

# Логарифмическая функция

Назарова Галина Алексеевна  
учитель математики  
ГБОУ Гимназия №1797  
« Богородская »  
г. Москва

# Логарифмическая функция

**Определение:**

Функцию заданную формулой

$$\underline{y = \log_a x}$$

называют логарифмической функцией с основанием  $a$ .

$$\underline{a > 0, a \neq 1}$$

# Свойства логарифмической функции

*Свойство 1°:*

Область определения логарифмической функции –  
множество всех положительных действительных чисел  $R_+$ ,

$$\underline{D(\log_a) = R_+}$$

*Доказательство:*

По определению логарифма

# Свойства логарифмической функции

*Свойство 2°:*

Область значения логарифмической функции – множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ , т.е.

$$\underline{E(\log_a) = \mathbb{R}}$$

*Доказательство:*

В самом деле, по определению логарифма любого действительного  $y$  справедливо равенство

$$\log_a(a^y) = y$$

т.е. функция  $y = \log_a x$  принимает значение  $y_0$  в точке  $x_0 = a^{y_0}$

# Свойства логарифмической функции

## Свойство 3°:

Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при  $a > 1$ )  
убывает (при  $0 < a < 1$ ).

### Доказательство:

Докажем что при  $a > 1$  функция возрастает (в случае  $0 < a < 1$  доказательно аналогично). Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – любые положительные числа и  $x_2 > x_1$ . Надо доказать что  $\log_a x_2 > \log_a x_1$ . Допустим противное, т.е. что

$$\log_a x_2 \leq \log_a x_1 \quad (1)$$

Т.к. функция  $y = a^x$  при  $a > 1$  возрастает, из неравенства (1) следует:

$$a^{\log_a x_2} \leq a^{\log_a x_1} \quad (2)$$

Но  $a^{\log_a x_2} = x_2$ ,  $a^{\log_a x_1} = x_1$  (по определению логарифма), т.е. неравенство (2) означает, что  $x_2 \leq x_1$ . Это противоречит допущению  $x_2 > x_1$ .

Определите какая из перечисленных функций является убывающей, а какая возрастающей?

$$1) y = \log_5 x$$

$$2) y = \log_{\sqrt{3}} x$$

$$3) y = \log_{\pi} (x + 1)$$

$$4) y = \log_{0,7} (x - 3)$$

# Сравните числа

*a)*  $\log_2 3,8$  и  $\log_2 4,7$

*б)*  $\log_{\frac{1}{3}} 0,15$  и  $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$

# Ответы:

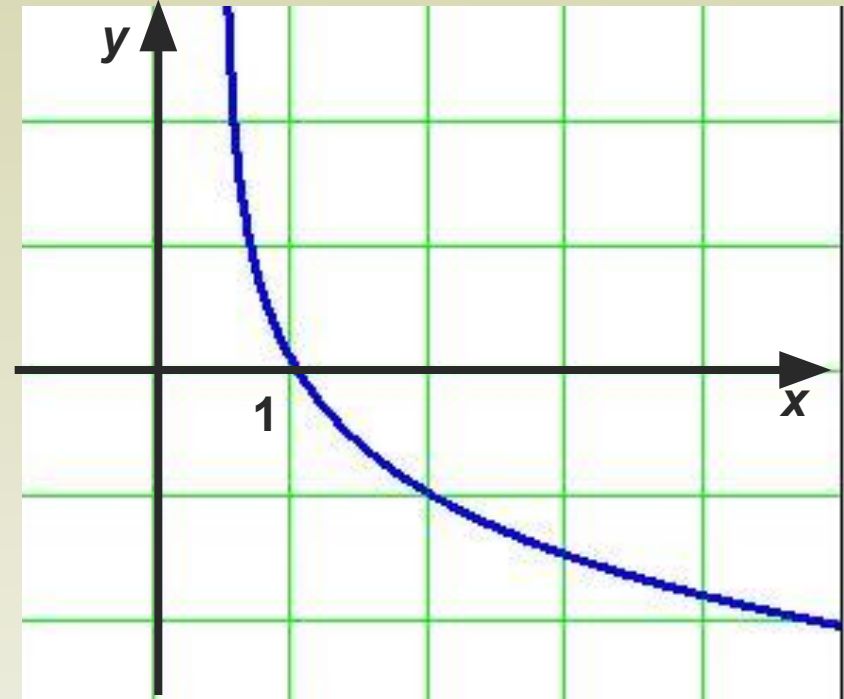
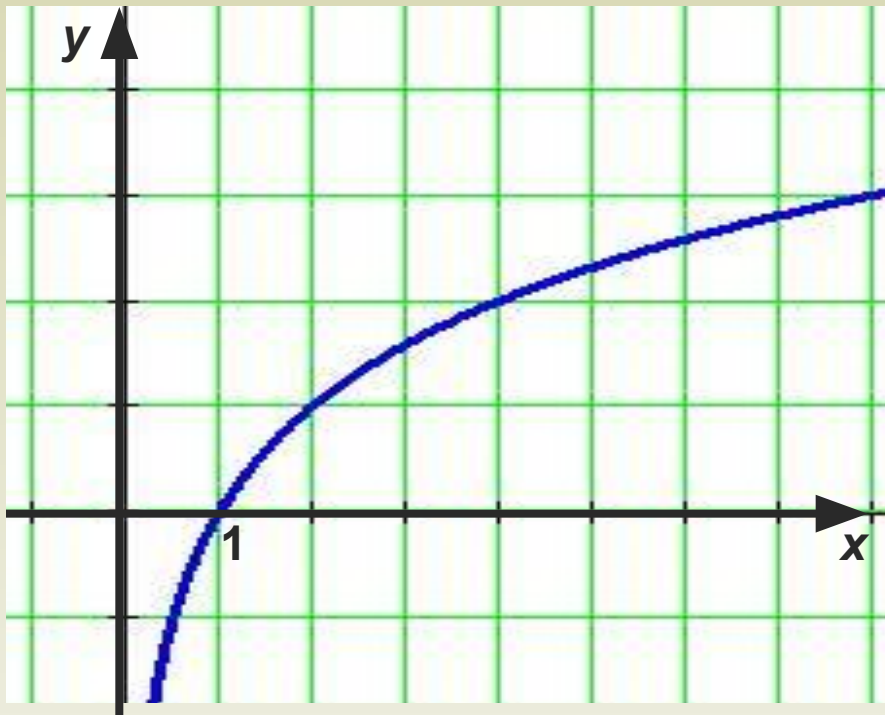
$$a) \log_2 3,8 < \log_2 4,7$$

