Ямало – Ненецкий автономный округ

МБОУ СОШ №8

Г. Новый Уренгой

Методы и способы решения тригонометрических уравнений

Выполнила: Габдрахманова Гульнара Владиковна, ученица 10 класса

Научный руководитель: учитель математики высшей категории

Бычкова Светлана Владимировна

История тригонометрии

- Тригонометрия- с греч. измерение треугольников. Возникла тригонометрия в результате решения задач, связанных с землемерием, астрономией и строительным делом. Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (II в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (II в. н. э.). Позднее зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями. Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII в. Леонардом Эйлером (1707-1783гг.). Дальнейшее развитие теории было положено в XIX в. Н. И. Лобачевским и другими учёными.

Актуальность

- Знания тригонометрии применяются во многих областях науки;
- Изучение тригонометрии помогает развить логику, нестандартное мышление человека;
- Затрачивается огромное количество различных ресурсов человека на решение тригонометрических уравнений, поэтому методы и способы их решения необходимо систематизировать.

Цель исследования:

- Изучение методов решений тригонометрических уравнений на уроках математики;
- Обобщение и расширение знаний и умений, связанных с решением тригонометрических уравнений на базе физико-математической школы УРЕК (г.Белорецк, Башкирия);
- Изучение новых способов решения тригонометрических уравнений, выходящих за пределы курса алгебры 10 класса;
- Исследование тригонометрического уравнения несколькими способами.

Задачи исследования:

- Провести классификацию тригонометрических уравнений, предлагаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа;
- Рассмотреть другие методы решения тригонометрических уравнений;
- Подобрать задания из вариантов ЕГЭ;
- Рассмотреть способы отбора корней на заданном промежутке из заданий части С1.
- Провести анкетирование среди учеников 10-11 классов МБОУ СОШ №8 с целью выяснить их мнение о задании С1 (№15).

Решение простейших уравнений

- Простейшими называются тригонометрические уравнения вида **sin x = α**; **cos x = α**; **tg x = α**; **ctg x = α**, где **x** – переменная, **α** – данное число.

- ***tg x = α***, $\alpha \in (-\infty; \infty)$, x ≠

$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n$, где $n \in Z$

- ***ctg x = α***, $\alpha \in (-\infty; \infty)$, x ≠

$x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi n$, где $n \in Z$

- ***sin x = α***, $|\alpha| \le 1$

$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n$, где $n \in Z$

Частные случаи:

$\alpha = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$

$\alpha = 0$, $x = \pi n$, где $n \in Z$;

$\alpha = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$

- ***cos x = α***, $|\alpha| \le 1$

$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n$, где $n \in Z$

Частные случаи:

$\alpha = -1$, $x = -\pi + 2\pi n$, $n \in Z$

$\alpha = 0$, $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$

$\alpha = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$

Методы и способы решения тригонометрических уравнений

В своей работе я рассмотрела следующие способы:

- Решение тригонометрических уравнений с помощью введения новой переменной:
  - Тригонометрические уравнения, сводимые к квадратным;
  - Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента;
- Уравнения, решаемые разложением на множители;
- Однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени;
- Решение тригонометрических уравнений с помощью формул:
  - Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
  - Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
  - Применение формул понижения степени.
- Решение уравнений с помощью замены переменных:
  - Уравнения вида $P(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$;
  - Решение уравнений с помощью универсальной подстановки.
- Уравнения, содержащие арифметический квадратный корень.

Решение тригонометрических уравнений с помощью введения новой переменной.

- **Тригонометрические уравнения, сводимые к квадратным.**

  Этот метод еще называют алгебраическим. Метод сведения к квадратному уравнению состоит в том, что, пользуясь изученными формулами, мы преобразовываем все тригонометрические функции, участвующие в рассматриваемом уравнении через одну какую-нибудь простейшую тригонометрическую функцию. И вводим новый аргумент ***t = f(x)***, где ***f(x)*** – одна из основных тригонометрических функций.

- **Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.**

  Этот метод применяют при решении уравнений вида $\boldsymbol{a \sin x + b \cos x = c}$, $\boldsymbol{a^2 + b^2 \neq 0}$ (относительно переменной x). Сначала следует обе части разделить на $\sqrt{a^2+b^2}$.

