Теория вероятностей

Задача 11.Проверено 100 деталей. Среди них оказалось 80 стандартных. Какова относительная частота появления стандартной детали?

Решение.
Пусть событие А – при проверке деталь оказалась стандартной.
По определению относительная частота появления этого события

$$W(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Ответ: 0,8.

Задача 12.Естествоиспытатель К.Пирсон подбрасывал монету
и записывал полученный результат.
Проделав эту операцию 24000 раз, обнаружил, что герб выпадал в 12012 случаях.
Какова относительная частота выпадения герба?

Решение.

Относительная частота выпадения герба

$$W(A) = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005 \approx \frac{1}{2}$$

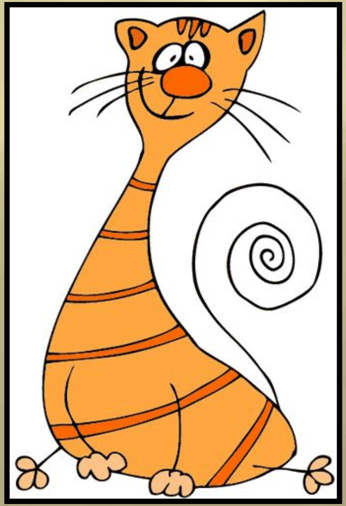
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 13.Отдел технического
контроля обнаружил
5 бракованных книг
в партии из случайно
отобранных 100 книг.
Найти относительную частоту
появления
бракованных книг.

Ответ: 0,05.

Задача 14.По цели произведено 20 выстрелов,
причем зарегистрировано 18 попаданий.
Найти относительную частоту попаданий в цель.

Ответ:0,9.



Задача 15.При испытании партии приборов
относительная частота
годных приборов 0,9.
Найти число годных приборов,
если всего было проверено
200 приборов.

Ответ: 180.

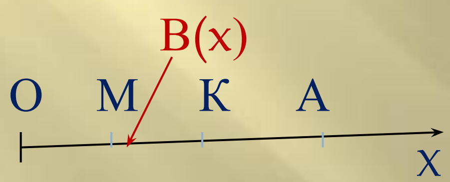
Задача 16.На отрезок ОА длины ℓ числовой оси Ох наудачу поставлена точка В(х). Найти вероятность того, что меньший из отрезков ОВ и ВА имеет длину, большую $\ell/3$.

Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение.

Разобьем отрезок ОА точками М и К на три равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка В(х) попадет на отрезок МК длины $\frac{\ell}{3}$.

Искомая вероятность $P = \frac{\ell}{3} : \ell = \frac{1}{3}$.



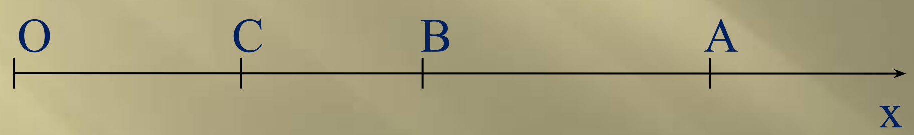
Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 17.Если абонент ждет
телефонного вызова с 2 до 3 часов,
то какова вероятность того, что этот
вызов пройдет
с 2ч 30мин до 2ч 40мин.?

Решение.

Пусть событие D – вызов произошел в течение 10мин после половины третьего.

Изобразим все исходы испытания в виде отрезка OA на прямой Ox:



Событие D произойдет, если точка (вызов) окажется на отрезке CB.

Следовательно, $P(D) = \frac{CB}{OA} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 18.На листок бумаги в клетку со стороной 10мм падает кружок диаметра 2мм.

Какова вероятность того, что кружок целиком попадет внутрь клетки?

Решение.

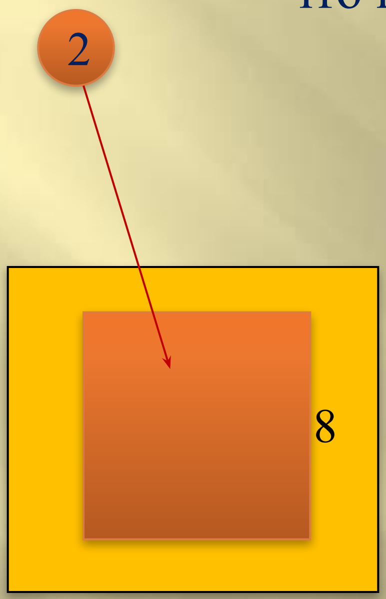
На рисунке заштрихована область, попадание центра кружка в которую дает возможность утверждать, что кружок не заденет ни одной из сторон квадрата.

Эта область представляет собой квадрат со стороной 8мм.

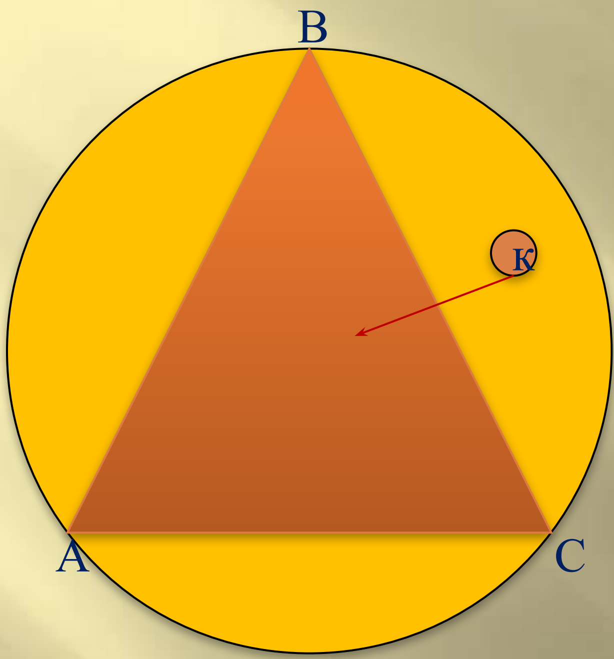
Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{8 \cdot 8}{10 \cdot 10} = 0{,}64.$$

Ответ: 0,64.



10



Задача 19.В круг, радиус которого равен R, вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что на удачу взятая точка круга окажется внутри треугольника?

Пусть событие D состоит в том, что наудачу выбранная точка окажется внутри треугольника. Так как точка выбирается на удачу, можно допустить, что все исходы испытания распределены равномерно.

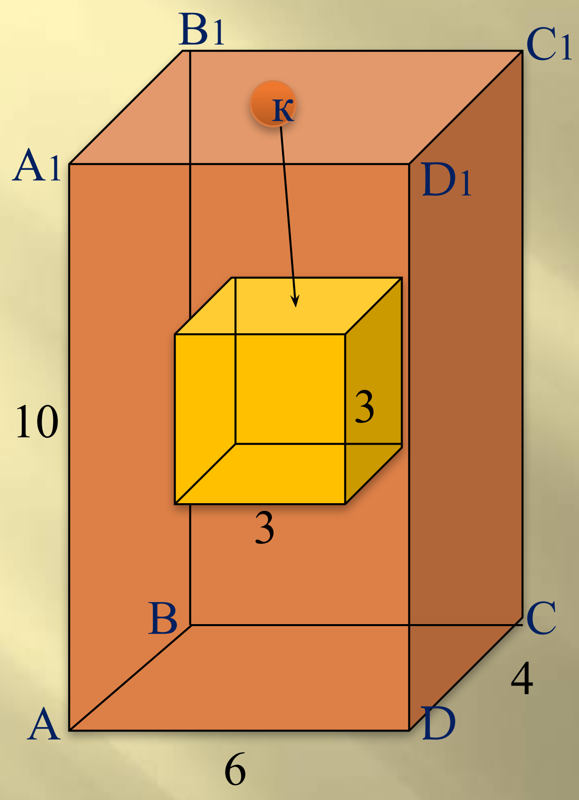
Следовательно, $P(D) = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{круга}}$.

Но площадь круга $S_{круга} = \pi R^2$,
а площадь треугольника

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Отсюда $P(D) = \frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4} \cdot \pi R^2 \approx 0{,}414\ldots$

Ответ: 0,414.



Задача 20.Внутри прямоугольного параллелепипеда,
измерения которого равны 4,6,10 см,
наудачу выбирается точка М.
Какова вероятность того,
что она окажется внутри данного куба,
ребро которого 3см?

Решение.

Пусть событие N – точка оказалась внутри куба с ребром, равным 3см.

Будем считать, что исходы испытания распределены равномерно.

Тогда вероятность наступления события N пропорциональна мере этого куба и равна

$$P(N) = \frac{V_{куба}}{V_{пар.}}$$

Но объем куба $V_{куба} = 27см^3$,

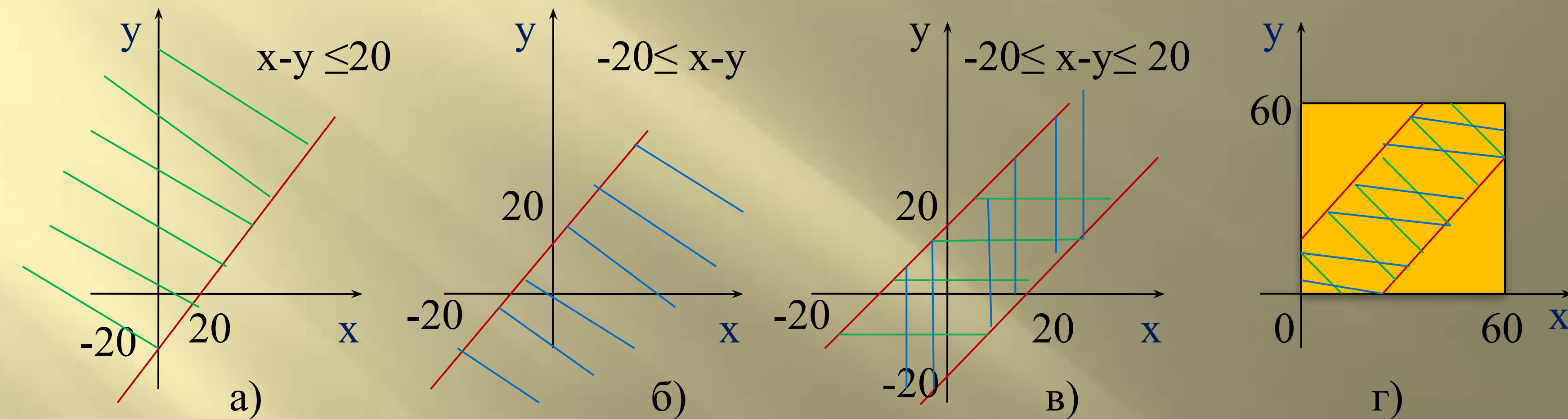
а объем параллелепипеда $V_{пар.} = 240см^3$.

Следовательно, $P(N) = \frac{27}{240} = 0{,}1125$.

Ответ: 0,1125.

Задача 21.Два друга Х и У условились встретиться в определенном месте между
12 и 13 часами,
при этом пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит.
Чему равна вероятность встречи друзей Х и У,
если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти
наудачу и моменты прихода независимы?

Пусть момент прихода друзей Х и У соответственно х и у.
Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно выполнения неравенства $|x-y| \le 20$, или $-20 \le x-y \le 20$.
В прямоугольной системе координат множество точек (х;у), координаты которых удовлетворяют неравенству, образуют полосу (рис.в):



Все возможные исходы изображаются точками квадрата со стороной 60 (минут), а исходы, благоприятствующие встрече, изображаются в заштрихованной области квадрата (рис.г).