$$б) \log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2$$

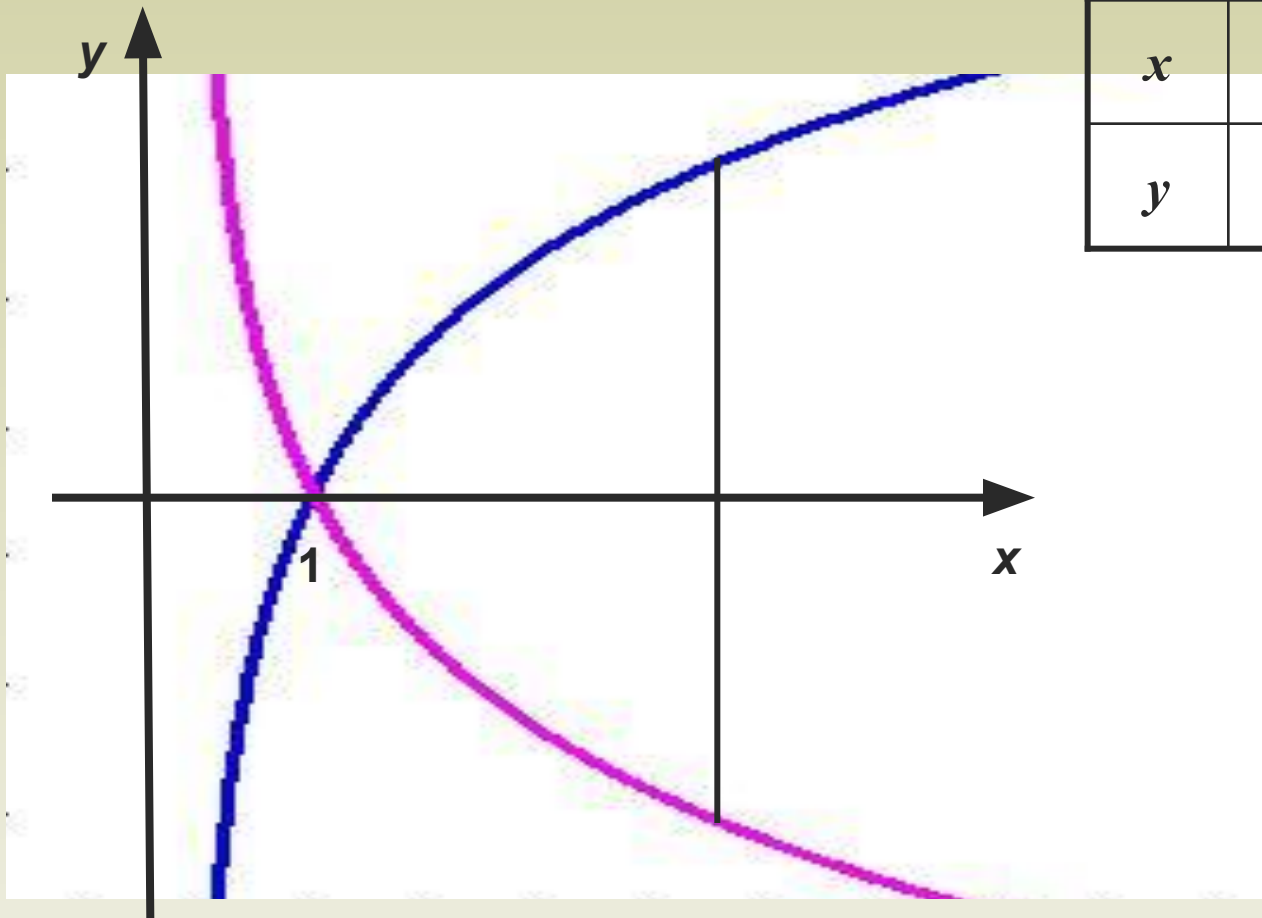


# График логарифмической функции

$$a > 1 \quad y = \log_a x \quad 0 < a < 1$$



# Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = -\log_2 x$



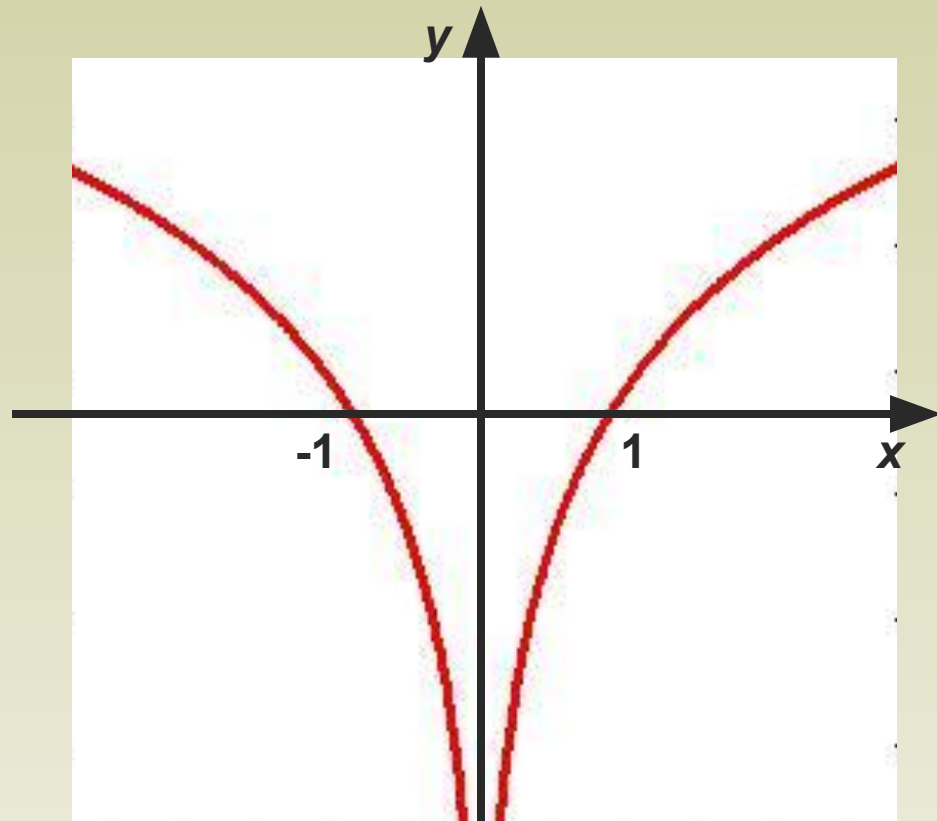
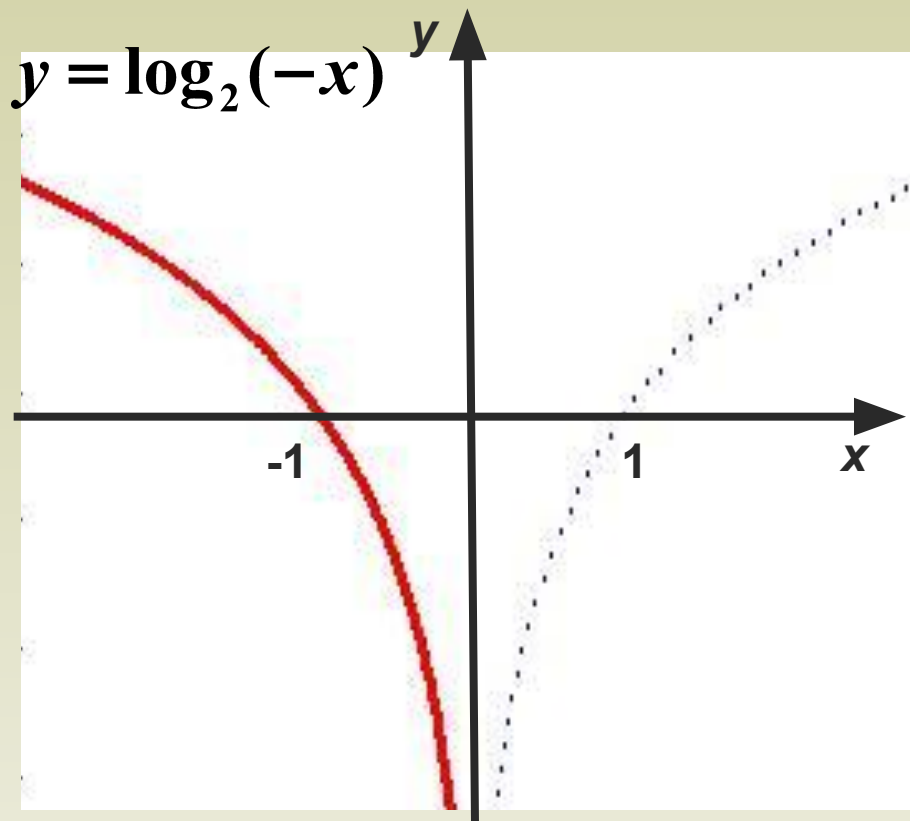
$x$	0.5	1	2	4
$y$	-1	0	1	2