  Получим $a/\sqrt{a^2+b^2}\,\sin x + b/\sqrt{a^2+b^2}\,\cos x = c/\sqrt{a^2+b^2}$; Коэффициенты перед синусом и косинусом обладают следующими свойствами:

  1) $|\,a/\sqrt{a^2+b^2}\,| < 1$, $b/\ a^2+b^2 < 1$;

  2) $(a/\sqrt{a^2+b^2}\,)^2 + (b/\sqrt{a^2+b^2}\,)^2 = 1$;

  Т.е. $a/\sqrt{a^2+b^2} = \cos\varphi$, а $b/\sqrt{a^2+b^2} = \sin\varphi$, где φ - вспомогательный угол. Тогда уравнение приобретет следующий вид:

  $\sin(x+\varphi) = c/\sqrt{a^2+b^2}$;

  Откуда

  $x = -\varphi + (-1)^n \arcsin(c/\sqrt{a^2+b^2}) + \pi n$, $n \in Z$, где $\varphi = \arccos(a/\ a^2+b^2\ )$ или $\varphi = \arcsin(b/\sqrt{a^2+b^2}\ )$. Если $c/\sqrt{a^2+b^2} > 1$, то решений нет.

Уравнения, решаемые разложением на множители.

- Под разложением на множители понимается представление данного выражения в виде произведения нескольких множителей. Если в одной части уравнения стоит несколько множителей, а в другой – 0, то каждый множитель приравнивается к нулю. Таким образом, данное уравнение можно представить в виде совокупности более простых уравнений.

- Пример. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение.

$\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,

$\sin x \ \cos x - \sin^2 x = 0$

$\sin x \ (\cos x - \sin x) = 0$

1. $\sin x = 0$; $x_n = \pi n$, где $n \in Z$
2. $\cos x - \sin x = 0$; $1 - \mathrm{tg}\, x = 0$;

$\mathrm{tg}\, x = 1$; $x_m = \pi/4 + \pi m$, где $m \in Z$.

Ответ: $x_n = \pi n$, $n \in Z$;

$x_m = \pi/4 + \pi m$, $m \in Z$.

Однородные тригонометрические уравнения первой и второй степеней.

- Уравнение называется однородным относительно sinx и cosx, если все его члены одной и той же степени относительно sinx и cosx одного и того же угла.

$$a_0 \cdot \sin^n x + a_1 \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \dots + a_n \cdot \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – действительные числа, **n** – показатель однородности.

- Чтобы решить однородное уравнение, нужно:
  - перенести все его члены в левую часть;
  - вынести все общие множители за скобки;
  - приравнять все множители и скобки нулю;
  - скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;
  - решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg.

Решение тригонометрических уравнений с помощью формул.

ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭТИМ МЕТОДОМ НЕОБХОДИМО ЗНАТЬ СЛЕДУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ

- Формулы преобразования произведения тригонометрической функции в сумму

- $\mathbf{\sin\alpha \cdot \cos\beta} = (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
- $\mathbf{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
- $\mathbf{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$
- $\mathbf{tg\alpha \cdot tg\beta} = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \div$

$\div \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = tg\alpha + tg\beta \div ctg\alpha + ctg\beta$

- $\mathbf{ctg\alpha \cdot ctg\beta} = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \div$

$\div \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = ctg\alpha + ctg\beta \div tg\alpha + tg\beta$

- $\mathbf{tg\alpha \cdot ctg\beta} = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) \div$

$\div \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

- Формулы понижения степени тригонометрических функций

- $\mathbf{\sin^2\alpha} = 1 - \cos 2\alpha \div 2$
- $\mathbf{\cos^2\alpha} = 1 + \cos 2\alpha \div 2$
- $\mathbf{tg^2\alpha} = 1 - \cos 2\alpha \div 1 + \cos 2\alpha$
- $\mathbf{ctg^2\alpha} = 1 + \cos 2\alpha \div 1 - \cos 2\alpha$
- $\mathbf{\sin^2\alpha/2} = 1 - \cos\alpha \div 2$
- $\mathbf{\cos^2\alpha/2} = 1 + \cos\alpha \div 2$
- $\mathbf{tg^2\alpha/2} = 1 - \cos\alpha \div 1 + \cos\alpha$
- $\mathbf{ctg^2\alpha/2} = 1 + \cos\alpha \div 1 - \cos\alpha$

- Формулы преобразования суммы тригонометрической функции в произведение

- $\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$
- $\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$
- $\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\mathbf{tg}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) \div (1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta)$
- $\mathbf{tg}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta) \div (1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta)$
- $\mathbf{ctg}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = (\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + 1) \div (\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha)$
- $\mathbf{ctg}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1) \div (\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha)$

Решение уравнений с помощью замены переменных.