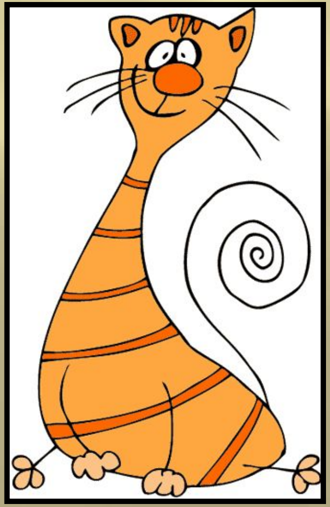
Искомая вероятность $P = \dfrac{S_{фигуры}}{S_{квадрата}} = \dfrac{2000}{3600} = \dfrac{5}{9} = 0{,}555\ldots \approx 0{,}56$.

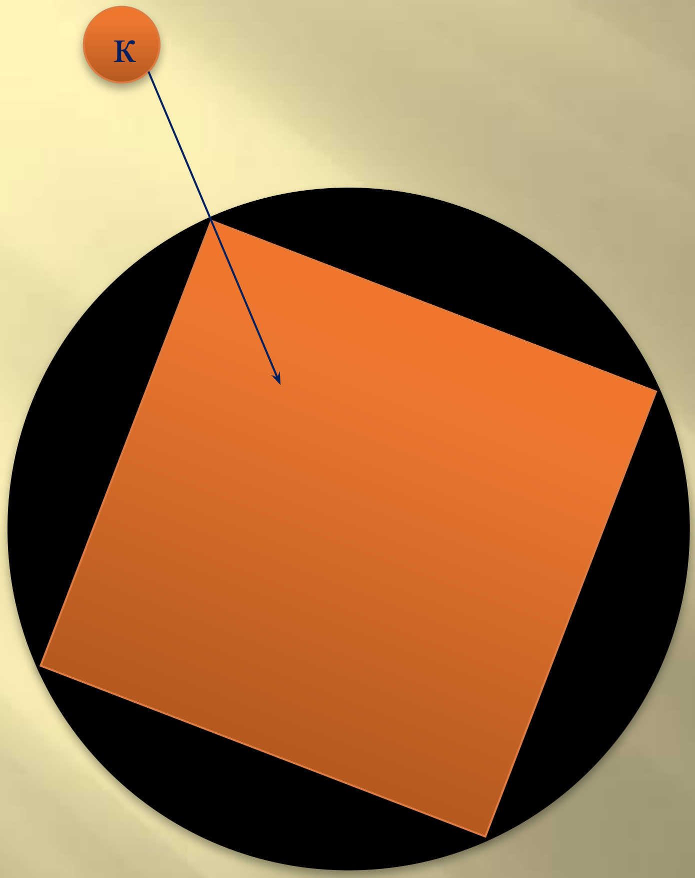
Ответ: 0,56.

Задача 22.Минное заграждение поставлено в одну линию с интервалами между минами в 100м.

Какова вероятность того, что корабль шириной 20м, пересекая это заграждение под прямым углом, подорвется на мине? (Размерами мин можно пренебречь).

Ответ: 0,2.

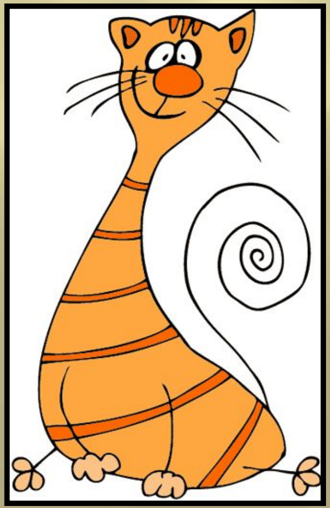




Задача 23.Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка.

Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Ответ: $\dfrac{2}{\pi}$.



Задача 24.В урне 5 белых шаров,
3 черных, 2 в полоску и 7 в клетку.
Найти вероятность того, что из урны
будет извлечен одноцветный шар.

Решение.

1 способ

Пусть А – событие, состоящее в извлечении белого шара;
В – черного шара; А+В – одноцветного шара.
Т.к. событию А+В благоприятствует 8 исходов,
а число всех шаров в урне 17, то

$$P(A+B) = \frac{8}{17}$$

2 способ

$$P(A) = \frac{5}{17}, \quad P(B) = \frac{3}{17}, \text{ значит, } P(A)+P(B) = \frac{8}{17}$$

Ответ: $\frac{8}{17}$.

Задача 25.Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 руб., на 10 – по 15 руб., на 15 – по 10 руб., на 25 – по 2 руб. и на остальные – ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 руб.

Решение.

Пусть А,В,С – события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20,15 и 10 руб.

Т.к. события А,В и С несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0{,}3$$

Ответ: 0,3.

Задача 26.В коробке 250 лампочек, из них 100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт, 50 - по 15 Вт.

Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки не превысит 60 Вт.

Решение.

Пусть A – событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, B – 25 Вт, C – 15 Вт, D – 100 Вт.

События A,B,C,D образуют полную систему, т.к.все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки). Вероятность наступления одного из них есть достоверное событие, т.е. $P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1$.

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и «мощность лампочки более 60 Вт» – противоположные.

По свойству противоположных событий

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1- P(D),$$

$$P(A+B+C) = 1- \frac{100}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задача 27.В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые.
Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Решение.

Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные,

В – все 4 галстука будут белые.

4 галстука из 30 красных можно выбрать

C_{30}^{4} способами, а из 12 - можно выбрать C_{12}^{4} способами.

Поэтому вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P(A) = \frac{C_{12}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{11}{609}$$, аналогично белые $$P(B) = \frac{C_{18}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{68}{609}.$$

Т.к все 4 галстука должны быть одного цвета, то искомая вероятность

$$P = P(A)+P(B) = \frac{11}{609} + \frac{68}{609} = \frac{79}{609} = 0{,}13 .$$

Ответ: 0,13.

Задача 28.Вероятность того, что студент сдаст экзамен на отлично,
равна 0,2; на хорошо – 0,4;
на удовлетворительно – 0,3;
на неудовлетворительно – 0,1.
Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен.

1 способ.

$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = 0{,}2+0{,}4+0{,}3 = 0{,}9$

2 способ.

Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1, тогда

$P(A+B+C) = 1 – P(D) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Ответ: 0,9.

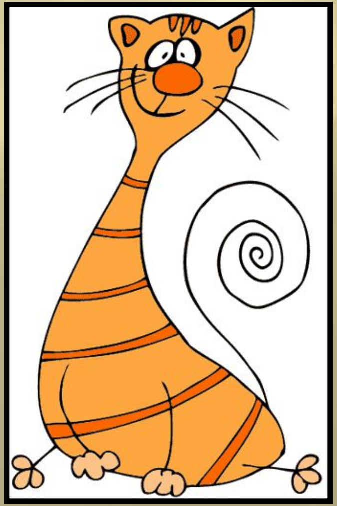
Задача 29.У продавца имеется
10 оранжевых,8 синих, 5 зеленых
и 15 желтых шаров.
Вычислите вероятность того,
что купленный шар
окажется оранжевым, синим
или зеленым.

Ответ: $\frac{23}{38}$.

Задача 30.В денежно-вещевой лотерее
на каждые 10000 билетов
разыгрывается 150 вещевых
и 100 денежных выигрышей.
Определить вероятность выигрыша
денежного или вещевого
на один лотерейный билет.

Ответ: 1 .

40



Задача 31.В ящике 10 лампочек по15 Вт,
10 – по 25 Вт, 15 – по 60 Вт и 25 – по 100 Вт.
Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт,
если известно,
что число ватт на взятой лампочке – четное.

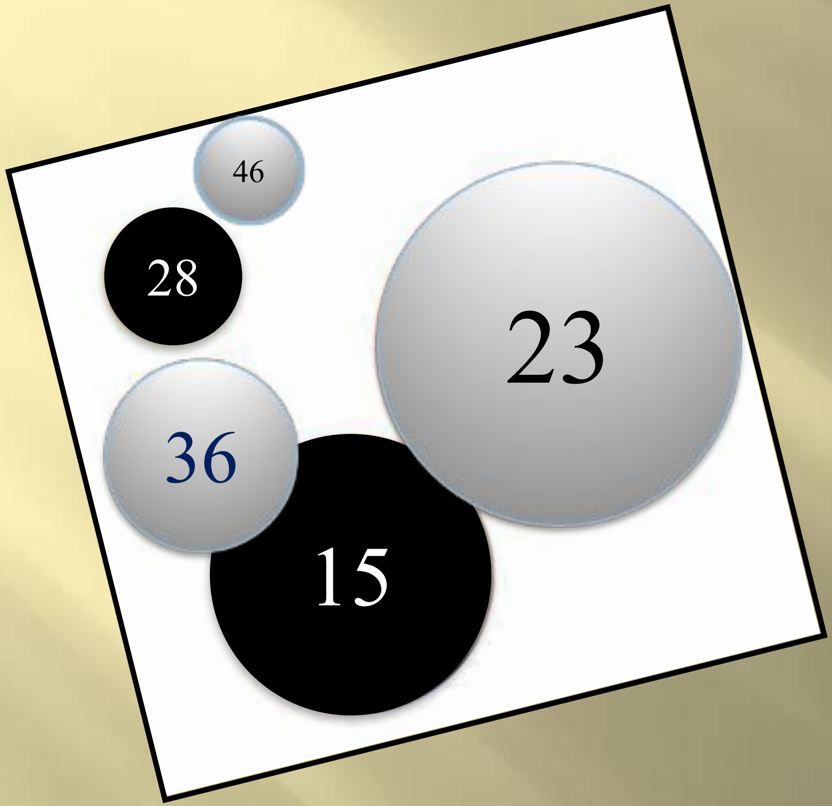
Решение.

Пусть событие А состоит в том, что лампочка имеет мощность более 60 Вт, а событие В – что число ватт является четным. Но «более 60 Вт» – это в данном случае 100 Вт и, значит, $P(AB) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$,

а «четное число ватт» – это 60 и 100 Вт, т.е. $P(B) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

Искомая вероятность $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5}{12} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{8}$.



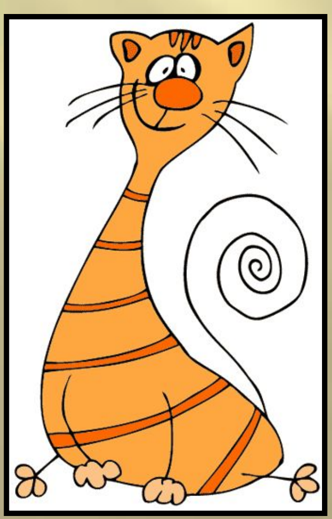
Задача 32.В первой урне находятся
6 черных и 4 белых шара,
во второй – 5 черных и 7 белых.
Из каждой урны извлекают
по одному шару.
Какова вероятность того,
что оба шара окажутся
белыми?

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар;
A_2 – из второй урны извлечен белый шар.
События A_1 и A_2 независимы.

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(A_2) = \frac{7}{12}$$

$$P(A_1 \cdot A_2) = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 12} = \frac{7}{30}.$$

Ответ: $\frac{7}{30}$.



Задача 33.Прибор состоит из двух элементов,
работающих независимо.
Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;
Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.
Найти вероятность того, что:
а) оба элемента выйдут из строя;
б) оба элемента будут работать.

