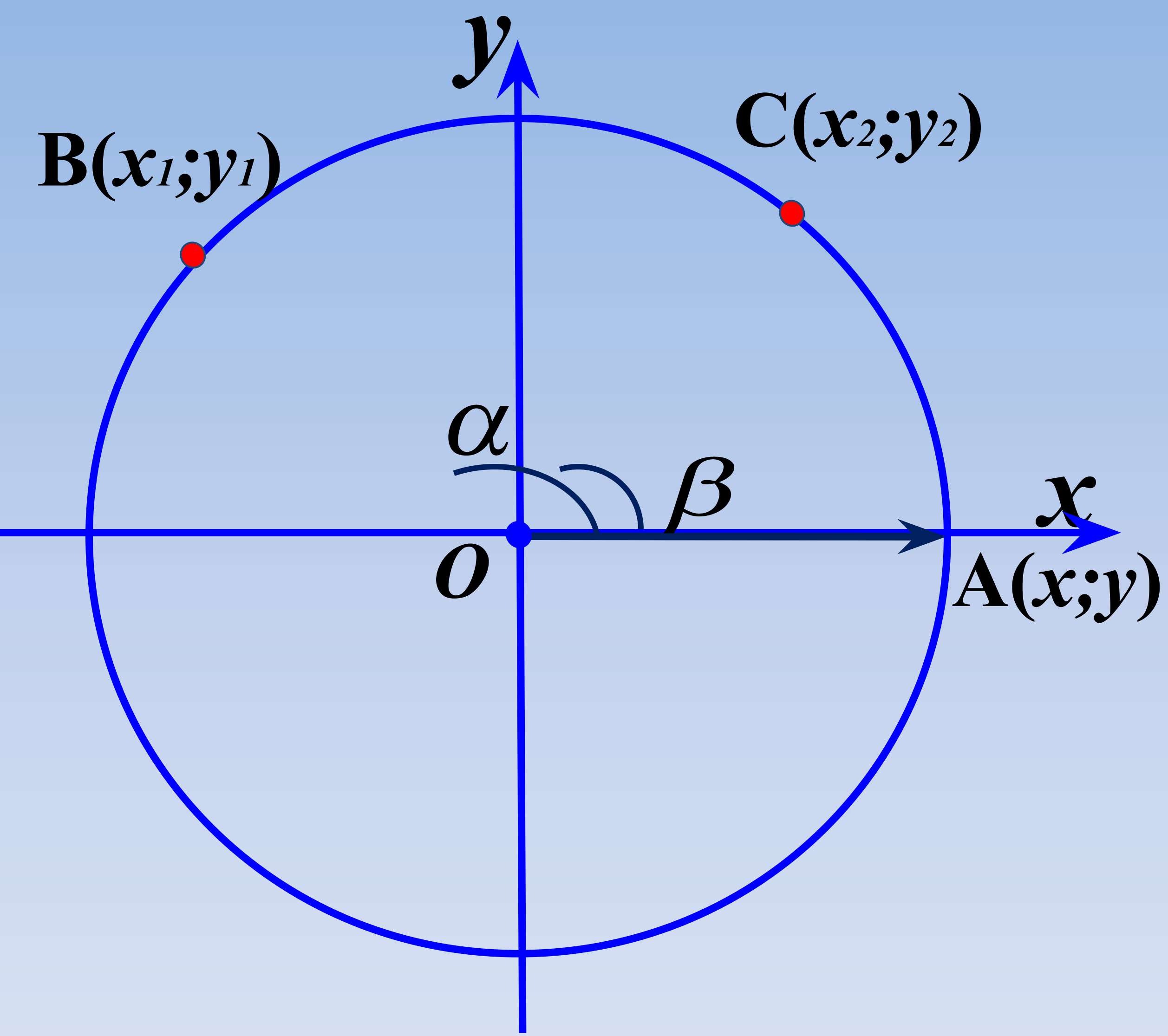
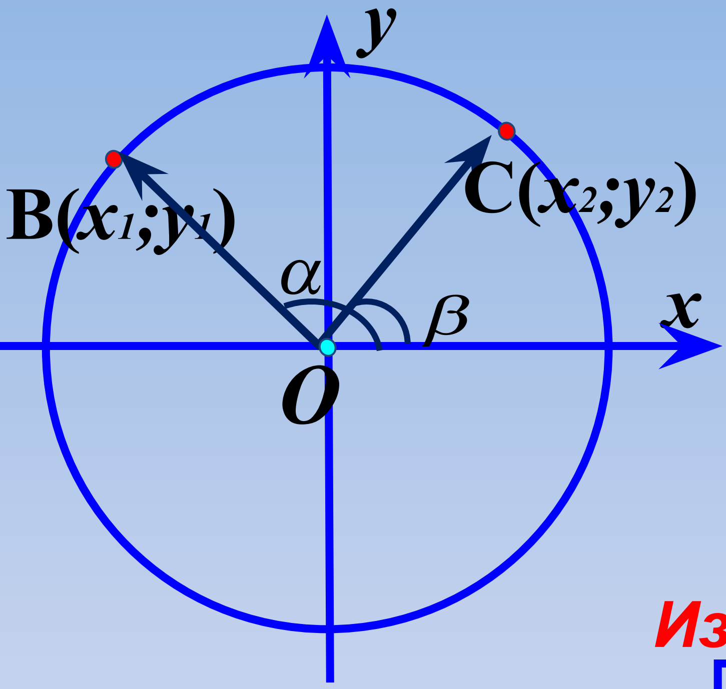
Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов

Алгебра 10 класс



Повернём радиус ОА, равный 1, на угол α и на угол β



Найдём скалярное произведение векторов OB и OC.

