# Подготовка к ЕГЭ (базовый уровень)
# Показательные уравнения

## Показательные уравнения

**Отступление №1: «Степени чисел»**

1. Как известно, степени чисел могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными. Кратко напомним об этом конкретными примерами.

a) Целая положительная степень (то есть 1, 2, 3 … и так далее).

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$$

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

$$10^1 = 10.$$

b) Целая отрицательная степень (то есть -1, -2, -3 … и так далее).

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32},$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125},$$

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$. *В общем случае,* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

## c) Дробная положительная степень

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2;$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

- В числителе дроби не обязательно должна стоять 1. В этом случае число нужно понимать так:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3};$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$81^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{81^5}$ *и так далее.*

d) Любое число в нулевой степени равно 1.

$4^0 = 1, \qquad 10^0 = 1$ и так далее.

e) 1 в любой степени равно 1.

$1^5 = 1, \qquad 1^{-2} = 1, \qquad 1^{99} = 1$ и так далее.

Набор формул показывающий, какие действия можно выполнять с двумя и более числами, имеющими степени (то есть любыми числами, указанными в пунктах a) – f)).

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. *Например*, $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$;

b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. *Например*, $\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$;

c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. *Например*, $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$;

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. *Например*, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$;

e) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. *Например*, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

- Умножать и делить друг на друга можно только числа с одинаковыми основаниями!

# Примеры решения показательных уравнений

- **Задание №1** Найдите корень уравнения:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}.$$

Показательные уравнения удобно решать по следующей простой схеме.

- 1-й этап: привести обе части уравнения к одинаковым основаниям. В принципе, можно приводить левое основание к правому, правое к левому или оба основания к какому-либо третьему. А выбирать нужно тот вариант приведения, который проще с точки зрения вычислений. Зачем создавать себе лишние трудности?

В нашем примере удобнее поработать с правой частью:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

- Тогда уравнение будет выглядеть так:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

- 2-й этап: приравнять «верхушки», то есть степени.

$$x - 12 = 2$$

$$x = 2 + 12 = 14$$

- 3-этап: проверить полученный корень (корни).

Подставляем x=14 в исходное уравнение и проверяем, будут ли равны обе части уравнения:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{14-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}.$$

Действительно, при x=14 , левая часть уравнения равна правой.

Ответ: 14

- **Задание №2** *Найдите корень уравнения*

$$4^{5x-13}=\frac{1}{64}.$$

- ***1-й этап:*** *привести обе части уравнения к одинаковым основаниям. Проще преобразовать правую часть уравнения к основанию 4:*

$$\frac{1}{64}=\frac{1}{4^3}=4^{-3}.$$

*Тогда уравнение будет выглядеть так:*

$$4^{5x-13}=4^{-3}.$$

- **2-й этап:** *приравнять «верхушки», то есть степени.*

$$5x - 13 = -3$$

$$5x = -3 + 13 = 10$$

$$x = {}^{10}/_{5} = 2$$

- **3-этап:** *проверить полученный корень (корни).*

$$4^{5\cdot 2-13} = 4^{10-13} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

***Проверка показала, что корень x=2 найден правильно.***

***Ответ:2***

- **Решите самостоятельно**

*Найдите корень уравнения*

**Задание №1**

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} = 49.$$

**Ответ: 3**

**Задание №3**

**Задание №2**

$$3^{5+x} = 27.$$

$$4^{x-11} = \frac{1}{16}.$$

**Ответ:9**

**Ответ:-2**