Пусть событие А – выход из строя первого элемента, событие Е – выход из строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) одновременно появление А и Е есть событие АЕ

$P(AE) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

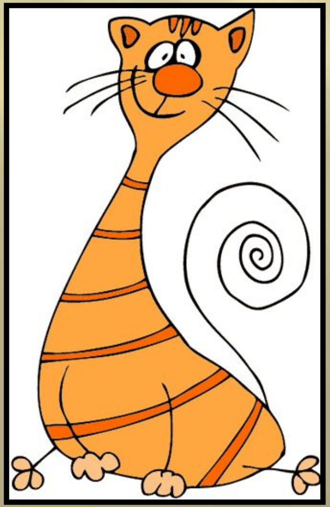
б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию А – выходу этого элемента из строя);

Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию Е

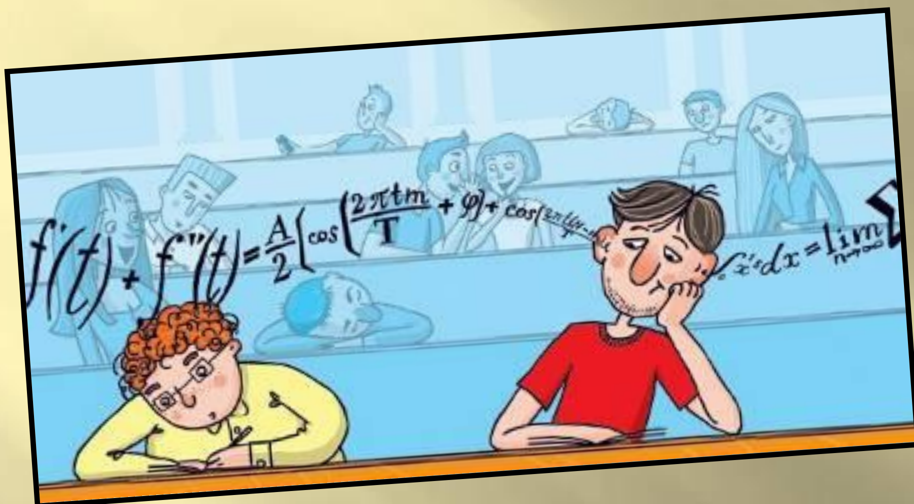
$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ и $P(\bar{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$.

$P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$



Ответ: 0,56.



Задача 34.В экзаменационные билеты включено
по 2 теоретических вопроса
и по 1 задаче.
Всего составлено 28 билетов.
Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил
50 теоретических вопросов
и 22 задачи.

Полный ответ на билет состоит из произведения двух событий: Студент одновременно ответит на два вопроса (событие А) и решит задачу (событие В).

Число всех возможных комбинаций из 56 вопросов по 2

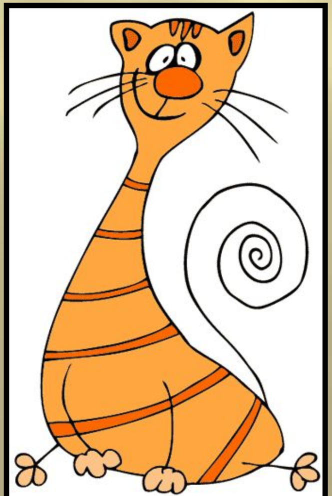
$$C_{56}^{2} = \frac{56!}{54!\cdot 2!} = \frac{54!55\cdot 56}{54!\cdot 2} = 1540$$

Т.к. студент подготовил только 50 вопросов, то число исходов, благоприятствующих событию А, есть

$$C_{50}^{2} = \frac{50!}{48!\cdot 2!} = \frac{48!\cdot 49\cdot 50}{48!\cdot 2} = 1225, \qquad P(A) = \frac{C_{50}^{2}}{C_{56}^{2}} = \frac{1225}{1540} = \frac{245}{308}$$

Вероятность события В определяется тем, что студент знает 22 задачи из 28 возможных: $P(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$.

Т.к. события А и В независимы и должны выполняться одновременно, то $P(AB) = P(A)\cdot P(B) = \frac{245\cdot 11}{308\cdot 14} = 0{,}625$.



Ответ: 0,625.

Задача 35. В Санкт-Петербург – 16 мест на практику,
в Киев – 10, в Баку – 5.
Какова вероятность того,
что определенные три студента
попадут в один город?

Событие Е – определенные три студента попадут в один город.

Это событие может реализоваться:

или в виде события C_1 – указанные 3 студента попадут в С.- Петербург;

или в виде события C_2 – попадут в Киев;

или в виде события C_3 – попадут в Баку.

Каждое из этих событий можно рассматривать как совмещение трех событий.

Например, событие C_1 – в С.-Петербург попадут и первый из указанных студентов (событие A_1), и второй студент (событие A_2), и третий из указанных студентов (событие A_3).

Вероятности этих событий

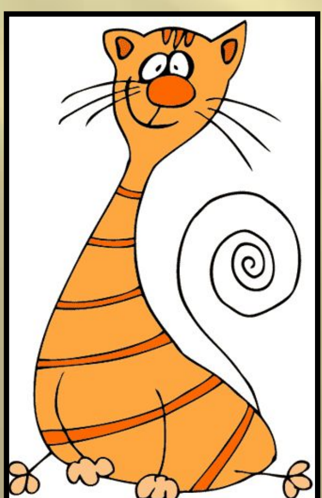
$$P(A_1) = \frac{15}{30},\ P(A_2) = P_{A_1}(E) = \frac{14}{29},\ P(A_1) = P_{A_2}(E) = \frac{13}{28}$$

Аналогично можно рассматривать и события C_2 и C_3.

По правилам сложения и умножения вероятностей

$$P(E) = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{30\cdot 29\cdot 28} + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{30\cdot 29\cdot 28} + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{30\cdot 29\cdot 28} = \frac{88}{609}$$

Ответ: $\frac{88}{609}$.



Задача 36.Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игрального кубика «четверка» выпадет: а) ровно 3 раза; б) ровно 2 раза; в) ровно 6 раз; г) не выпадет ни разу?

Решение.

Число n независимых повторений (бросаний) равно 10.

Число k «успехов» равно 3.

Вероятность p «успеха», т.е.вероятность выпадения «четверки» при одном бросании кубика, равна $\frac{1}{6}$, а вероятность «неудачи» равна $\frac{5}{6}$.

а) $P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{7} = 120\cdot 0{,}00129 \approx 0{,}155$

б) $P_{10}(2) = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8}$

в) $P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$

г) $P_{10}(0) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

Ответ: а) 0,155.

Задача 37.Найти вероятность того,
что при 9 бросаниях монеты «орел» выпадет
ровно 4 раза.

Решение.

«Успех» означает выпадение «орла» и его вероятность $p = 0,5$.

«Неудача» означает выпадение «решки» и ее вероятность $q = 0,5$.

Бросания предполагаем независимыми друг от друга.

Это частный случай общей схемы Бернулли, в котором

$n=9$, $k = 4$, $p = 0,5$, $q = 0,5$.

По формуле Бернулли

$$P_9(4) = C_9^4 (0,5)^4 (0,5)^{9-4} = \frac{9!}{4!5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \cdot \frac{1}{512} = \frac{7\cdot2\cdot9}{512} = \frac{63}{256} \approx 0,246$$

Ответ: 0,246.

Задача 38.За один выстрел стрелок поражает мишень с вероятностью 0,1.
Найти вероятность того,
что при 5 выстрелах он хотя бы раз попадет в мишень.

Решение.

Считаем, что все 5 выстрелов производятся независимо друг от друга.

«Успех» означает попадание в мишень при одном выстреле.

Его вероятность $p = 0{,}1$.

«Неудача» означает выстрел мимо мишени.

Ее вероятность равна $q = 1-0{,}1 = 0{,}9$.

Число k «успехов» отлично от нуля: $k \in \{1,2,3,4,5\}$,

$n = 5$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$.

А – событие, заключающееся в том, что при 5 выстрелах будет хотя бы 1 попадание.

Тогда $\bar{A}$ – событие, при котором число «успехов» равно нулю, т.е.стрелок все 5 раз «промазал».

$$P(A) = 1- P(\bar{A}) = 1- P_5(0) = 1- C_5^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 = 1- 0{,}9^5 \approx 1-0{,}5905 \approx 0{,}4095$$

Ответ: 0,4095.

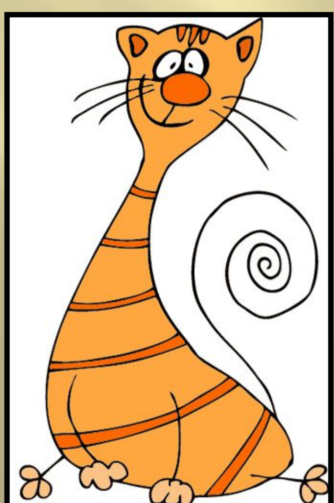
Задача 39.В следующих испытаниях найдите
вероятности «успеха» и «неудачи»:
а) Бросают пару различных монет. «Неудача» – выпадение двух орлов.
б) Бросают игральный кубик. «Успех» – выпадение числа, кратного трем.
в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» – выпадение двух четных чисел.
г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» – среди них нет дамы пик.

а) 0,75 , 0,25

б) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

в) 0,75 , 0,25

г) $\frac{31}{36}$, $\frac{5}{36}$



Задача 40.Напишите формулы, по которым следует находить вероятность того, что при 4 бросаниях игрального кубика «тройка» выпадет:

а) ровно 2 раза

б) ровно 3 раза

в) ровно 4 раза

г) не выпадет ни разу

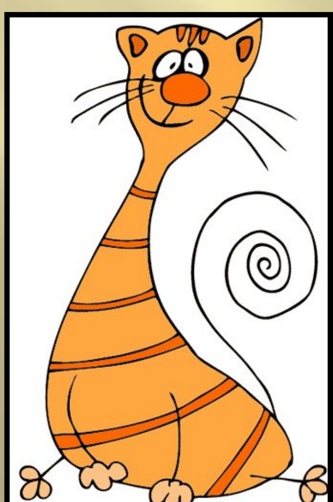
д) вычислите вероятности этих событий

а) $C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$; 0,1157

б) $C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$; 0,0154

в) $C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$; 0,00077

г) $C_4^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$; 0,4822



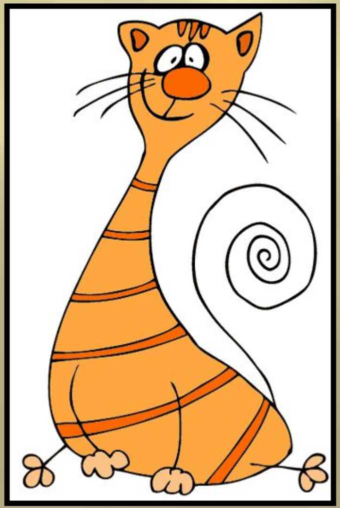
Задача 41.Из набора домино случайно вытаскивают одну «доминошку», записывают сумму очков на ней,
и возвращают ее обратно.
Так делают 3 раза.
Найдите вероятность того, что:
а) дубль появляется ровно 1 раз;
б) дубль появляется ровно 2 раза;
в) дубль появляется хотя бы раз;
г) сумма очков на «доминошке» каждый раз больше 9.

а) 0,4219

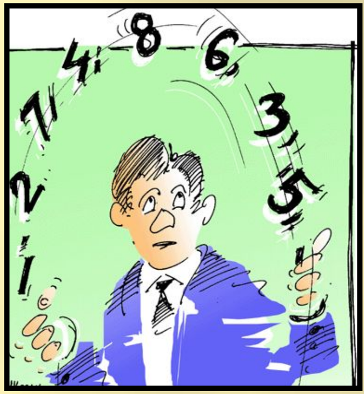
б) 0,1406

в) 0,5781

г) 0,0029



Статистика



Задача1. 30 абитуриентов на 4 вступительных экзаменах набрали
в сумме такие количества баллов:20,19,12,13,16,17,15,14,16, 20,15,19,20,20,15,13,19,14,18,17,12,14,12,17,18,17,20, 17,16,17.
Составьте общий ряд данных, выборку результатов, стоящих
на четных местах и соответствующий ряд данных.

Решение.

После получения «2» дальнейшие экзамены не сдаются, поэтому сумма баллов не может быть меньше 12 (12 – это 4 «тройки»).

