

# Последовательности

---

## Арифметическая прогрессия

# Арифметическая прогрессия

**Арифметическая прогрессия** – это числовая последовательность, каждый член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

**$d$**  – разность арифметической прогрессии.

$$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}; (b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\};$$
$$(c_n) = \{-5; -1; 3; 7; 11; 15; \dots\}; (d_n) = \{-6; 5; 17; 28; 39; \dots\}.$$

– не арифметическая прогрессия;

$$6 - 3 = 3$$

$$9 - 6 = 3$$

$$12 - 9 = 3$$

$$15 - 12 = 3$$

$$17 - 15 = 2 \neq 3$$

$$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}; (b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\};$$
$$(c_n) = \{-5; -1; 3; 7; 11; 15; \dots\}; (d_n) = \{-6; 5; 17; 28; 39; \dots\}.$$

$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}$  – не арифметическая прогрессия;  
– арифметическая прогрессия;

$$12 - 1 = 11$$

$$23 - 12 = 11$$

$$34 - 23 = 11$$

$$45 - 34 = 11$$

$$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}; (b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\};$$
$$(c_n) = \{-5; -1; 3; 7; 11; 15; \dots\}; (d_n) = \{-6; 5; 17; 28; 39; \dots\}.$$

$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}$  – не арифметическая прогрессия;

$(b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\}$  – арифметическая прогрессия;

– арифметическая прогрессия;

$$-1 - (-5) = 4$$

$$3 - (-1) = 4$$

$$7 - 3 = 4$$

$$11 - 7 = 4$$

$$15 - 11 = 4$$

$$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}; (b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\};$$
$$(c_n) = \{-5; -1; 3; 7; 11; 15; \dots\}; (d_n) = \{-6; 5; 17; 28; 39; \dots\}.$$

$(a_n) = \{3; 6; 9; 12; 15; 17; \dots\}$  – не арифметическая прогрессия;

$(b_n) = \{1; 12; 23; 34; 45; \dots\}$  – арифметическая прогрессия;

$(c_n) = \{-5; -1; 3; 7; 11; 15; \dots\}$  – арифметическая прогрессия;

– не арифметическая прогрессия.

$$5 - (-6) = 11$$

$$17 - 5 = 12 \neq 11$$

$$28 - 17 = 11$$

$$39 - 28 = 11$$

Рассмотрим арифметическую прогрессию 3; 7; 11; 15; 19 ....

Найдем 7-ой член прогрессии.

$$a_n = \{3; 7; 11; 15; 19 \dots\}$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$7 = 3 + d \Rightarrow d = 7 - 3 = 4$$

$$a_6 = a_5 + d \Rightarrow a_6 = 19 + 4 = 23$$

$$a_7 = a_6 + d \Rightarrow a_7 = 23 + 4 = 27$$

$$a_{200} = ?$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3 \cdot 4 = 3 + 12 = 15$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19$$

$$\begin{array}{cccccc} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & d & d & d & d & d \\ 3 & & 7 & & 11 & & 15 & & 19 & & a_n \\ \hline n = 1 & & n = 2 & & n = 3 & & n = 4 & & n = 5 & & n \end{array}$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_{200} = a_1 + 199d = 3 + 199 \cdot 4 = 799$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

# Арифметические прогрессии:

**Возрастающие** – это прогрессии, в которых каждый последующий член больше предыдущего.

$$(a_n) = \{4; 6; 8; 10; 12\}; (b_n) = \{-2; 4; 10; 16; 20\}$$

$$d > 0$$

**Убывающие** – это прогрессии, в которых каждый последующий член меньше предыдущего.

$$(a_n) = \{12; 10; 8; 6; 4\}; (b_n) = \{4; 0; -4; -8; -12\}$$

$$d < 0$$

Найти  $a_5, a_{10}, a_{100}$ , если  $a_1 = 15, d = -7$ .

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 15 + 4 \cdot (-7) = -13$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow a_{10} = 15 + 9 \cdot (-7) = -48$$

$$a_{100} = a_1 + 99d \Rightarrow a_{100} = 15 + 99 \cdot (-7) = -678$$

Ответ:  $a_5 = -13; a_{10} = -48; a_{100} = -678$ .

Найти номер члена арифметической прогрессии равного 22, если

$$a_3 = -2, d = 3.$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = a_3 - 2d \Rightarrow a_1 = -2 - 2 \cdot 3 = -8$$

$$22 = -8 + (n - 1) \cdot 3$$

$$22 = -8 + 3n - 3$$

$$22 + 11 = 3n$$

$$n = 11$$

Ответ: 11.

Пусть  $4; x; 12; \dots$  – арифметическая прогрессия. Найти  $x$ .

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$12 = 4 + 2d$$

$$2d = 12 - 4$$

$$2d = 8$$

$$d = 4$$

$$x = 4 + d$$

$$x = 8$$

Ответ: 8.