- **Уравнения вида P(sin x ± cos x, sin x *cos x) = 0**
  Уравнения вида ***P(sin x ± cos x, sin x *cos x) = 0***, где ***P(y, z)*** – многочлен, решается заменой
  $\cos x \pm \sin x = t$, $(\cos x \pm \sin x)^2 = t^2$,$1 \pm 2\sin x \cdot \cos x = t^2$,
  $\pm 2\sin x \cdot \cos x = t^2 - 1$
- **Решение уравнений с помощью универсальной подстановки.**
  Этот метод является общим для решения уравнений вида ***R(sinx, cosx) = 0***, где ***R (u, v)*** – дробно-рациональная функция от переменных u, v.
  Он основан на замене переменной tg x/2=t, следовательно, выражая выражения тригонометрических функций, будем иметь
  $\sin x = 2tg\frac{x}{2} \div 1+tg^2\frac{x}{2} = 2t \div 1+t^2$;
  $\cos x = 1-tg^2\frac{x}{2} \div 1+tg^2\frac{x}{2} = 1-t^2 \div 1+t^2$.
  При этом исходное уравнение преобразуется к виду R ($2t \div 1+t$, $1-t^2 \div 1+t^2$)= 0, которое является дробно-рациональным уравнением относительно t. Оно сводится (после умножения на общий знаменатель) к многочленному уравнению. Найдя корни $t = t_i$, где $i = 1,\ldots,k$ уравнения R ($2t \div 1+t$, $1-t^2 \div 1+t^2$) = 0, получим простейшие уравнения tg $\frac{x}{2} = t_i$ ($i = 1,\ldots, k$).
  Решив эти уравнения, найдем корни исходного уравнения. Замена tg $\frac{x}{2}$= t сужает ОДЗ исходного уравнения, так как функция tg $\frac{x}{2}$ не имеет смысла при $x \div 2=\pi \div 2+\pi n \longleftrightarrow x=(2n+1)\pi$, $n \in$ Z.
  Поэтому, при решении уравнения R(sinx, cosx) = 0 с помощью универсальной подстановки можно потерять корни. Чтобы этого не произошло, необходимо сначала проверить, будут ли значения $x \div 2=\pi \div 2+\pi n \longleftrightarrow x= (2n+1)\pi$, $n \in$ Z переменной *x* корнями исходного уравнения, а затем, считая, что $x \neq (2n+1)\pi$, $n \in$ Z , применить подстановку tg $\frac{x}{2}$= t.

Уравнения $f(x)=\sqrt{\varphi(x)}$, содержащие арифметический квадратный корень.

- Уравнения такого типа решаются следующим образом: при условии, что обе части тригонометрического уравнения неотрицательны, возводим их в квадрат и решаем. Самый лучший способ решения уравнения – каждый раз заменять его равносильным, тогда корни последнего уравнения будут корнями исходного. Такой способ решения уравнений считается идеальным. На практике приходится заменять уравнение его следствием, вообще говоря, ему не равносильным. При этом потеря корней не происходит, но посторонние корни могут появиться. Для исключения из решения уравнения таких корней необходимо провести проверку или для эквивалентности достаточно рассмотреть

$$\begin{cases} f^2(x)=\varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}.$$

анкетирования.

- Было проведено анкетирование среди 10-11 классов МБОУ СОШ №8 для того, чтобы узнать мнение старшеклассников о задании части С1(№15).

Им были предложены следующие вопросы и варианты ответа:

1) Вы считаете тема «Тригонометрические уравнения»

a) простая;
b) сложная;
c) не задумывался.