Значит *общий ряд данных* состоит из чисел 12,13,14,15,16,17,18,19,20.

Выборка состоит из 15 результатов 19,13,17,14,20,19,20,…,расположенных на четных местах.

Ряд данных – это конечная возрастающая последовательность 13,14,17,19,20.

	13	14	17	19	20	Всего - 5 вариант
Кратность варианты	2	3	6	2	2	Сумма - 15 (объем выборки)
Частота варианты	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	Сумма – всегда 1
Частота варианты в %	$13\frac{1}{3}$ %	20 %	40%	$13\frac{1}{3}$%	$13\frac{1}{3}$%	Сумма - 100%

Задача 2.После группировки данных эксперимента
получилась таблица их распределения:

Варианта	-3	0	4	5	9	11	12	15	20
Кратность варианты	12	9	1	64	34	56	7	8	9

а) определите объем выборки;
б) найдите наиболее часто встретившуюся варианту;
в) допишите к таблице третью и четвертую строки из частот и процентных частот вариант;
г) найдите сумму чисел в третьей и четвертой строках.

Ответ:

а) 200

б) 5

г) 1 и 100

Задача 3.В нашем классе были собраны данные
о месяцах рождения учеников:

Варианта	1	2	3	4	5	8	9	10	11
Кратность варианты	2	2	4	3	1	4	2	2	1

а) каков объем выборки;
б) допишите к таблице третью и четвертую строки из частот и процентных частот вариант;
в) укажите наиболее и наименее часто встретившуюся варианту.

Задача 4.Выборка состоит из всех букв, входящих в двустишие:

«…Это дерево – сосна,
И судьба сосны ясна…».

а) выпишите ряд данных выборки;

б) найдите объем выборки;

в) определите кратность и частоту варианты «о»;

г) какова наибольшая процентная частота вариант выборки?

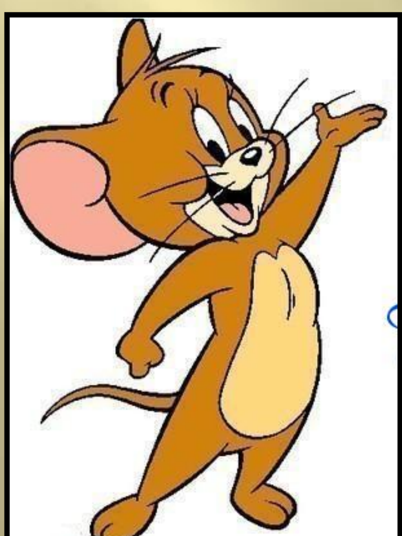
Ответ:

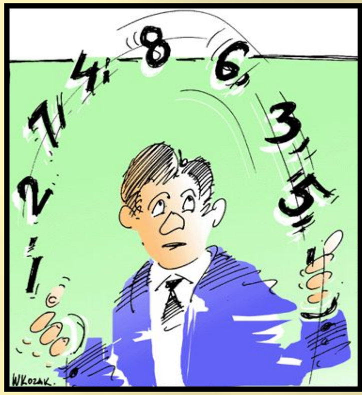
а) а, б, в, д, е, и, н,
о, р, с, т, у, ы, ь, э, я

б) 30

в) 4; $\frac{2}{15}$

г) 20% (буква «с»)





Задача 5. Постройте график распределения частот и многоугольник частот по результатам письменного экзамена по математике:
6,7,7,8,9,2,10,6,5,6,7,3,7,9,9,2,3,2,6,6,
6,7,8,8,2,6,7,9,7,5,9,8,2,6,6,3,7,7,6,6.

Решение.

Дана выборка объема 40. Ее ряд данных – 2,3,5,6,7,8,9,10.

Оценка в 2 балла встретилась 5 раз, т.е. кратность варианты 2 равна 5.

Сделав то же для других оценок, найдем их кратности: 5,3,2,11,9,4,5,1

(можно проверить: 5+3+2+11+9+4+5+1 = 40).

Частота появления двух баллов равна $\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

Вычислив остальные частоты, составим таблицу и строим графики.

Варианта	2	3	5	6	7	8	9	10	Всего 8
Кратность варианты	5	3	2	11	9	4	5	1	Сумма 40
Частота варианты	0,125	0,075	0,05	0,275	0,225	0,1	0,125	0,025	Сумма 1
Частота варианты в %	12,5	7,5	5	27,5	22,5	10	12,5	2,5	Сумма 100%

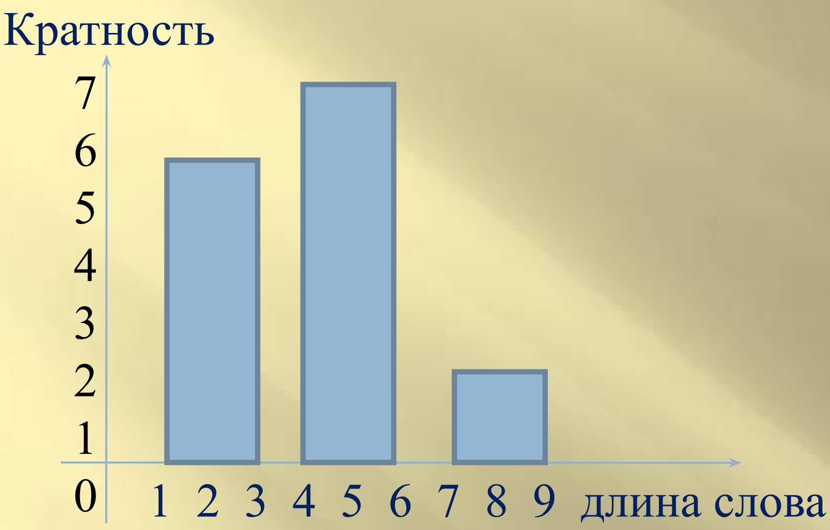
Многоугольник распределения кратностей

Многоугольник распределения частот

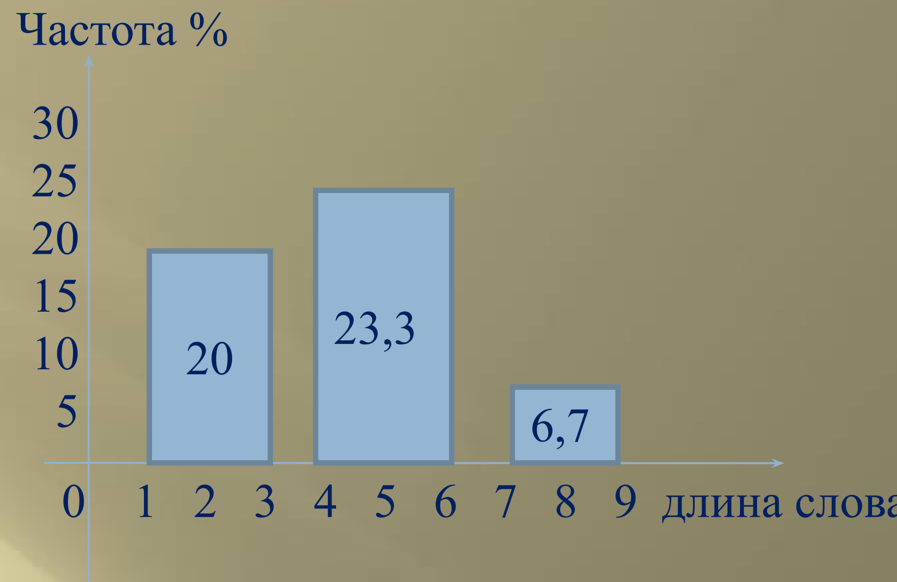
Задача 6.Измерили длины слов
(количество букв)
в приведенном отрывке поэмы
А.С.Пушкина «Медный всадник».
Построить гистограммы
распределения кратностей и частот,
выбрав интервалы 1-3, 4-6,7-9
для вариант выборки.

«…Ужасен он в окрестной мгле!	6,2,1,9,4
Какая дума на челе!	5,4,2,4
Какая сила в нем сокрыта,	5,4,1,3,7
А всем коне какой огонь!	1,1,3,4,5,5
Куда ты скачешь, гордый конь,	4,2,7,6,4
И где опустишь ты копыта?...»	1,3,8,2,6

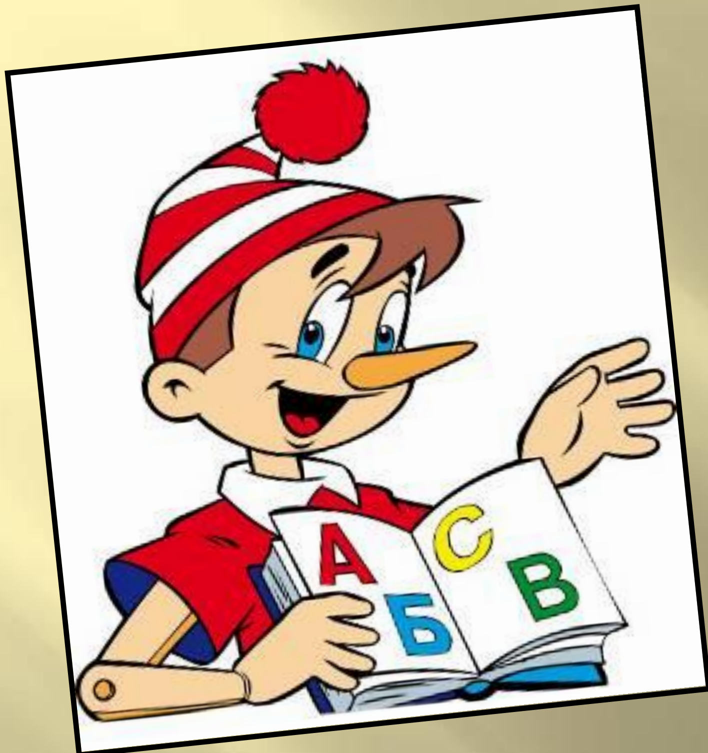
Гистограмма распределения кратностей



Гистограмма распределения частот



Длины слов	1,2 или 3	4,5 или 6	7,8 или 9	Всего 3 варианты
Кратности	5+4+3=12	7+4+3=14	2+1+1=4	Сумма 30
Частоты в %	40	46,66	13,33	Сумма 100%



Задача 7.Алфавит разбит по порядку на три одинаковых участка:

№1 от *а* до *й,*

№2 от *к* до *у,*

№3 от *ф* до *я.*

а) найти кратность и процентную частоту участка №3;

б) составьте таблицу распределения частот участков;

в) укажите участок наибольшей частоты;

г) постройте гистограмму частот с выбранным распределением на участки.

Ответ:

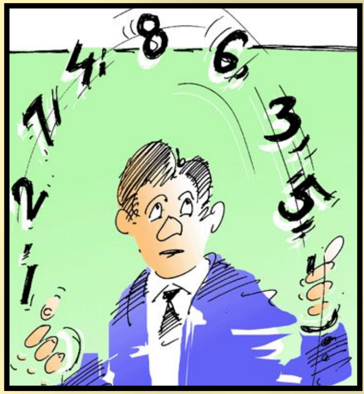
а) 9,15% ;

б)

Участок	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Частота в %	3,3	10	3,3	23,3	15	5	26,6	13,3

г) №7

Задача 8.В вашем классе соберите данные
о днях рождения учеников.
а) разбейте общий ряд данных на три участка:
№1 – 1-10, №2 – 11-20,
№3 – 21-31, и составьте таблицу распределения частот;
б) постройте соответствующую гистограмму;
в) рассмотрите шесть участков:
№1 – 1-5, №2 – 6-10,…,№6 – 26-31,
и составьте таблицу распределения частот;
г) постройте соответствующую гистограмму.



