

# *«Вперед к задачам №14 ЕГЭ»*

*«Человек, по-настоящему мыслящий,  
черпает из собственных ошибок  
не меньше познания, чем из успехов».*

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем - исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Мы уже хорошо знакомы с векторами, координатами и их свойствами. Цель нашей работы: научиться применять знания для решения задач стереометрии.

## Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

В задании ЕГЭ по стереометрии чаще всего требуется найти:

- угол между двумя скрещивающимися прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между двумя плоскостями,
- расстояние между двумя скрещивающимися прямыми,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние от точки до плоскости.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

При нахождении угла между прямыми используют  
формулу  $\cos \phi = \frac{|\vec{q} \cdot \vec{p}|}{|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|}$

или в координатной форме

$$\cos \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 2, высота — 4. Точка  $E$  — середина отрезка  $CD$ , точка  $F$  — середина отрезка  $AD$ . Найдите угол между прямыми  $CF$  и  $B_1 E$ .

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Угол между прямой и плоскостью можно  
вычислить:

по формуле  $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$  или в координатах

$$\sin \phi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где  $\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$  - вектор нормали к плоскости  $\alpha$ ,  
 $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$  - направляющий вектор прямой /

## Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB=8$ ,  $BC=6$ ,  $AA_1=12$ .

Точка  $K$  – середина ребра  $AD$ ,  
точка  $M$  лежит на ребре  $DD_1$   
так, что  $DM: D_1 M=1:2$ .

- а) Докажите, что прямая  $BD_1$  параллельна плоскости  $CKM$ .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $CKM$ .

Вариант 126 alexs.larin



Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$

вычисляется по формуле  $\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

где  $M(x_0; y_0; z_0)$ , плоскость задана уравнением

$$ax + by + cz + d = 0;$$

## Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости.

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   
 $AB=6, BC=4, AA_1=7$ .

Точка  $P$  – середина ребра  $AB$ , точка  $M$  лежит на  
ребре  $DD_1$  так, что  $DM:D_1M=2:5$ .

Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  
 $MPC$ .

Вариант 125 aleks.larin

# Задача на нахождение расстояния между двумя прямыми.

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 8$  и  $BD = 6$ .

а) Докажите, что прямые  $BD_1$  и  $AC$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $BD_1$  и  $AC$ , если известно, что боковое ребро призмы равно 12.

Вариант 124 alexs.larin

# Решение.

Введём декартову систему координат. Чтобы вычислить координаты т.К, воспользуемся формулой для нахождения координат точки, которая делит отрезок  $BD_1$  в отношении  $\lambda = BK:KD_1$ , где  $K(x;y;z)$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

# Расстояние между точками A и B

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ:

по формуле

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

где  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ;

## Задача на нахождение расстояния между двумя точками.

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB = 6$ , точка  $P$  — середина ребра  $A_1 D_1$ , а точка  $M$  расположена на диагонали  $CC_1$  так, что  $CM = 2MC_1$ . Найдите расстояние между точками  $P$  и  $M$ .

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно

вычислить:

по формуле

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

или в координатной форме

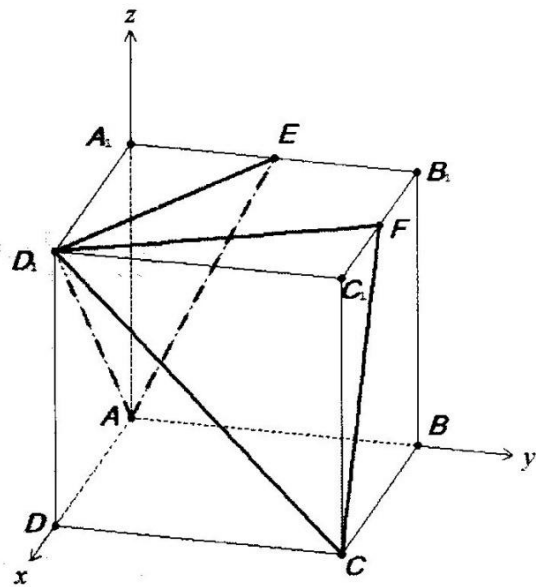
$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

где  $\vec{n} \{A; B; C\}$  - вектор нормали плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,

Задача на нахождение  
угла между двумя плоскостями.

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите  
угол между плоскостями  $AD_1 E$  и  $D_1 F C$ , где  
точки  $E$  и  $F$  - середины ребер  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$ .





Найдём искомый угол как угол между нормальными плоскостями

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Как вы видите, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающиеся прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто надо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться формулой.



**Благодарим  
за внимание!**