$$\underline{y = \log_2 x}$$

$$\underline{y = -\log_2 x}$$

# Графики функций

$$y = \log_2(-x) \text{ и } y = \log_2|x|$$

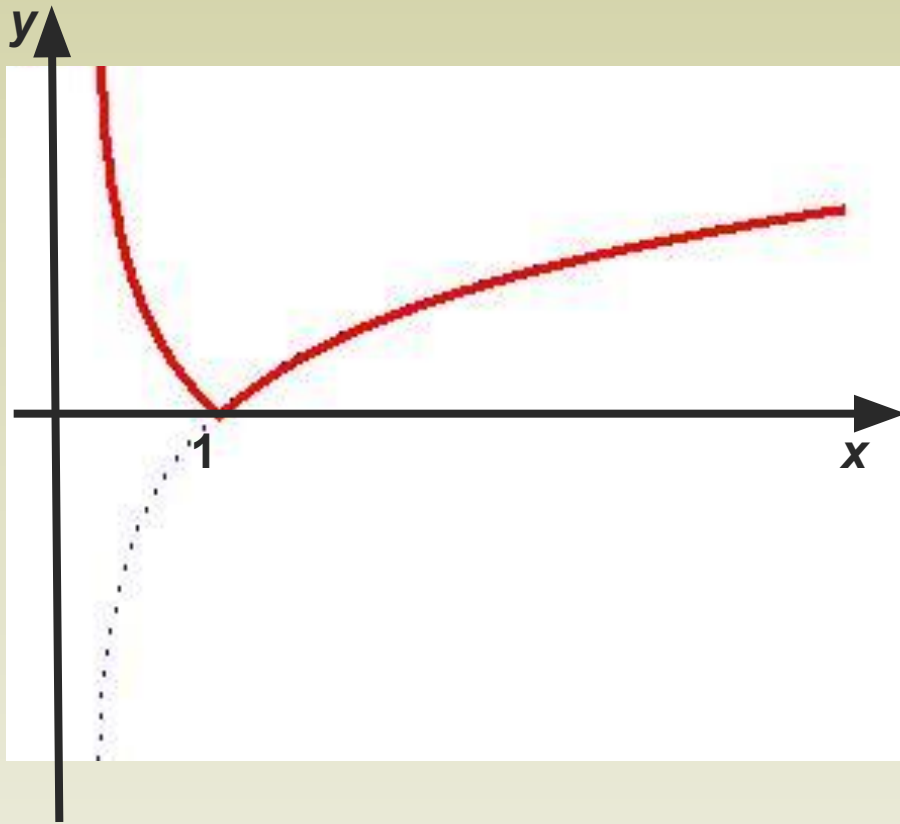


$x$	-0.5	-1	-2	-4
$y$	-1	0	1	2

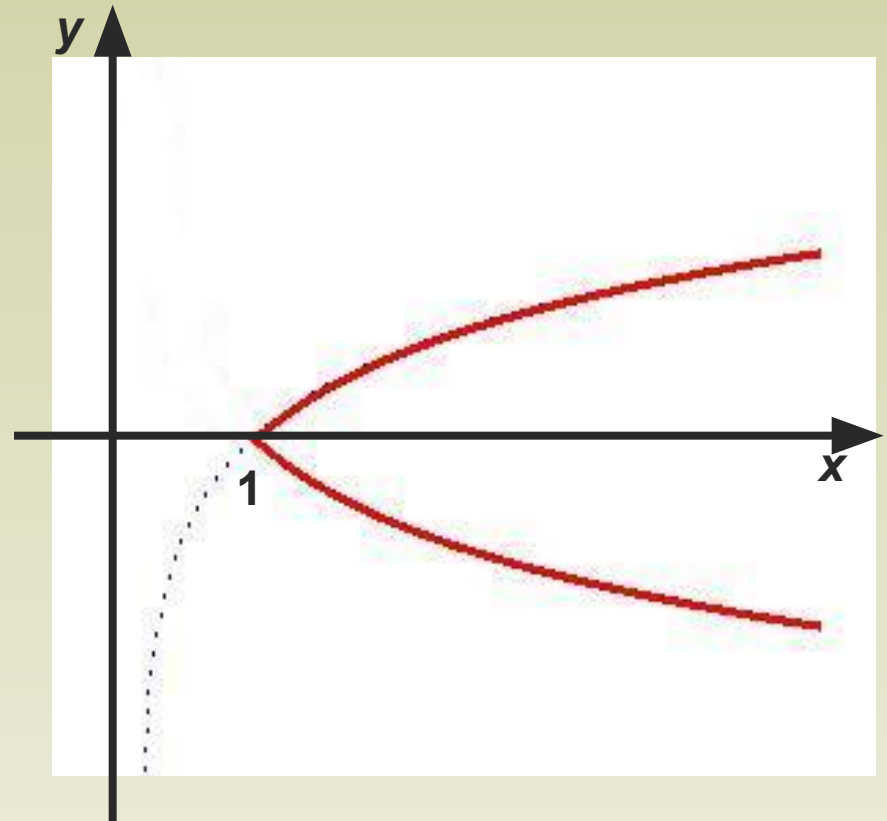
$$y = \log_2|x|$$