Задача 9. 10 девятиклассников
получили за тест по комбинаторике
баллы 9,14,12,9,15,12,9,15,12,12
из 20 возможных.
Найти среднее значение выборки
результатов теста, размах и моду.

Решение.

По правилу нахождения среднего арифметического:

$$\frac{9+14+12+9+15+12+9+15+12+12}{10} = \frac{119}{10} = 11{,}9$$

По общему правилу нахождения *среднего значения выборки:*

$$\frac{9\cdot 3+12\cdot 4+14\cdot 1+15\cdot 2}{10} =$$

$$= 9\cdot 0{,}3+12\cdot 0{,}4+14\cdot 0{,}1+ 15\cdot 0{,}2 =11{,}9$$

Всего имеется 10 результатов, самый маленький – 9, самый большой – 15. *Размах* 15-9 = 6.

Мода (часто встречающееся значение в выборке) – 12 (эта варианта встречается 4 раза).

Ответ: 11,9; 6; 12.

Задача 10.У 25 ребят спросили, сколько в среднем часов в день они смотрят телевизор. Вот что получилось:

ТВ в день(ч)	0	1	2	3	4
Число ребят	1	9	10	4	1

Определите : а) размах; б) моду;
в) среднее арифметическое выборки;
г) постройте многоугольник частот, и укажите на нем данные из пунктов а)-в).

Ответ:

а) 9

б) 2

в) 1,8

Задача 11.Деталь по плану должна весить 431г.
Контроль при взвешивании 2000 деталей дал такие результаты:

Вес(г)	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Детали	40	80	220	360	610	430	200	40	20

а) составьте таблицу распределения частот в процентах;
б) постройте многоугольник частот (для удобства из всех вариант вычтите по 431);
в) каков процент деталей, вес которых отличается от планового не более, чем на 2г.

Ответ:

а)

Вес (г)	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Частота %	2	4	11	18	30,5	21,5	10	2	1

г) 91%

Задача 12.

В таблице приведены данные опроса, который проводился среди девятиклассников, о количестве детей в их семьях.

Кол-во детей	1	2	3	4	5 и более
Кол-во семей	31	12	5	0	2

Какова доля многодетных семей (то есть имеющих 3 и более детей) среди опрошенных?

Решение. Чтобы найти долю многодетных семей, поделим количество многодетных семей на их общее количество:

$$\frac{5+0+2}{31+12+5+0+2} = \frac{7}{50} = 0{,}14$$

Ответ: 0,14.

Задача 13.
Перед вами итоговая таблица группового этапа лиги чемпионов 2009/2010 годов в группе С.

	И	**В**	**Н**	**П**	**Гз**	**Гп**	**О**
Реал	6	4	1	1	15	7	13
Милан	6	2	3	1	8	7	9
Марсель	6	2	1	3	10	10	7
Цюрих	6	1	1	4	5	14	4

(И – количество игр, В – выигрышей, Н – ничьих,
П – поражений, Гз – забитых голов, Гп – пропущенных голов,
О – набранных очков).

Сколько голов забивалось в среднем за одну игру в этом турнире?

Решение. Чтобы найти среднее количество голов за игру, нужно поделить общее количество голов на количество игр. Каждая команда сыграла по 6 игр, всего команд – 4, в каждой игре участвовало 2 команды, поэтому количество игр равно

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

Чтобы найти количество голов, нужно сложить числа в столбце «Гз» или «Гп» (но не то и другое вместе!): 15 + 8 + 10 + 5 =38. Среднее количество голов за игру равно

$$\frac{38}{12} = 3\frac{1}{6}$$

Ответ: $3\frac{1}{6}$

Задача 14.

В таблице указано количество книг, прочитанных каждым из учеников за летние каникулы:

Аня	Витя	Игорь	Оля	Петя	Катя	Лена	Саша
8	10	6	1	0	8	5	3

Найдите среднее арифметическое, медиану и моду этого набора чисел.

Решение. Среднее арифметическое

$$\frac{8 + 10 + 6 + 1 + 0 + 8 + 5 + 3}{8} = 5\frac{1}{8} = 5{,}125$$

Чтобы найти медиану, числа нужно упорядочить: 0, 1, 3, 5, 6, 8, 8, 10. Количество чисел четно, поэтому нужно взять среднее арифметическое двух чисел, стоящих в центре: медиана $\frac{5 + 6}{5} = 5{,}5$

Мода – это число, которое повторяется чаще остальных, то есть 8.

Ответ: 5,125; 5,5; 8.

Задача 15.
Ученик засекал в течение недели время, которое он тратит на дорогу в школу и из школы.

День	**Пн**	**Вт**	**Ср**	**Чт**	**Пт**	**Сб**
В школу (мин)	19	20	21	17	22	24
Из школы (мин)	28	22	20	25	24	22

На сколько минут в среднем дорога из школы дольше дороги в школу?

Решение 1. Найдем среднюю продолжительность дороги в школу, затем - среднюю продолжительность дороги из школы и найдем их разность

$$\frac{19 + 20 + 21 + 17 + 22 + 24}{6} = \frac{123}{6} = 20{,}5$$

$$\frac{28 + 22 + 20 + 25 + 24 + 22}{6} = \frac{141}{6} = 23{,}5$$

$$23{,}5 - 20{,}5 = 3.$$

Ответ: 3.

Решение 2. Найдем ежедневную разность между дорогой из школы и в школу, а затем вычислим среднее арифметическое этих разностей.

День	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
В школу (мин)	19	20	21	17	22	24
Из школы (мин)	28	22	20	25	24	22
Разность	9	2	-1	8	2	-2

$$\frac{9 + 2 - 1 + 8 + 2 - 2}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Ответ: 3.

Задача 16.

В течение четверти Таня получила следующие отметки по физике:
одну «2»;
шесть «3»;
три «4»;
и пять»5»

Найдите среднее арифметическое и моду её оценок.

Решение. Каждую из оценок нужно взять в том количестве, сколько раз она повторялась! Среднее арифметическое

$$\frac{2 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{1 + 6 + 3 + 5} = \frac{57}{15} = \frac{19}{5} = 3{,}8;$$

чаще всего повторяется оценка «3», поэтому мода равна 3.

Ответ: 3,8; 3.

Задача 17.
Президент компании получает зарплату 100 000 р. в месяц, четверо его заместителей получают по 20 000 р., а 20 служащих компании – по 10 000 р. Найдите среднее арифметическое и медиану зарплат в компании.

Решение. Как и в предыдущей задаче, каждую зарплату нужно взять с её кратностью. Среднее арифметическое

$$\frac{100000 + 20000 \cdot 4 + 10000 \cdot 20}{1 + 4 + 20} = \frac{380000}{25} = 15200.$$

Чтобы найти медиану, представим, что все 25 зарплат выписаны по возрастанию. Тогда в середине, очевидно, окажутся зарплаты по 10 000 рублей, поэтому медиана равна 10 000.

Ответ: 15 200; 10 000.

Задача 18.

Какое из следующих утверждений неверно:

1) если набор состоит из одинаковых чисел, то его размах равен 0;

2) если набор состоит из одинаковых чисел, то его среднее арифметическое и медианы равны;

3) если размах набора равен 0, то он состоит из одинаковых чисел;

4) если среднее арифметическое и медиана набора равны, то он состоит из одинаковых чисел.

Решение. Любой симметричный ряд обладает таким свойством, например: 1, 2, 3, 4, 5. Среднее арифметическое и медиана равны 3.

Ответ: неверно утверждение 4.

Задача 19.

Средний возраст участников школьного хора составляет 14 лет. Каких участников в хоре больше: старше 14 лет или младше 14 лет?

Ответ: невозможно ответить по этим данным. Возможны все три ситуации, например, 12, 14, 15, 15 больше тех, кто старше 14; 13, 13, 14, 16 – больше тех, кто младше 14; 13, 14, 15 – поровну.

