СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ (ВЫЧИТАНИЯ) АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

1. *Привести все дроби к общему знаменателю; если они с самого начала имели одинаковые знаменатели, то этот шаг алгоритма опускают.*
2. *Выполнить сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.*

Пример 1: Выполнить действия: 1) $\frac{a}{4b^2}+\frac{a^2}{6b^3}$ 2) $\frac{x}{x+y}-\frac{x}{x-y}$

Решение:

$$\frac{a}{4b^2}+\frac{a^2}{6b^3}=\frac{3ab}{12b^3}+\frac{2a^2}{12b^3}=\frac{3ab+2a^2}{12b^3};$$

$$\frac{x}{x+y}-\frac{x}{x-y}=\frac{x^2-xy}{x^2-y^2}-\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}=\frac{(x^2-xy)-(x^2+xy)}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{x^2-xy-x^2-xy}{x^2-y^2}=\frac{-2xy}{x^2-y^2}.$$

$$\frac{a}{4b^2} \text{ и } \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 \quad \begin{matrix} \vdots 4b^2 \\ \vdots 6b^3 \end{matrix}$$

$$\frac{x}{x+y} \text{ и } \frac{x}{x-y}$$

$$(x+y)(x-y) \quad \begin{matrix} \vdots x+y \\ \vdots x-y \end{matrix}$$

Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов;

Определить для каждого несколько раз встречающегося буквенного множителя наибольший показатель степени;

Собрать все в одно произведение.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ОБЩЕГО ЗНАМЕНАТЕЛЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

1. *Разложить все знаменатели на множители.*
2. *Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов, имеющихся в разложениях на множители, составленных на первом шаге.*
3. *Составить произведение, включив в него в качестве множителей все буквенные множители разложений, полученных на первом шаге алгоритма. Если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то его следует взять с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся.*
4. *Приписать к произведению, полученному на третьем шаге, числовой коэффициент, найденный на втором шаге; в итоге получится общий знаменатель.*

Замечание:

$$\frac{a}{4b^2} \quad и \quad \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 \qquad 24b^3 \qquad 48a^2b^4$$

Общий знаменатель - *Наименьший общий знаменатель*

$$\frac{a}{4b^2} \quad и \quad \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 : 4b^2 = 3b \qquad\qquad 2 = 12b^3 : 6b^3$$

$$\frac{a^{\lfloor 3b}}{4b^2} + \frac{a^{2\lfloor 2}}{6b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}$$

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

1. *Разложить все знаменатели на множители.*
2. *Из первого знаменателя выписать произведение всех его множителей, из остальных знаменателей приписать к этому произведению недостающие множители. Полученное произведение и будет общим (новым) знаменателем.*
3. *Найти дополнительные множители для каждой из дробей: это будут произведения тех множителей, которые имеются в новом знаменателе, но которых нет в старом знаменателе.*
4. *Найти для каждой дроби новый числитель: это будет произведение старого числителя и дополнительного множителя.*
5. *Записать каждую дробь с новым числителем и новым (общим) знаменателем.*

Пример 2: Упростить выражение: $\dfrac{3a}{4a^2-1}-\dfrac{a+1}{2a^2+a}.$

Решение:

Первый этап:

$4a^2-1=\underline{(2a-1)(2a+1)},\qquad 2a^2+a=\underline{a}(2a+1).$

$a(2a-1)(2a+1)$

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$(2a-1)(2a+1)$ $a(2a+1)$	$a(2a-1)(2a+1)$	a $(2a-1)$

Второй этап:

$$\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}=\frac{3a^{\,\lfloor a}}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{a+1^{\,\lfloor 2a-1}}{a(2a+1)}=\frac{3a^2-(a+1)(2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-(2a^2-a+2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a^2-2a^2+a-2a+1}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{a^2-a+1}{a(2a-1)(2a+1)}.$$

Пример 3: Упростить выражение:

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2}-\frac{1}{3ab^2-3a^3}+\frac{b}{6a^4-6a^3b}.$$

Решение:

Первый этап:

$$2a^4+4a^3b+2a^2b^2=2a^2\boxed{(a^2+2ab+b^2)}=\underline{2a^2(a+b}\,)^2;$$

$$3ab^2-3a^3=3a(b^2-a^2)=\underline{3}a\underline{(b-a})(b+a);$$

$$6a^4-6a^3b=6a^3(a-b).$$

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$2a^2(a+b)^2$ $3a(b-a)(b+a)$ $6a^3(a-b)$	$6a^3(a-b)(a+b)^2$	$3a(a-b)$ $-2a^2(a+b)$ $(a+b)^2$

Второй этап:

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2}-\frac{1}{3ab^2-3a^3}+\frac{b}{6a^4-6a^3b}=$$

$$=\frac{b^{|\underline{3a(a-b)}}}{2a^2(a+b)^2}+\frac{1^{|\underline{2a^2(a+b)}}}{3a(a-b)(a+b)}+\frac{b^{|\underline{(a+b)^2}}}{6a^3(a-b)}=$$

$$=\frac{3ab(a-b)+2a^2(a+b)+b(a^2+2ab+b^2)}{6a^3(a-b)(a+b)^2}=$$

$$=\frac{3a^2b-3ab^2+2a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2+b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a^3+6a^2b-ab^2+b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2}.$$

$a\neq 0,\ a\neq b,\ a\neq -b$ - в этих случаях знаменатели обращаются в нуль