# Графики функций

$$y = |\log_2 x| \text{ и } |y| = \log_2 x$$



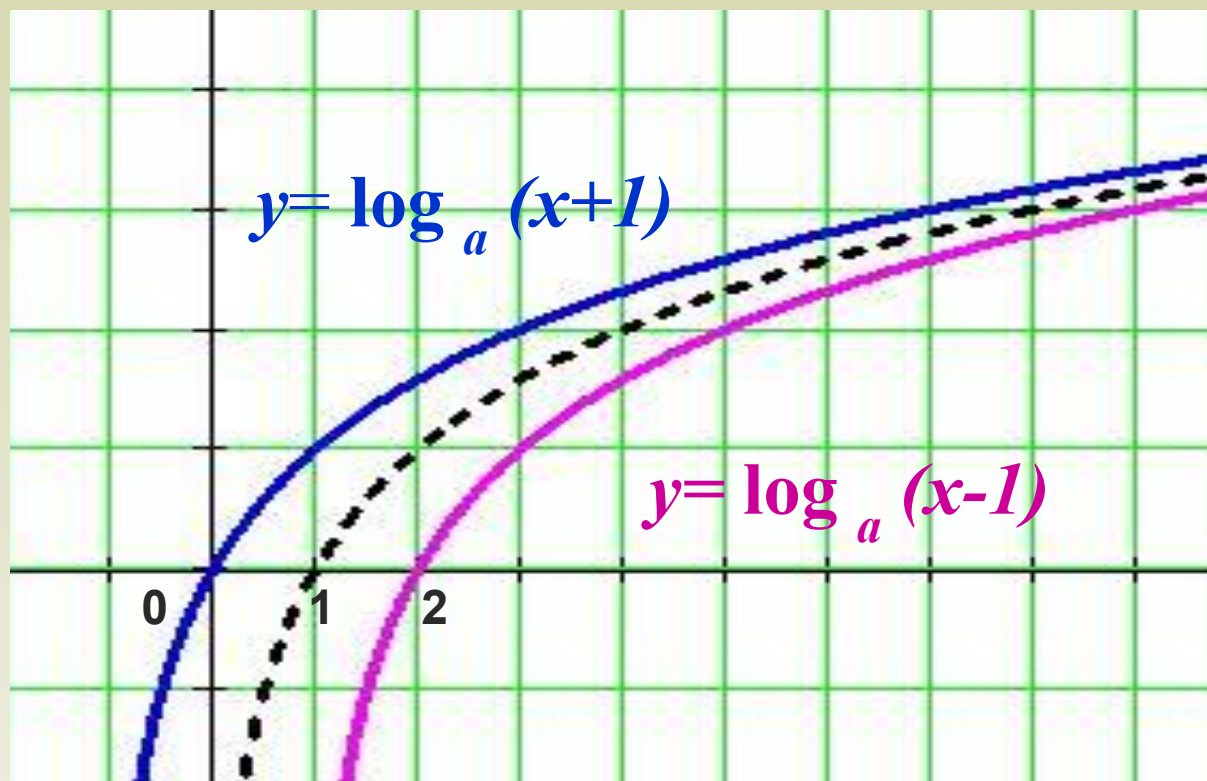
$$y = |\log_2 x|$$



$$|y| = \log_2 x$$

# График функции

$$y = \log_a(x - b)$$



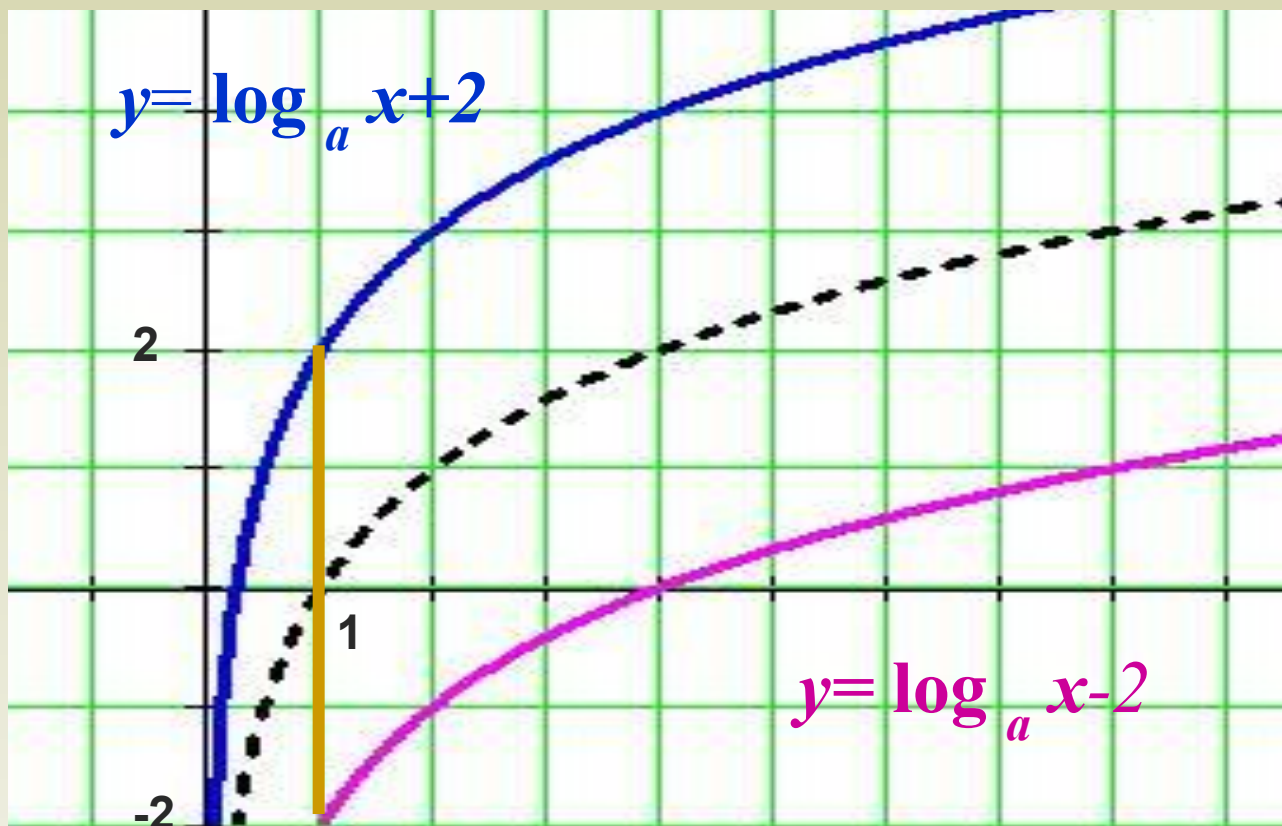
$$\underline{y = \log_a x}$$

$$\underline{y = \log_a(x - b), b > 0}$$