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Пусть  $4024; x; 6072; \dots$  – арифметическая прогрессия. Найти  $x$ .

Пусть дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ . Найти  $a_n$ , зная  $a_{n-1}$  и  $a_{n+1}$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{n-1} = a_n - d$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n - d + a_n + d = 2a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

**Основное свойство арифметической прогрессии**

Пусть 4024;  $x$ ; 6072; ... – арифметическая прогрессия. Найти  $x$ .

$$x = \frac{4024 + 6072}{2}$$

$$x = 5048$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ответ: 5048.

Найти сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, состоящей из четных чисел, записанных в порядке возрастания.

2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18;

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 90$$

Ответ: 90.

Пусть дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ . Найти сумму первых  $n$  членов прогрессии.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \quad n$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)}$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

$$\begin{aligned} a_3 + a_{n-2} &= (a_1 + 2d) + (a_{n-1} - d) = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = \\ &= (a_1 + 2d) + (a_n - d - d) = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n \end{aligned}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Найти сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, состоящей из положительных чисел, записанных в порядке возрастания.

2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18.

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2 + 18}{2} \cdot 9 = 10 \cdot 9 = 90$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Ответ: 90.

Найти сумму первых 100 членов арифметической прогрессии,  
заданной формулой:  $a_n = -3n + 1$ .

$$a_1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$$

$$a_{100} = -3 \cdot 100 + 1 = -299$$

$$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100$$

$$S_{100} = \frac{-2 - 299}{2} \cdot 100$$

$$S_{100} = -15050$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Ответ:  $-15050$ .

Найти сумму первых 34 членов арифметической прогрессии:

$$a_1 = 8; d = 3.$$

$$a_{34} = a_1 + 33d$$

$$a_{34} = 8 + 33 \cdot 3 = 107$$

$$S_{34} = \frac{a_1 + a_{34}}{2} \cdot 34$$

$$S_{34} = \frac{8 + 107}{2} \cdot 34$$

$$S_{34} = 1955$$

$$S_n = \frac{a_1 + (a_1 + d(n - 1))}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

$$S_{34} = \frac{2 \cdot 8 + 3(34 - 1)}{2} \cdot 34$$

$$S_{34} = 1955$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Ответ: 1955.

Найти сумму всех членов арифметической прогрессии с 32-го по 54-ый включительно:  $a_1 = 10$ ;  $d = 2$ .

$$S_{54} = S_{31} + S_{[32;54]}$$

$$S_{[32;54]} = S_{54} - S_{31}$$

$$S_{54} = \frac{2 \cdot a_1 + d(54-1)}{2} \cdot 54 \Rightarrow S_{54} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 53}{2} \cdot 54 \Rightarrow S_{54} = 3402$$

$$S_{31} = \frac{2 \cdot a_1 + d(31-1)}{2} \cdot 31 \Rightarrow S_{31} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 30}{2} \cdot 31 \Rightarrow S_{31} = 1240$$

$$S_{[32;54]} = 3402 - 1240 = 2162$$

Ответ: 2162.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Найти сумму  $n$  первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой  $n$ -ого члена:  $a_n = 3n + 1$ .

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$a_1 = 4$$

$$S_n = \frac{a_1 + 3n + 1}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{4 + 3n + 1}{2} \cdot n$$

$$S_n = (2,5 + 1,5n)n$$

$$S_n = 1,5n^2 + 2,5n$$

Ответ:  $1,5n^2 + 2,5n$ .

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Задана арифметическая прогрессия, где  $a_5 = 38$ ,  $a_{10} = 23$ .

Найти  $a_{15}$  и  $S_{10}$ .

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38 = a_1 + 4d \\ 23 = a_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38 = a_1 + 4d \\ 15 = -5d \end{cases}$$

$$d = -3; a_1 = 50$$

$$a_{15} = a_1 + 14d \Leftrightarrow a_{15} = 50 - 3 \cdot 14 = 8$$

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 \Leftrightarrow S_{10} = \frac{2 \cdot 50 + 9 \cdot (-3)}{2} \cdot 10$$

$$S_{10} = 365$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$$

Ответ:  $a_{15} = 8$ ;  $S_{10} = 365$ .

# Арифметическая прогрессия

## Арифметическая прогрессия

**Арифметическая прогрессия** – это числовая последовательность, каждый член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$d$  – разность арифметической прогрессии.

Пусть дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ . Найти  $a_n$ , зная  $a_{n-1}$  и  $a_{n+1}$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{n-1} = a_n - d$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n - d + a_n + d = 2a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Пусть дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ . Найти сумму первых  $n$  членов прогрессии.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \quad n$$

$$2S_n = \overbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)}$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_{n-1} - d) = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = \\ = (a_1 + 2d) + (a_n - d - d) = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$