2) Кто и в каком классе оказывал Вам помощь при решении тригонометрических уравнений?

a) родители;
b) учитель;
c) друзья.

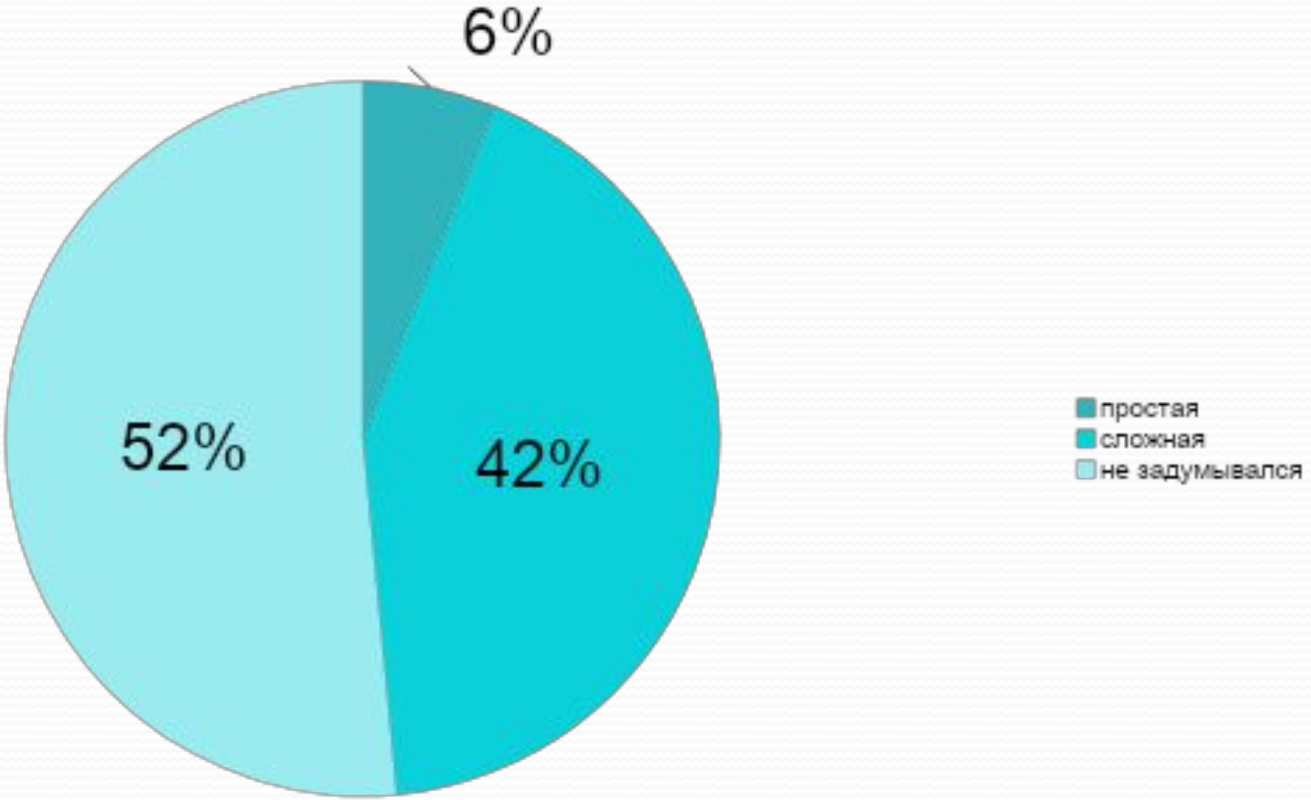
3) Будете ли Вы приступать к выполнению задания С1 (№15)?

a) да;
b) нет;
c) не знаю.