$$\underline{y = \log_a(x - b), b < 0}$$

# График функции

$$y = \log_a x \pm b$$

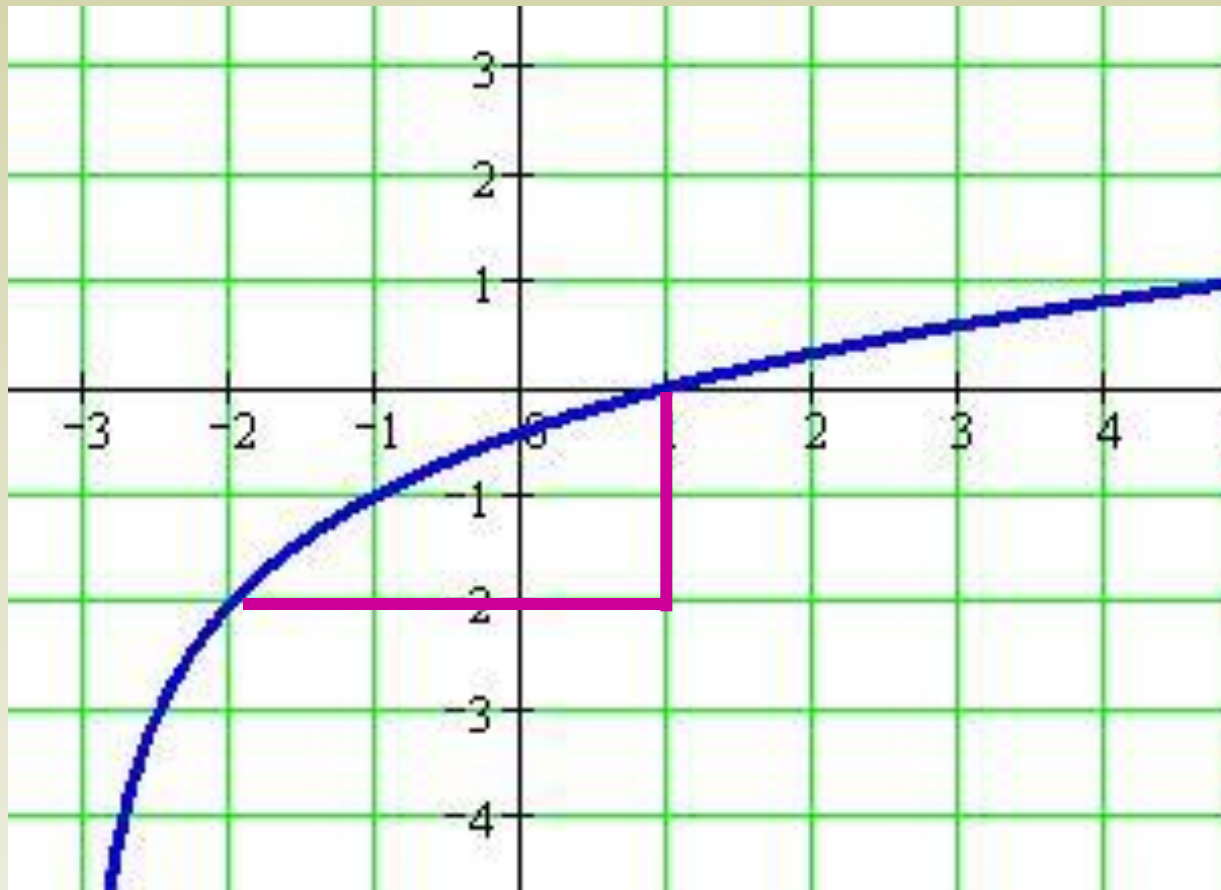


$$y = \log_a x$$

$$y = \log_a x + b$$

$$y = \log_a x - b$$

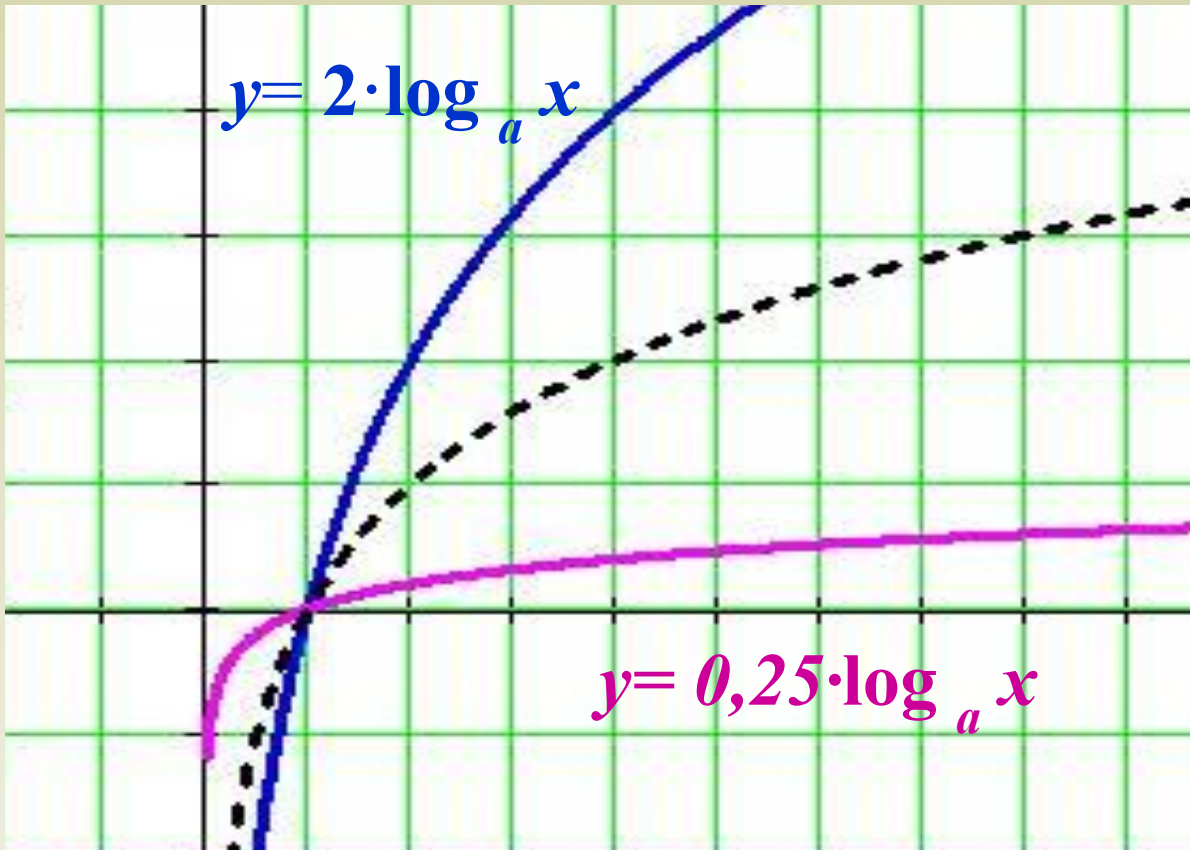
График функции  
 $y = \log_a (x - b) \pm c$



