«Вперед к задачам №14 ЕГЭ»

«Человек, по-настоящему мыслящий, черпает из собственных ошибок не меньше познания, чем из успехов».

Координатный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Мы уже хорошо знакомы с векторами, координатами и их свойствами. Цель нашей работы: научиться применять знания для решения задач стереометрии.

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

В задании ЕГЭ по стереометрии чаще всего требуется найти:

- угол между двумя скрещивающимися прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между двумя плоскостями,
- расстояние между двумя скрещивающимися прямыми,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние от точки до плоскости.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

При нахождении угла между прямыми используют формулу

$$cos\phi = \frac{\left|\vec{q} \cdot \vec{p}\right|}{\left|\vec{q}\right| \cdot \left|\vec{p}\right|}$$

или в координатной форме

$$\cos\phi = \frac{\left|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота — 4. Точка E — середина отрезка CD, точка F — середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Угол между прямой и плоскостью можно вычислить:

по формуле $\sin\phi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|}$ или в координатах

$$\sin\phi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где $\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$ - вектор нормали к плоскости α,

$\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\}$ - направляющий векор прямой *l*

Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDAB_1C_1D_1$ $AB=8$, $BC=6$, $AA_1=12$.

Точка К – середина ребра AD,

точка М лежит на ребре DD_1

так, что $DM:D_1M=1:2$.

а) Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости СКМ.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью СКМ .

Вариант 126 aleks.larin

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от точки М до плоскости α

вычисляется по формуле $$\rho(M;\alpha)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

,

где $M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость задана уравнением

$ax+by+cz+d=0$;

Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$
$AB=6$, $BC=4$, $AA_1=7$.
Точка P – середина ребра AB, точка M лежит на ребре DD_1 так, что $DM:D_1M=2:5$.
Найдите расстояние от точки D до плоскости MPC.
Вариант 125 aleks.larin

Задача на нахождение расстояния между двумя прямыми.

В основании прямой призмы *ABCDA1B1C1D1* лежит ромб *ABCD* с диагоналями $AC = 8$ и $BD = 6$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если известно, что боковое ребро призмы равно 12.

Вариант 124 aleks.larin

Решение.

Введём декартову систему координат. Чтобы вычислить координаты т.К, воспользуемся формулой для нахождения координат точки, которая делит отрезок BD_1 в отношении λ=ВК:КД1 ,где К(x;y;z)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Расстояние между точками А и В

можно вычислить:

по формуле

$$\rho(A;B)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

где $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$;

Задача на нахождение расстояния между двумя точками.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$, точка Р середина ребра АД, а точка М расположена на диагонали CC_1 так, что $CM = 2MC_1$. Найдите расстояние между точками Р и М.

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить:

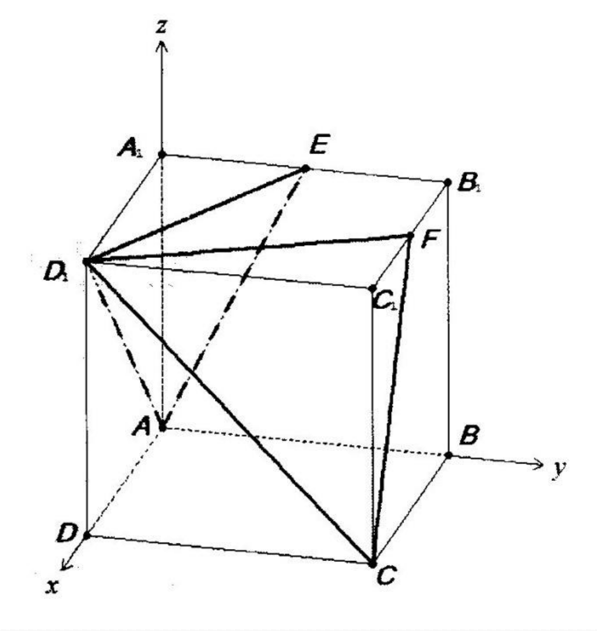
по формуле
$$cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}$$

или в координатной форме
$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

где $\vec{n}\{A;B;C\}$ - вектор нормали плоскости Ax+By+Cz+D=0,

Задача на нахождение угла между двумя плоскостями.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1.



Найдём искомый угол как угол между нормалями плоскостей

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

Как вы видите, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающие прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто надо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться формулой.

Благодарим за внимание!