Многоугольник распределения кратностей

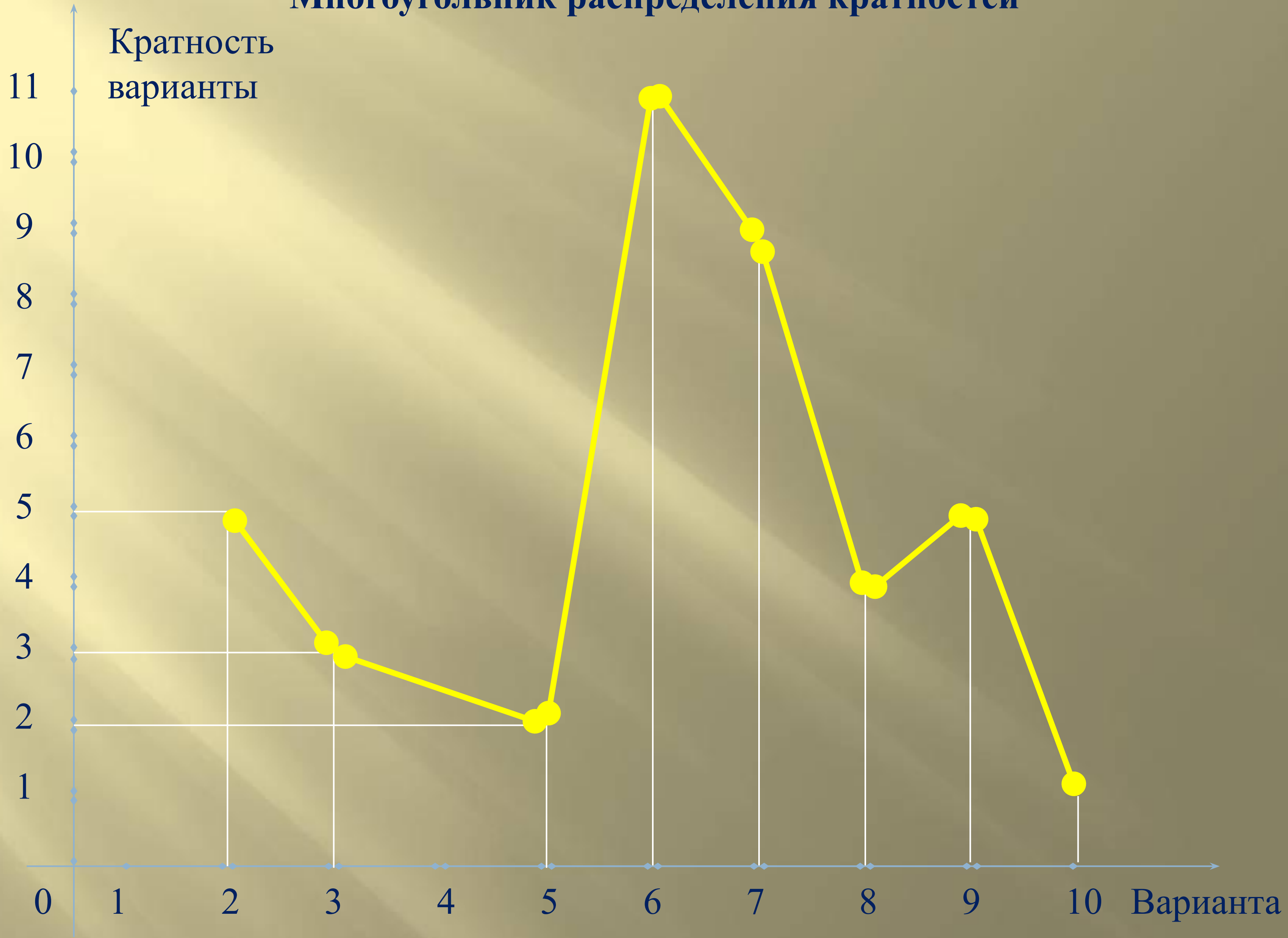


Рис. 1

Многоугольник распределения частот

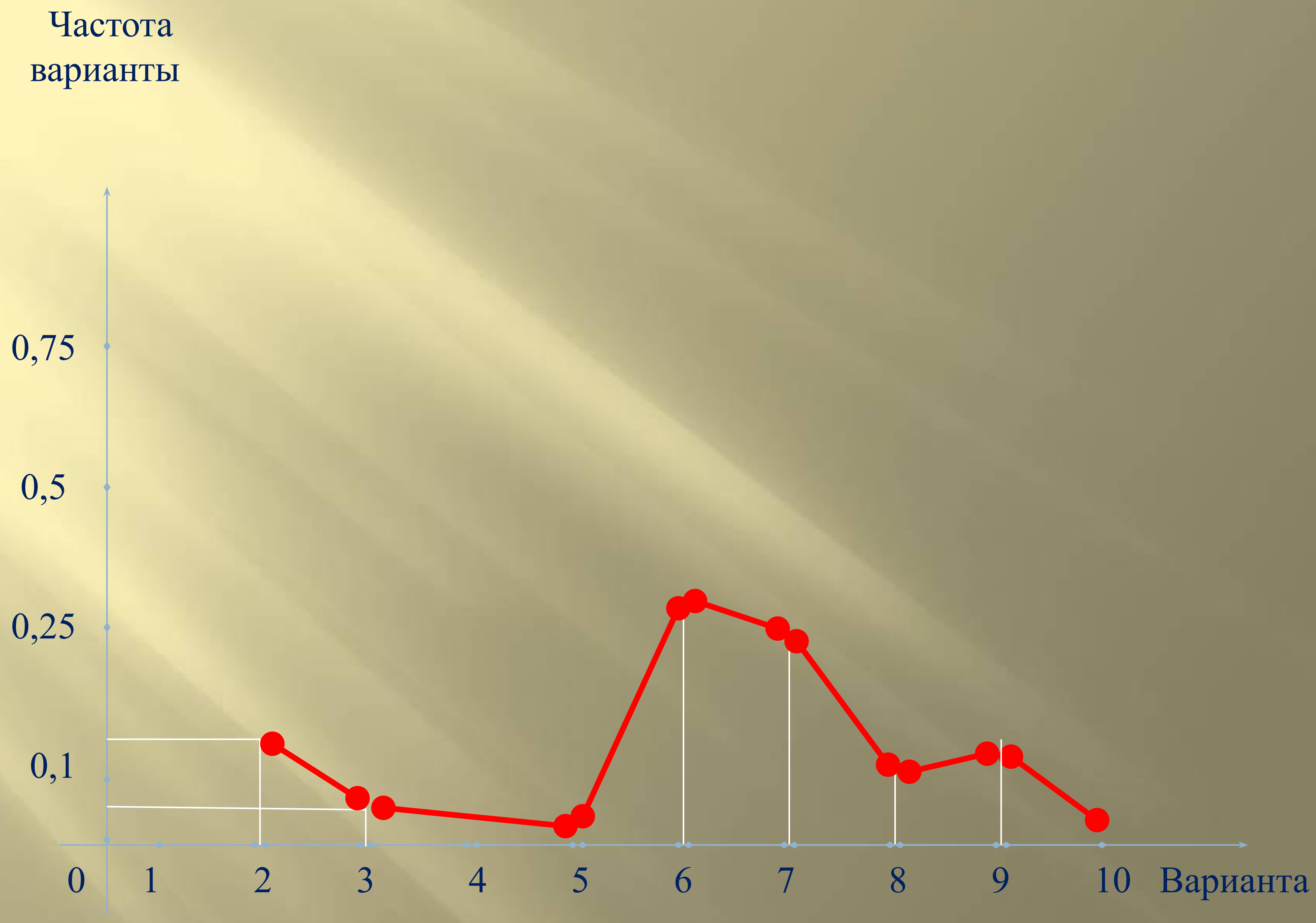
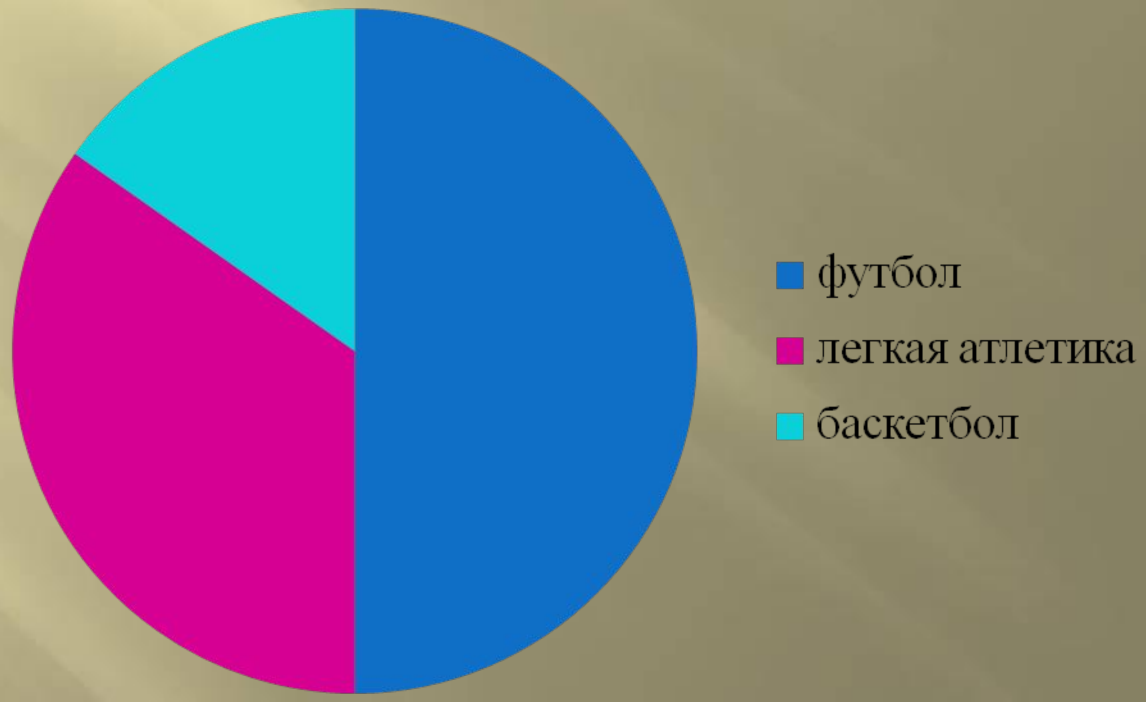


Рис. 2

Задача 20.

В классе 40 учеников. Во время урока физкультуры они разбиты на три группы: школьники из первой группы играют в баскетбол, из второй – в футбол, а третья группа занимается легкой атлетикой. Информация о числе школьников в этих группах содержится в следующей круговой диаграмме.



С помощью транспортира определите число школьников в каждой группе.

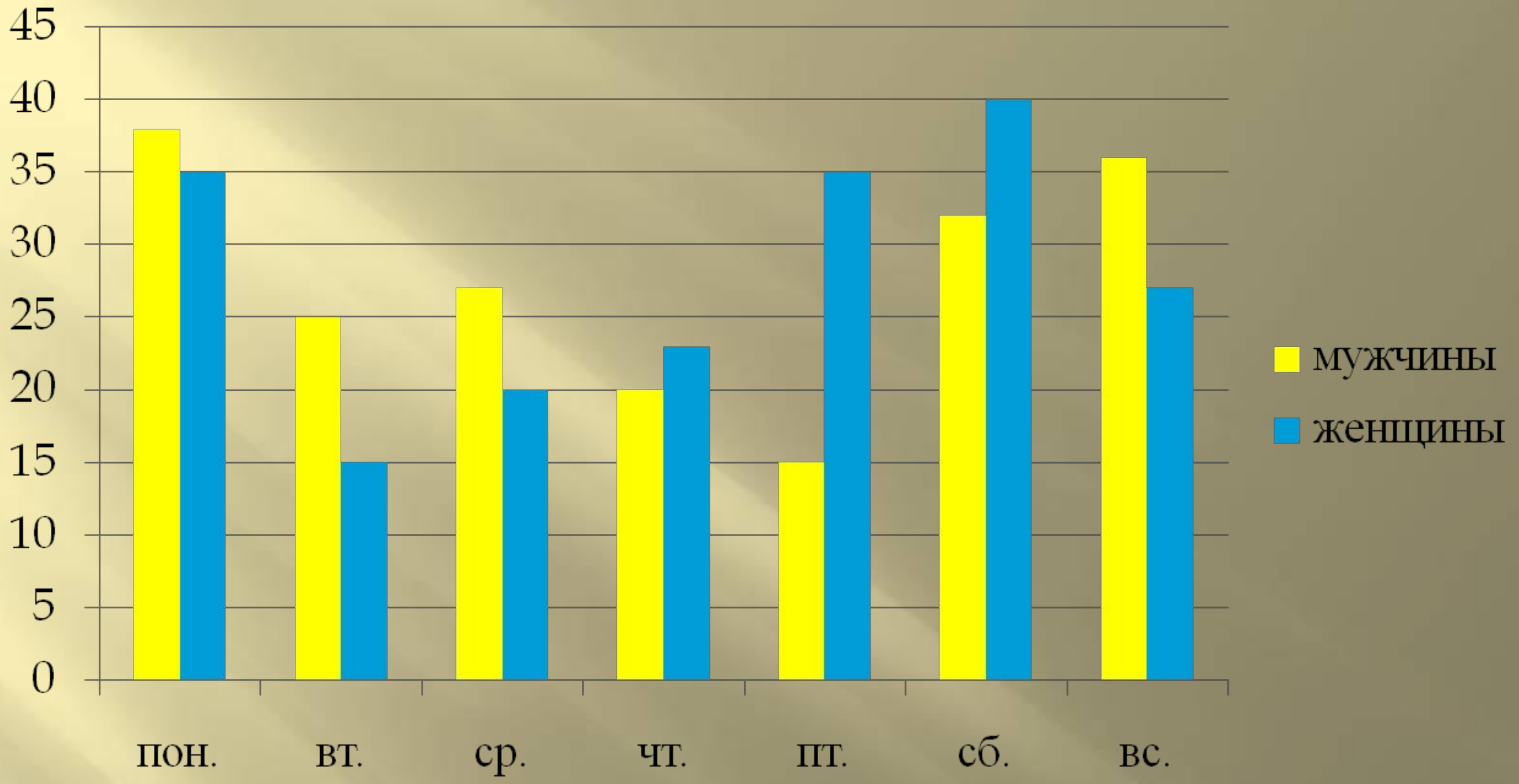
Решение. Угол сектора диаграммы, соответствующего второй группе (футбол), очевидно, равен 180°. Он составляет $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$ развернутого угла. Поэтому в футбол играет половина всех школьников, то есть 20 человек.

Угол сектора диаграммы, соответствующего первой группе (баскетбол), равен 36°. Он составляет $\frac{36°}{360°} = \frac{1}{10}$ развернутого угла. Поэтому в баскетбол играет десятая часть всех школьников, то есть 4 человека. Оставшиеся школьники, 40 – 20 – 4 = 16 человек, занимаются легкой атлетикой. Это же число можно получить из нашей диаграммы. Угол сектора диаграммы, соответствующего третей группе (легкая атлетика), равен 144° Он составляет $\frac{144°}{360°} = \frac{2}{5}$ развернутого угла.

Поэтому занимаются легкой атлетикой $\frac{2}{5}$ всех школьников, то есть $\frac{2}{5}$ x 40 = 16 человек.

Задача 21.

Владелец газетного киоска решил выяснить, кто чаще покупает газеты – мужчины или женщины. Для этого он в течение недели ежедневно фиксировал общее количество газет, купленных мужчинами, и общее число газет, купленных женщинами. Результаты этого статистического исследования показаны на столбчатой диаграмме.