$$y = \log_2(x + 3) - 2$$

# График функции

$$y = k \cdot \log_a x$$



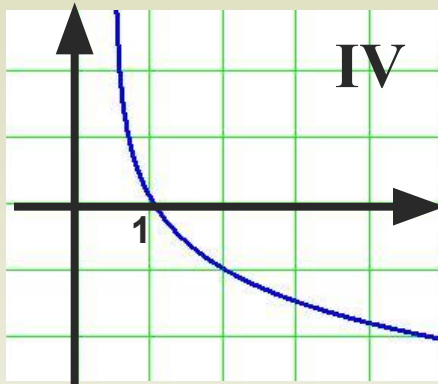
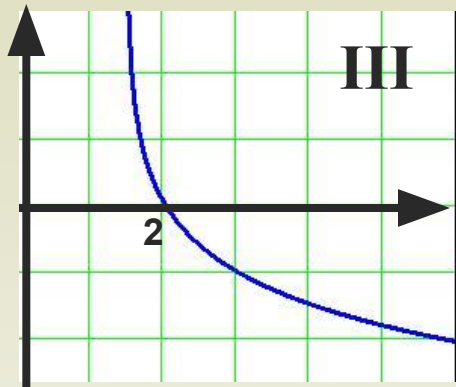
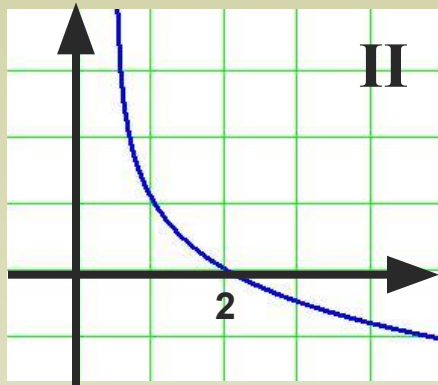
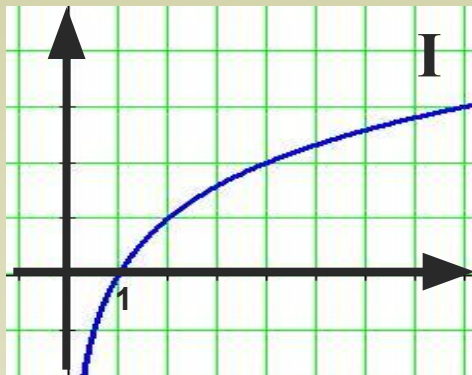
$$\underline{y = \log_a x}$$

$$\underline{y = k \cdot \log_a x, k > 1}$$

$$\underline{y = k \cdot \log_a x, 0 < a < 1}$$



Укажите график функции заданной формулой



*a)*  $y = \log_{0,5} x$

*б)*  $y = \log_2 x$

*в)*  $y = \log_{0,5} x + 1$

*г)*  $y = \log_{0,7} (x - 1)$

**Пример 1**

**Найти область определения функции**

$$\underline{f(x) = \log_8(4-5x)}$$

***Решение:***

Область определения логарифмической функции – множество  $\mathbb{R}_+$ .  
Поэтому заданная функция определена только для тех чисел  $x$ , при которых  $4-5x > 0$ , т.е.  $x < 0,8$ .