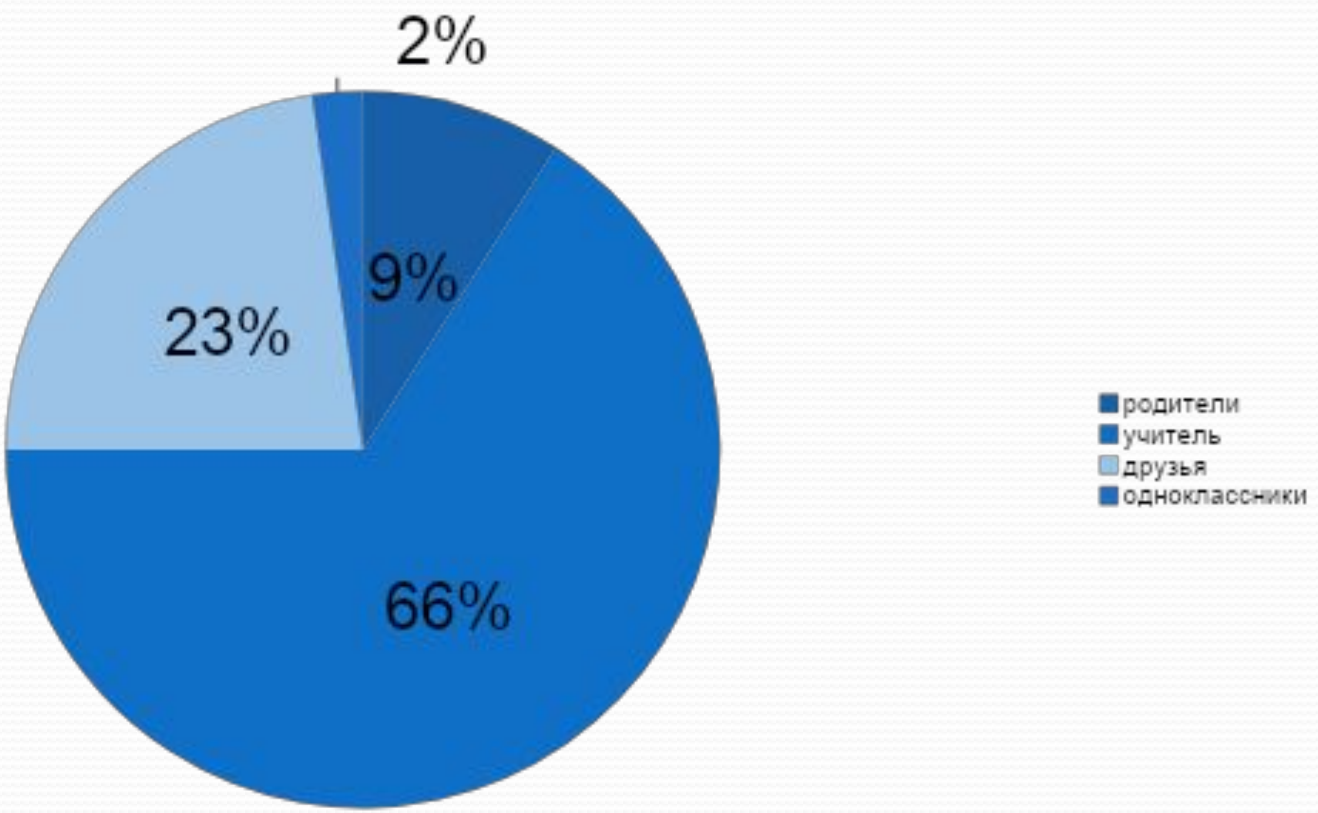
Из 53 учеников участвовали в анкетировании 33 человека.