1) Сколько газет купили женщины в понедельник?

2) Сколько газет купили мужчины в пятницу?

3) Представьте данные о продажах в виде таблицы.

4) Владелец киоска думает, что женщины покупают газеты чаще, чем мужчины. Подтверждают ли данные о продажах это мнение?

Решение.

1) В понедельник женщины купили 35 газет.
2) В пятницу мужчины купили 15 газет.
3) Следующая таблица соответствует приведенной в условии диаграмме.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Мужчины	38	25	27	20	15	32	36
Женщины	35	15	20	23	35	40	27

4) За неделю мужчины купили 193 газеты, а женщины 195. Хотя женщины и купили на 2 газеты больше, чем мужчины, по отношению к общему числу газет, купленных женщинами, эта разница составляет лишь $\frac{2}{195} \approx 0,01 = 1\%$

Столь малое относительное отличие можно объяснить не б*о*льшим интересом женщин к чтению, а какими-то случайными фактами.

Задача 22.

По заданию учителя в ноябре школьник проводил метеорологические наблюдения и, в частности, записывал температуру воздуха на улице. Часть его результатов приведена в таблице.

День	3.11	4.11	5.11	6.11	7.11
Температура	- 5°	- 4°	- 5°	- 7°	- 8°
День	8.11	9.11	10.11	11.11	12.11
Температура	- 9°	- 6°	- 10°	- 6°	- 2°

1)Какой день из указанных был самым холодным?

2)Какова была температура воздуха на улице в этот день?

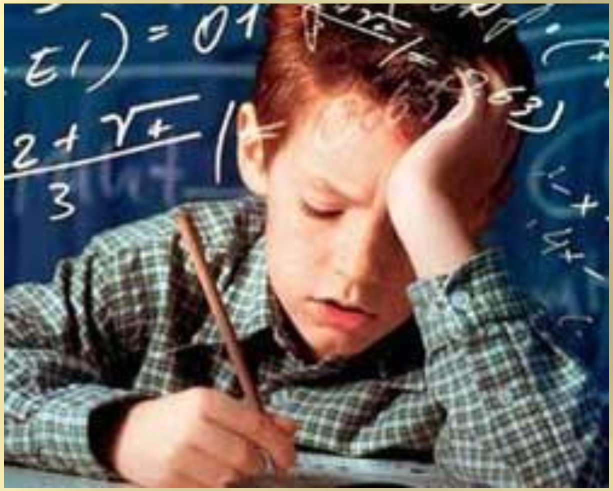
3)Каким является это значение температуры в ряду значений температур – наибольшим или наименьшим?

4)Найдите размах температур за период с 3 по 12 ноября.

Решение.

Самым холодным было 10 ноября, когда температура была равна - 10°. Это значение температуры является наименьшим в ряду чисел -5 , -4, -5, -7, -8, -9, -6, -10, -6, -2.

Самым «теплым» было 12 ноября, когда температура была равна - 2°. Размах набора чисел – это разность между наибольшими и наименьшими числами из этого набора. В нашем случае размах равен (-2) – (-10) = 8 (градусов)



Задача 23.

Контрольную работу по математике писали 32 школьника. Из них 5 человек получили оценку «5», 11 человек – оценку «4», 13 человек – оценку «3», а остальные – «2». Заполните до конца следующую таблицу

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Число школьников, получивших оценку		13	11	5
Доля от общего числа школьников в %				

и подсчитайте средний балл за контрольную.

Решение.

1) В понедельник женщины купили 35 газет.
2) В пятницу мужчины купили 15 газет.

$\frac{3}{32} =$

3) Следующая таблица соответствует приведенной в условии диаграмме.

$\frac{13}{32} =$

4) За неделю мужчины купили 193 газеты, а женщины 195.

$\frac{11}{32} =$

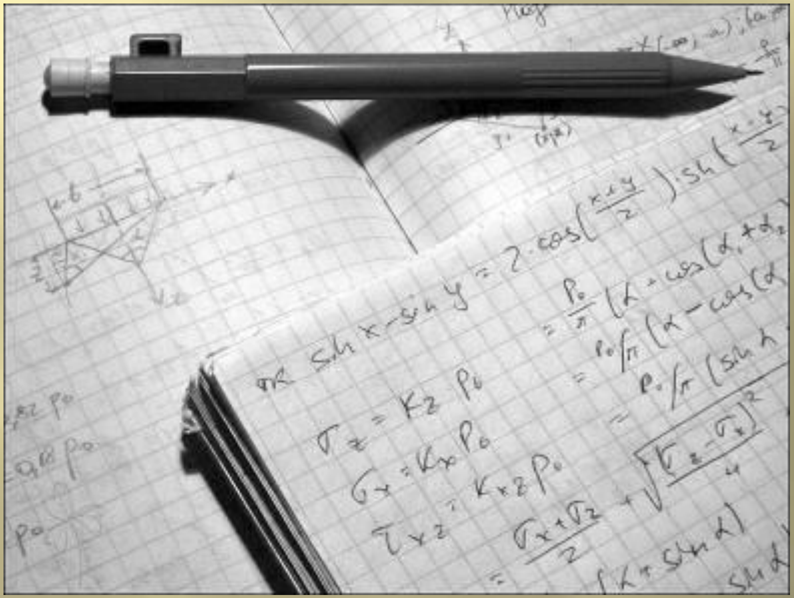
Хотя женщины и купили на 2 газеты больше, чем мужчины, по отношению к общему числу газет, купленных женщинами, эта разница составляет лишь $\approx 0{,}01 = 1\%$

$\frac{5}{32} =$

Столь малое относительное отличие можно объяснить не бо́льшим интересом женщин к чтению, а какими-то случайными фактами.

Поэтому таблица с данными примет следующий вид.

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Число школьников, получивших оценку	3	13	11	5
Доля от общего числа школьников в %	9	41	34	16

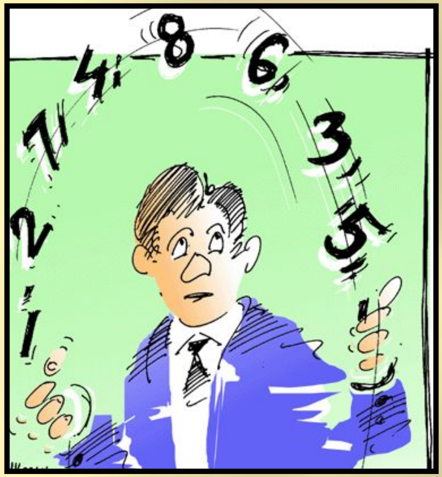


Решение.

1) В понедельник женщины купили 35 газет.
2) В пятницу мужчины купили 15 газет.
3) Следующая таблица соответствует приведенной в условии диаграмме.

4) За неделю мужчины купили 193 газеты, а женщины 195. Хотя женщины и купили на 2 газеты больше, чем мужчины, по отношению к общему числу газет, купленных женщинами, эта разница составляет лишь $\approx 0{,}01 = 1\%$

Столь малое относительное отличие можно объяснить не б**о**льшим интересом женщин к чтению, а какими-то случайными фактами.



Задача 24.

Среднее арифметическое числового набора равнялась 10, медиана 12, размах 5. Все числа набора умножали на 3, после чего прибавили к каждому из них 5.

Чему стали равны среднее арифметическое, медиана, размах полученного набора?

Решение. После умножения на 3 все характеристики тоже умножились на 3: 30, 36, 15. После прибавления 5 среднее арифметическое и медиана увеличились на 5 а размах не изменился: 35, 41, 15

Ответ: 35; 41; 15.

Задача 25.

Завод по производству CD-дисков в течение рабочей недели (5 дней) проводил проверку качества своей продукции. Для этого ежедневно тестировалось 200 случайно отобранных дисков. В каждый из пяти дней было обнаружено соответственно 8, 12, 5 , 7, 10 бракованных дисков. Сколько бракованных дисков можно ожидать в партии из 10 000 дисков?

Решение. Найдём долю бракованных дисков среди всех отобранных:

$$\frac{8+12+5+7+10}{200\cdot 5} = \frac{42}{1000} = 0{,}042.$$

В партии из 10 000 дисков следует ожидать $10000\cdot 0{,}042=420$ бракованных.

Ответ: 420

Задача 26.

В таблице показаны средний балл и количество участников выпускного экзамена в каждой из 5 школ города.

Школа	1	2	3	4	5
Кол-во участников	60	70	30	50	70
Средний балл	60	54	68	72	54

Найдите средний балл выпускного экзамена по всему городу

Решение. Что бы найти средний балл по городу нужно взять средний балл по каждой школе с кратностью, равной числу её выпускников

$$\frac{60\cdot 60+54\cdot 70+68\cdot 30+72\cdot 50+54\cdot 70}{60+70+30+50+70} = \frac{16800}{280} = 60$$

Ответ: 60.

Задача 27.

Поезда прибывали на станцию метро со следующими интервалами:

2 мин. 8 с;

1 мин. 58 с;

2 мин. 10 с;

1 мин. 57 с;

2 мин. 12 с.

Найдите среднее арифметическое и медиану интервалов движения поездов.

Решение. Исходный набор не совсем числовой: каждый интервал выражен в смешанных единицах – минутах и секундах. Переведём все интервалы в секунды:
128, 118, 130, 117, 132.
Теперь найдём среднее в секундах:

$$\frac{128+118+130+117+132}{5} = \frac{625}{5} = 125 \text{ с.}$$

Можно снова перейти к смешанным единицам: среднее арифметическое равно 2 мин. 5 с. Медиана равна 2 мин. 8 сек.

Ответ: 2 мин. 5 с; 2 мин. 8 с.

Задача 28.

Средний возраст 11 игроков футбольного клуба «Динамо», вышедших на игру составил 26 лет. После замены одного из игроков средний возраст уменьшился и стал равен 25. На сколько лет игрок вышедший на замену, младше игрока, ушедшего с поля?

Решение. Если обозначить через x возраст игрока, ушедшего с поля, а через y – вышедшего на замену, то разность средних арифметических до замены и после будет равна

x-y. По условию задачи эта разность равна 26-25=1

11

Отсюда x-y=11

Ответ: 11

Задача 29.

Числовой набор состоит из всех двухзначных нечётных чисел: 11, 13, 15,…, 97, 99

Найдите его среднее арифметическое и медиану.

Решение. Данный набор образует арифметическую прогрессию с первым членом 11 и разностью 2. Всего в наборе 45 чисел. Посередине на 23-м месте находится число 55 (23-й член прогрессии)

Сумму всех чисел набора можно найти как сумму арифметической прогрессии:

$\frac{11+99}{2} \cdot 50=2750.$

Отсюда среднее арифметическое равно

$\frac{2750}{50} = 55$; медиана равна 55.

Ответ: 55; 55.

Задача 30.

Средний рост в 9 «А» классе составляет 156 см, а медиана 154 см. Какое из следующих утверждений справедливо?

1) В классе обязательно есть ученик с ростом 156 см.
2) В классе обязательно есть ученик с ростом 154 см.
3) В классе обязательно есть ученик с ростом менее 154 см.
4) В классе обязательно есть ученик с ростом более 156 см.

Решение. Чтобы показать, что утверждения 1-3 не обязательно должны выполнятся, приведём соответствующие примеры:

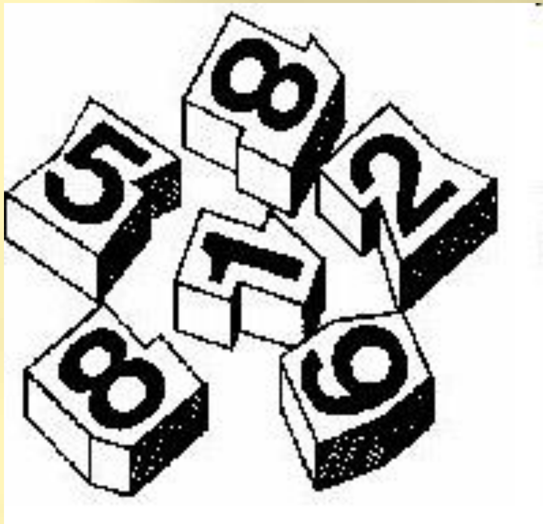
1) 154, 154, 160;

2) 153, 153, 155, 163;

3) см. пример для 1).