**Ответ:  $(-\infty ; 0,8)$**

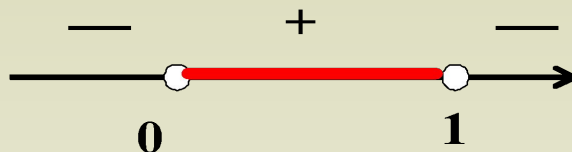
Пример 2

Найти область определения функции

$$\underline{f(x) = \log_{0,3} (x-x^2)}$$

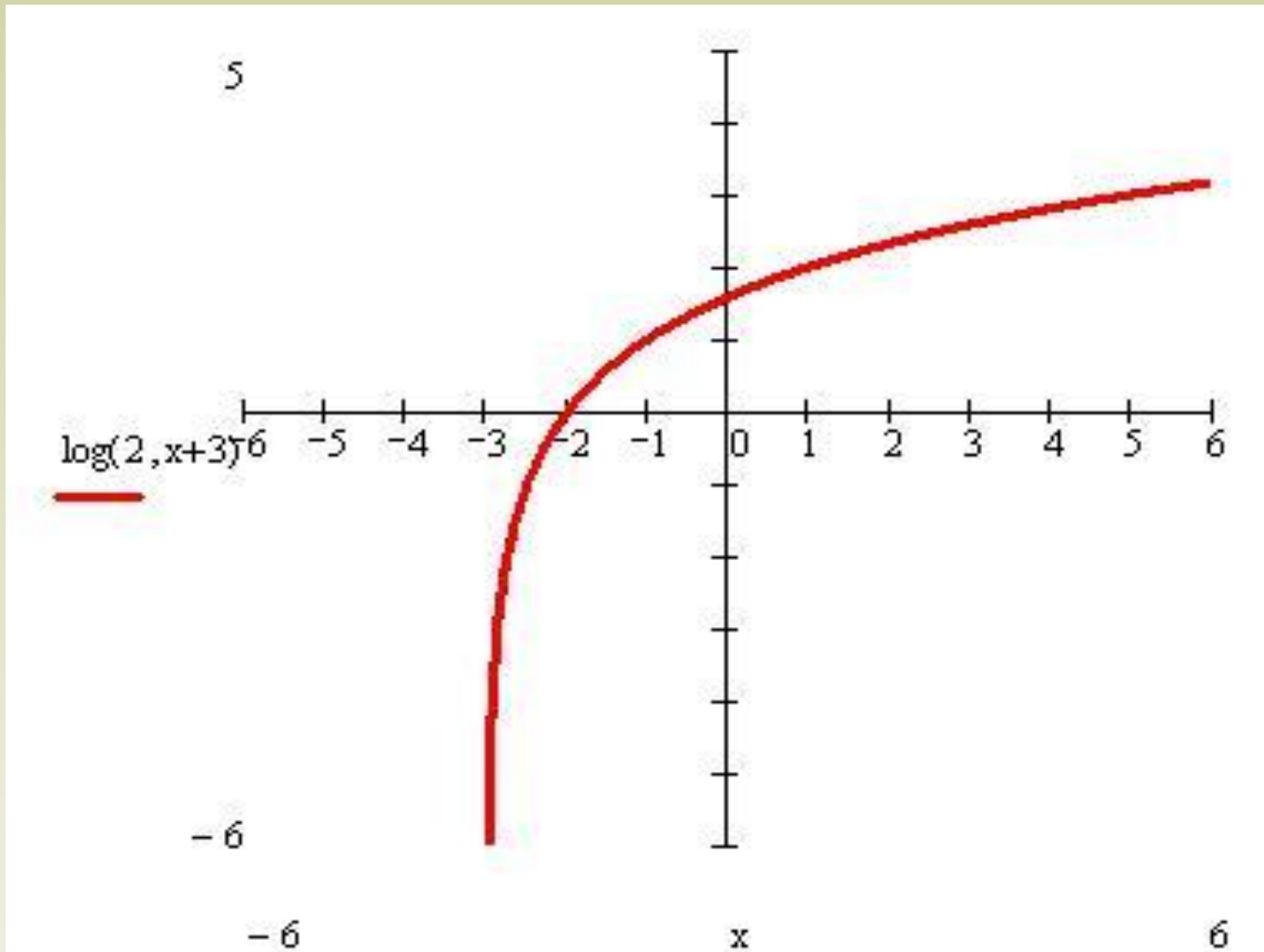
*Решение:*

Функция  $f$  определена для всех тех  $x$ , для которых  $x-x^2 > 0$ . Решая его методом интервалов,  $x(1-x) > 0$



Ответ: (0;1)

Постройте график функции  
 $y = \log_2(x+3)$

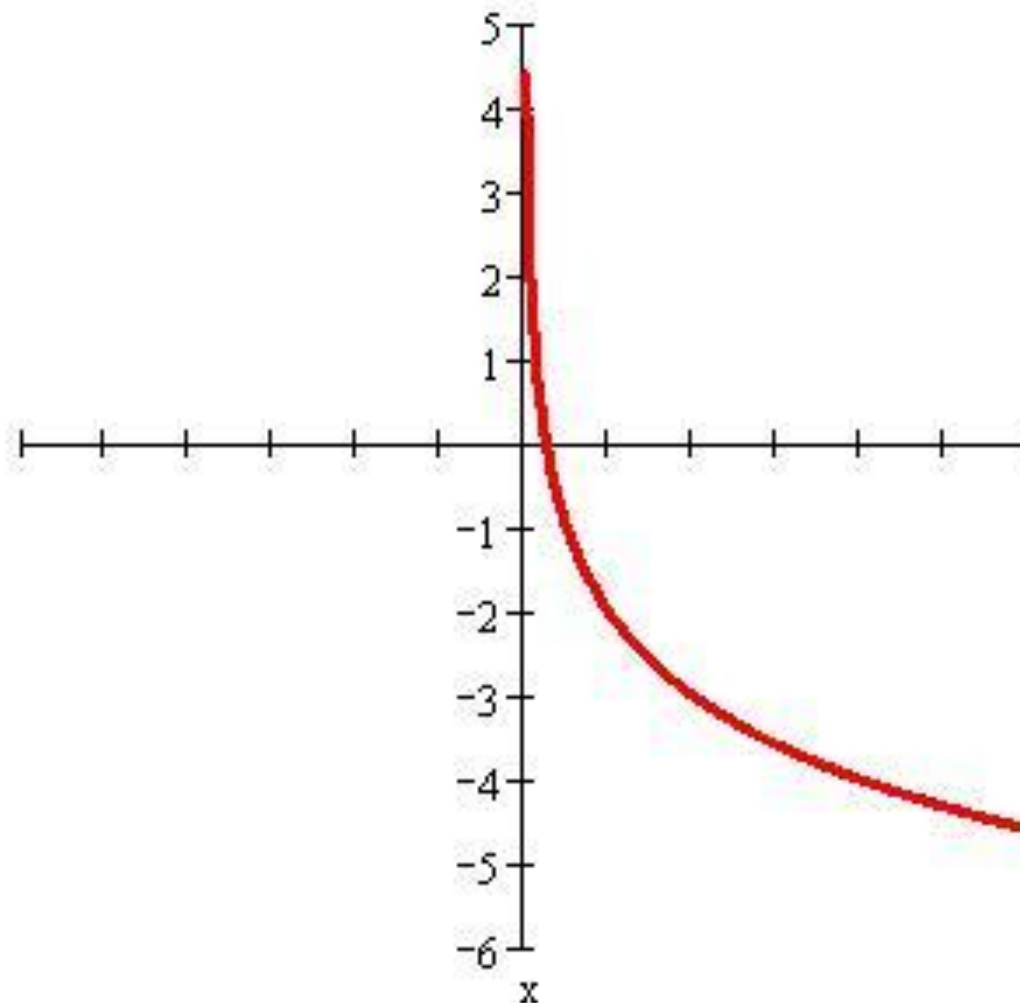


Постройте график функции

$$y = \log_{0.5} x - 2$$

$\log(0.5, x) - 2$

—



# Литература:

1. Учебники «Алгебра и начала математического анализа», Алимов, 2012 г., Мордкович, 2012 г.
2. Дидактические материалы для учителя.