Понятие о дифференциальном уравнении

РАЗБОР И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Гармонические колебания

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

Говорят, что физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с указанным уравнением совершает гармонические колебания. Само уравнение называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$f''(t) = -36 f(t)$$

Проверим, что функция: $f(t) = 2\cos(6t - \frac{\pi}{4})$

является решением этого дифференциального уравнения.

Находим первую производную:

$$f'(t)=\left(2\cos(6t-\frac{\pi}{4})\right)'=$$

$$=-2\sin(6t-\frac{\pi}{4})\cdot(6t-\frac{\pi}{4})'=$$

$$=-2\sin(6t-\frac{\pi}{4})\cdot 6$$

Находим вторую производную:

$$f''(t) = \left(-2\sin(6t - \frac{\pi}{4}) \cdot 6 \right)' =$$

$$= -2 \cdot 6\cos(6t - \frac{\pi}{4}) \cdot (6t - \frac{\pi}{4})' =$$

$$= -2 \cdot 6\cos(6t - \frac{\pi}{4}) \cdot 6$$

Заметим, что в правой части полученной формулы, появилась первоначальная функция с добавлением коэффициента:

$$= -2 \cdot \cos(6t - \frac{\pi}{4}) \cdot 6 \cdot 6$$

$$f(t) = 2\cos(6t - \frac{\pi}{4})$$

Получим уравнение:

$$f''(t) = -36 f(t)$$

2. Напишите дифференциальное уравнение гармонического колебания:

$$x = 3\sin(5t+1)$$

Находим первую производную:

$$x' = \left(3\sin(5t+1)\right)' =$$

$$= 3\cos(5t+1)\cdot(5t+1)' =$$

$$= 3\cos(5t+1)\cdot 5$$

Находим вторую производную:

$$x'' = \left(3\cos(5t+1)\cdot 5\right)'$$

$$= -3\sin(5t+1)\cdot 5\cdot(5t+1)' =$$

$$= -3\sin(5t+1)\cdot 5\cdot 5$$

Получили:

$$x = 3\sin(5t+1)$$

$$x'' = -\boxed{3\sin(5t+1)}\cdot 5\cdot 5$$

$$x'' = -x\cdot 25 = -25x$$

Получили дифференциальное уравнение гармонического колебания:

$$x'' = -25x$$

3. Укажите амплитуду, начальную фазу и угловую частоту гармонического колебания:

$$y(t) = 7\sin(\frac{1}{5}t + \frac{\pi}{3})$$

Амплитуда: $A = 7$

Начальная фаза: $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Угловая частота: $\omega = \frac{1}{5}$

Самостоятельная работа

№ 370, 371, 372, 373

1 вариант (а, в) 2 вариант (б, г)

Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Докажите, что функция:

$$y = 8e^{-2x}$$

Удовлетворяет уравнению: $y' = -2y$

Находим первую производную: $y' = \left(8e^{-2x}\right)'$

$$y' = 8e^{-2x} \cdot (-2)$$

Подставим полученные значения в исходное уравнение, получим:

$$y' = y \cdot (-2) \qquad y' = -2y$$

Тело, в начале опыта имело температуру 100 градусов. Через 20 минут его температура стала 60 градусов. Найти, через сколько минут температура тела станет равной 30 градусов, если температура воздуха была равна 20 градусов.

Составим дифференциальное уравнение: $$\frac{du}{dt} = k(u - u_0)$$

В нашей задаче $u_0 = 20$, получаем $$\frac{du}{dt} = k(u-20)$$

Решаем его: $$\frac{du}{(u-20)} = kdt$$ $$\ln(u-20) = kt + C$$

$$u-20=e^{C}e^{kt}$$

t=0, u=100

$$100-20=e^{C}e^{k\cdot 0}$$

$$e^{C}=80$$

t=20, u=60

$$60-20=80e^{k\cdot 20}$$

$$40=80e^{k\cdot 20}$$

$$e^{k\cdot 20}=\frac{1}{2}$$

$$e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$$

$$u=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$30=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\frac{t}{20}=3$$

t=60 минут , u=30

От 2 мг радия через t лет радиоактивного распада осталось 0,25 мг. Найдите время распада.

Закон радиоактивного распада:

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

$$m(t) = 0,25 \qquad m_0 = 2$$

Получим:

$$0,25 = 2e^{-kt} \qquad e^{-kt} = \frac{0,25}{2}$$

$$e^{-kt} = 0,125 \qquad -kt = e^{2^{-3}}$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{8} \qquad -kt = \ln 2^{-3} \qquad kt = 3\ln 2$$

$$kt = 3\ln 2$$

$$\textit{Для радия}\; k = \frac{\ln 2}{T} \qquad \textit{где}\; T = 1550\; \textit{лет}$$

Следовательно время $t = 3T$

$$t = 3 \cdot 1550 = 4650\; \textit{лет}$$

Пусть тело, имеющее в начальный момент времени температуру T_0 помещено в среду с температурой T_1. Тогда $T(t)=Ce^{-kt}+T_1$.

Тело имеет температуру 300° вынесено на воздух с температурой 0 °. Найти температуру тела через 10 минут.

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_1$$

$$T(0) = Ce^{-k\cdot 0} + T_1 \qquad T_1 = 0°$$

$$T(0) = 300$$

Найдем, через какое время, тело остынет до 0 градусов.

$$C = 300 - T_1$$

$$T(10) = 300e^{-10k}$$