$$\overrightarrow{OB}\{x_1; y_1\}$$

$$\overrightarrow{OC}\{x_2; y_2\}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = x_1x_2 + y_1y_2} \quad (1)$$

Из определения синуса и косинуса:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= R\cos\alpha \\ y_1 &= R\sin\alpha \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_2 &= R\cos\beta \\ y_2 &= R\sin\beta \end{aligned}}$$

Подставим данные значения в правую часть равенства (1):

$$\boxed{\begin{aligned} &\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2\cos\alpha\cos\beta + R^2\sin\alpha\sin\beta = \\ &R^2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \end{aligned}}$$

По теореме о скалярном произведении векторов:

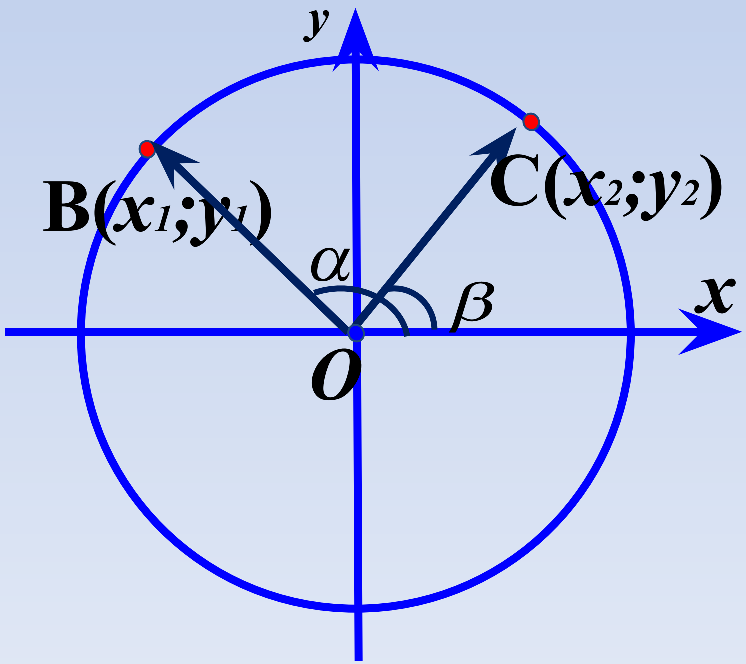
$$\boxed{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \cos \angle BOC = R^2 \cos \angle BOC}$$

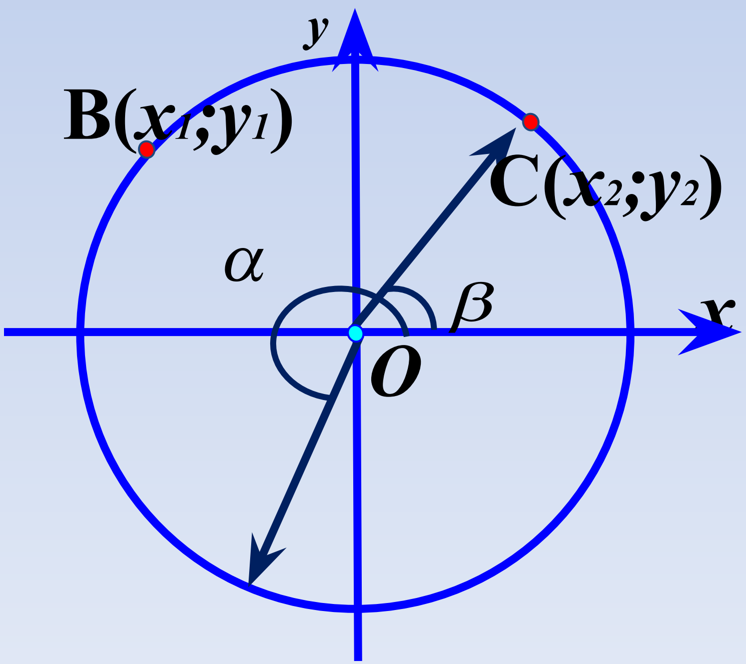
$$\angle BOC = \alpha - \beta$$

$$\angle BOC = 2\pi - (\alpha - \beta)$$

В любом случае:

$$\boxed{\cos \angle BOC = \alpha - \beta}$$





$$\boxed{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)}$$

Левые части равенств равны, значит правые тоже равны.

Получаем формулу <u>косинуса разности двух аргументов</u>:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$

Формула <u>косинуса суммы двух аргументов</u>:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Закрепление материала

1. Вычислить: 1) $\cos 75^0$

Воспользуемся тем, что $75^0 = 45^0 + 30^0$;

$$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) =$$
$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Закрепление материала

1. Вычислить: 2) $\cos 15^0$.

Воспользуемся тем, что $15^0 = 45^0 - 30^0$;

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) =$$
$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Закрепление материала

2. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)$ **, если известно, что**

$$\cos y=-\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}<y<\pi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\sin y$$

$$\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$ $$\sin^2 y=\frac{16}{25}$$ $$\sin y=\frac{4}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\sin y=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

Закрепление материала

3. Вычислить:

1) $\cos 37^0 \cos 8^0 - \sin 37^0 \sin 8^0$;

2) $\cos 107^0 \cos 17^0 + \sin 107^0 \sin 17^0$

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) 0

Домашнее задание

9.1 9.2 9.3 9.6

Список используемой литературы:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: - М.: Мнемозина, 2006.
2. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений/А.Г. Мордкович и др. – М.: Мнемозина, 2006.
3. Обухова Л.А., Занина О.В., Данкова И.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. – М.: ВАКО, 2008.