Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений величин

10 класс

МАОУ СОШ № 13 города Тюмени

Повторение

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанных промежутках:

$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке $[0; 2]$

$y_{наиб} = y(1) = 4, y_{наим} = y(0) = -3$

$y = \frac{1}{5}x^5 - x^2$ на промежутке $(-\infty; 1)$

$y_{наиб} = y(0) = 0$

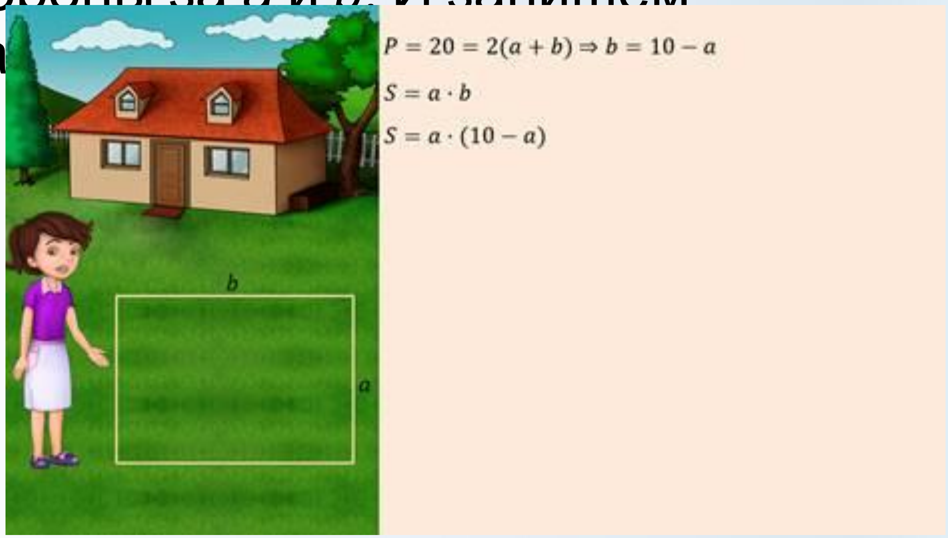
$y = 3x - 6$ на отрезке $[-1; 4]$

$y_{наиб} = y(4) = 6, y_{наим} = y(-1) = -9$

Задача

Таня очень любит возиться с цветами. Поэтому родители на даче выделили место под клумбу. Огородить клумбу они решили декоративным забором. Таня решила сделать клумбу прямоугольной формы. У неё есть двадцать метров забора. Давайте поможем Тане определиться со сторонами прямоугольника, чтобы площадь клумбы была наибольшей.

Для начала давайте изобразим прямоугольник. Обозначим его стороны за *a* и *b*. И запишем известные нам фа



$$P = 20 = 2(a + b) \Rightarrow b = 10 - a$$

$$S = a \cdot b$$

$$S = a \cdot (10 - a)$$

Тогда наша задача сводиться к нахождению наибольшей площади. То есть, если мы формулу для вычисления площади примем за функцию с аргументом *a* и функцией *S*, то наша задача сводится к нахождению наибольшего значения функции. Теперь давайте определимся с промежутком, в котором будет изменяться значения аргумента функции. Очевидно, что стороной прямоугольника может быть число от 0 до 10. Теперь применим алгоритм отыскания наибольшего значения функции на промежутке

$$P = 20 = 2(a + b) \Rightarrow b = 10 - a$$

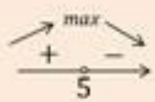
$$S = a \cdot b$$

$$S = a \cdot (10 - a)$$

a – аргумент, S - функция

$$a \in (0; 10)$$

$$S' = (10a - a^2)' = 10 - 2a$$



$$S' = 0 \Leftrightarrow a = 5 \in (0; 10)$$

$$S = 5 \cdot 5 = 25\ (м^2)$$

Задачи такого типа называют **задачами на оптимизацию**. То есть нам надо найти такие значения неких переменных, при которых другие зависящие от них переменные принимают наибольшие или наименьшие значения.

$P = 20 = 2(a + b) \Rightarrow b = 10 - a$

$S = a \cdot b$

$S = a \cdot (10 - a)$

a – аргумент, S - функция

$a \in (0; 10)$

$S' = (10a - a^2)' = 10 - 2a$

$\overset{+}{\nearrow} \; 5 \; \overset{-}{\searrow}$ max

$S' = 0 \Leftrightarrow a = 5 \in (0; 10)$

$S = 5 \cdot 5 = 25$ (м^2)

составление математической модели | работа с математической моделью | ответ на вопрос задачи

Схема решения задач на оптимизацию

1. Составить математическую модель.
2. Провести работу с этой моделью, то есть решить ее.
3. Сформулировать ответ.

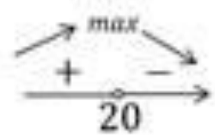
Задача

Сумма двух целых чисел равна 40. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

Решение:

x – одно из чисел, значит, $40 - x$ – второе число

$x \cdot (40 - x) = f(x)$



$x \in (-\infty; +\infty)$

$f' = 40 - 2x$

$f' = 0 \Leftrightarrow x = 20, y = 20$

Задача

На графике функции $y = x^2$ найти точку M, ближайшую к точке $A(0; 1{,}5)$.

Решение:

$AM^2 = (x-0)^2 + (y-1{,}5)^2$

$y = x^2 \Rightarrow S = (x-0)^2 + (x^2-1{,}5)^2 =$

$= x^2 + x^4 - 3x^2 + 2{,}25 = x^4 - 2x^2 + 2{,}25$

$x \in (-\infty; +\infty)$

$y' = 4x^3 - 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0$

$x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-1\quad 0\quad 1$

min min

$(-1; 1)$

$(1; 1)$