Результаты, представленные в виде диаграмм

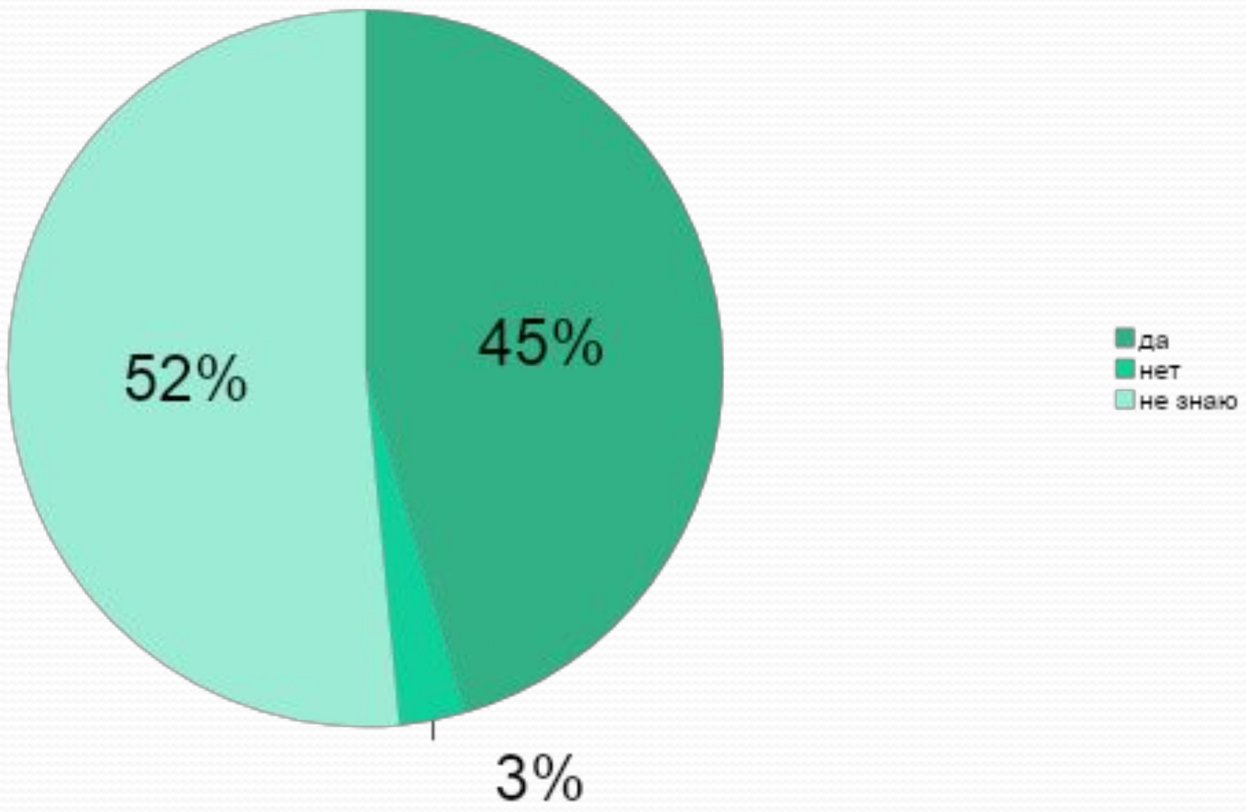
- 1 вопрос. Вы считаете тема «Тригонометрические уравнения»



- 2 вопрос. Кто и в каком классе оказывал Вам помощь при решении тригонометрических уравнений?



3 вопрос. Будете ли Вы приступать к выполнению задания С1 (№15)?



Заключение

В своей работе я изучила историю возникновения и применение на практике знаний о тригонометрии. Повторила решения тригонометрических уравнений школьного курса алгебры и познакомилась с новыми методами решений тригонометрических уравнений (замена неизвестного; решение уравнений, содержащих функцию под знаком радикала).

Кроме того, я исследовала классификацию уравнений по способу их решения, подобрала примеры уравнений, встречающихся на Едином государственном экзамене, и изучила способы отбора корней на заданном промежутке.

Углубленно изучила материалы по данной теме с использованием знаний, полученных на лекциях НОУ Уральского РЭК г.Белорецк с 2012 по 2014 гг. Эти конспекты помогли мне при написании данной исследовательской работы, также как и знания, полученные в Заочном физико-математическом лицее «Авангард» с 2010 по 2015 гг. и консультации с преподавателем математики Бычковой Светланой Владимировной.

Благодаря изучению данной темы я смогла решить заключительную олимпиаду по математике среди учащихся 10 классов, что подтверждаю своими дипломами. Также прошла в полном объеме курсы дополнительной физико-математической подготовки Всероссийской школы математики и физики «Авангард».

Цель моего исследования достигнута: мне удалось решить тригонометрическое уравнение из части С1 (№15) 3 способами по отбору корней. В ходе анкетирования выяснила, какое мнение имеют о части С1 (№15) мои одноклассники и выпускники МБОУ СОШ №8. Данная тема не оставила их равнодушными, так как тригонометрические уравнения вызывают затруднения при сдаче выпускного экзамена в форме ЕГЭ.

Мои достижения

Спасибо за внимание!