А вот утверждение 4) будет выполнено: если в классе нет учеников выше 156 см, то их средний рост может равняться 156 см только в том случае, если все они имеют такой рост. Но тогда и медиана будет равна 156 а не 154.

Ответ: справедливо утверждение 4



Задача 31.

При каких значениях *а* в числовом наборе 1, 2, 3, 4, а

а) медиана будет равняться 3?

б) среднее арифметическое будет равняться 3?

в) среднее арифметическое будет совпадать с медианой?

а) $a \geq 3$. При $a<3$ медиана будет равняться 2 или a;

б) $a=5$. $\dfrac{1+2+3+4+a}{5} = 3$, откуда $a=5$;

в) $a=0$; $a=2{,}5$; $a=5$. Медиана приведённого числового набора равна:

2 при $a \leq 2$, a при $2<a<3$, 3 при $a \geq 3$ Среднее арифметическое равно:

$\dfrac{1+2+3+4+a}{5}$.

Получаем 3 уравнения с соответствующими условиями на a:

$$\frac{1+2+3+4+a}{5} = 2 \quad (a \leq 2);$$

$$\frac{1+2+3+4+a}{5} = a \quad (2<a<3);$$

$$\frac{1+2+3+4+a}{5} = 3 \quad (a \geq 3).$$

Их корни и будут ответом.

Задача 32.

Три девятых класса писали итоговую контрольную работу по математике. После выставления оценок были посчитаны числовые характеристики полученных числовых наборов и занесены в таблицу.

Класс	Среднее	Мода	Медиана	Размах
9 «А»	4.2	4	4	3
9 «Б»	4	4	4	2
9 «В»	3,8	3	4	2

Очевидно, что полностью восстановить по этим данным невозможно. А можно ли определить, в каких классах были двойки а в каких не было?

Решение. Объясним ответ для каждого класса.
9 «А»: если размах 3, то обязательно были 2 и 5.
9 «Б»: поскольку размах 2, то все оценки лежат либо от 2 да 4, либо от 3 до 5. (Причём концы диапазонов обязательно присутствуют.) Для диапазона от 2 до 4 среднее не может равняться 4, поэтому лежат
от 3 до 5.
9 «В»: поскольку размах 2, то все оценки лежат либо от 2 до 4, либо
От 3 до 5 (Причём концы диапазонов обязательно присутствуют.) Предположим, что это диапазон от 2 до 4; тогда четвёрок должно больше половины всех оценок (ведь 4 - медиана, а пятёрок в этом случает нет вообще), но тогда 3 не может быть модой – пришли к противоречию. Значит все оценки лежат от 3 да 5.
Ответ: 9 «А» - были, 9 «Б» и 9 «В» - не было.

Задача 33.

Из урожая картофеля, собранного на одной из опытных делянок, случайным образом было отобрано 25 клубней, в которых подсчитывалось число глазков. Результат оказался следующий:

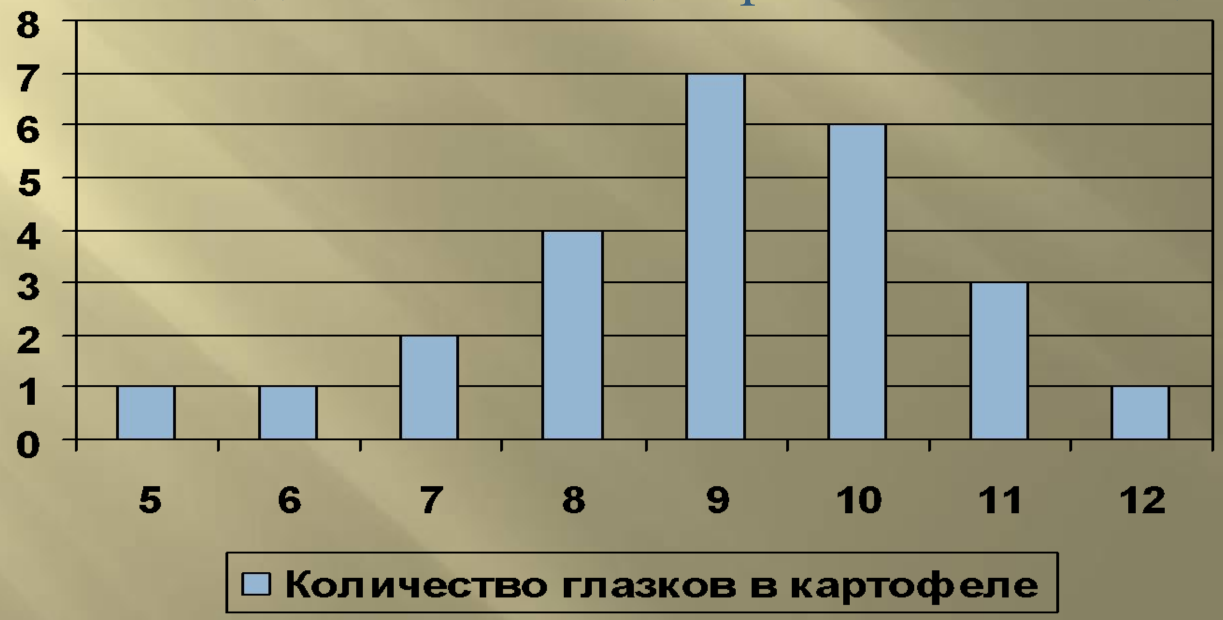
6, 9, 5, 10, 7, 9, 8, 10, 9, 10, 8, 11, 9, 12, 9, 10, 8, 10, 11, 9, 10, 9, 8, 7, 11.

Требуется построить вариационный ряд, столбчатую диаграмму (вариант; частота), полигон относительных частот.

Решение. Чтобы разобраться в этих данных, расположим из в порядке возрастания числовых значений признака, т.е. ранжируем таким образом, чтобы посчитать, сколько раз каждая варианта (x_i) встречается в данной совокупности. Получим ряд: 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9,10, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12. Так как признак варьирует в пределах от 5 до 12 единиц, то вариационный ряд представим следующим образом:

x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	1	1	2	4	7	6	3	1

Тогда столбчатая диаграмма имеет вид:



Для построения полигона сначала вычислим относительные частоты, и их значения представим в следующей таблице.

x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
w_i	0,04	0,04	0,08	0,16	0,28	0,24	0,12	0,04

На основании полученных данных строим полигон относительных частот (частностей):

Задача 34.

Осуществляя в 10 пробирках реакцию этерификации между этиловым спиртом (C_2H_5OH) и уксусной кислоты (CH_3COOH), лаборант получил в каждой из них этилацетат ($CH_3COOC_2H_5$), причём массы эфира в пробирках соответственно равны (в граммах): 2,5; 4; 3; 4,5; 3; 5; 2,5; 4; 4; 5. Определите среднее значение массы эфира в проведённых опытах.

Решение. Для начала проранжируем данный ряд: 2,5; 2,5; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5.

Тогда $x_{в} = \frac{2{,}5\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 3+4{,}5\cdot 1+5\cdot 2}{10} = 3{,}75$ г.

Ответ: 3,75 г.

Задача 35.

Специалист страховой компании подготовил отчёт о результатах работы компании за прошедший день. В частности, в отчёте говорится, что за день было заявлено 5 страховых случаев, и средний размер ущерба составил 6258 руб. Он уже собирался сдать отчёт руководителю своего отдела, как ему сообщили о двух новых страховых случаях: на 5216 руб. и на 12074 руб.

Определите новый размер ущерба.

Решение. Общая сумма ущерба по пяти страховым случаям равна 5 х 6258=31290 руб. С учётом только что заявленных случаев, общая сумма потерь компании по всем семи страховым случаем равна 31290+5216+12074=48580 руб. Поэтому новое значение среднего ущерба равно

$$\frac{48580}{7} = 6940 \text{ руб.}$$

Ответ: 6940 рублей.

Задача 36. Торговая компания хочет понять сколько денег тратят её покупатели за один визит в магазин. Первые 32 чека выбиты на следующие суммы (в руб.):

108; 54; 62; 74; 40; 38; 85; 92; 64; 25; 80; 143; 50; 63; 38; 79; 155; 28; 61; 83; 62; 42; 76; 47; 70; 83; 35; 192; 140; 52; 64; 88.

Компанию не интересует точная сумма S, указанная в чеке; для неё покупки делятся на мелкие ($10 \le S < 50$), средние ($50 \le S < 100$), крупные ($100 \le S < 200$). При этом компания имеет в виду, что никто из её покупателей не тратит меньше 10 рублей и (за крайне редким исключением) больше 200 рублей.

1) Заполните следующею таблицу

Покупка	Встретилось в списке	Всего
Мелкая		
Средняя		
Крупная		

Во 2 столбце отмечайте каждую покупку чёрточкой формируя у них квадрат с диагоналями: так фигура - символизирует 2 покупки, - 4 покупки, а фигура X - 6 покупок.

2) Какие покупки, мелкие, средние или крупные, делаются чаще всего?

3) Что можно сказать о среднем размере покупки на основе данных этой таблицы (не используя исходные данные о точной сумме каждой покупки)?

Решение.

1) Таблица с результатами подсчётов выглядит следующим образом.

Покупка	Встретилось в списке	Всего
Мелкая	$\boxed{X}$ ∟	8
Средняя	$\boxed{X}$ $\boxed{X}$ $\boxed{X}$ |	19
Крупная	⧅	5

2) Из этой таблицы ясно видно, что наиболее распространены средние покупки.

3) Про сумму S одной мелкой покупки мы знаем лишь то что $10 \le S < 50$. Про общую сумму $S_м$, потраченную на 8 мелких покупок, мы можем сказать лишь то что $80 \le S_м < 400$. Аналогично, относительно общей суммы $S_с$, потраченных на все 19 средних покупок мы можем сказать лишь то, что $950 \le S_с < 1900$, а про общую сумму $S_к$, потраченную на все 5 крупных покупок, мы можем сказать лишь то, что $500 \le S_к < 1000$. Складывая три этих неравенства, для общих расходов $S_{общ} = S_м + S_с + S_к$ мы получим двойное неравенство: $1530 \le S_{общ} < 3300$. Средняя сумма одной покупки равна $\frac{S_{общ}}{32}$

На основе данных таблицы мы можем утверждать лишь то, что эта величина находится в пределах от $\frac{1530}{32} \approx$ 47 руб. 81 коп. до $\frac{3300}{32} \approx$ 103 руб. 13 коп.

Задача 37. В классе 12 мальчиков и 10 девочек. Учительница задала каждому ученику 20 задач на сложение двузначных чисел в уме. В таблице 1 приведены результаты этого теста для мальчиков, а в таблице 2 - для девочек.

Номер школьника по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число правильно решённых задач	15	12	8	16	14	11	17	7	16	20	15	14

Номер школьника по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число правильно решённых задач	17	15	14	16	13	17	16	12	14	16

Подсчитайте среднее число правильно решённых задач одним мальчиком и среднее число правильно решённых задач одной девочкой, а также размах числа правильно решённых задач мальчиками и девочками.

Можно ли с помощью этих результатов определенно сказать, кто лучше считает в уме – мальчики или девочки?

Среднее число правильно решённых задач одним мальчиком равно:

$$\overline{x}=\frac{15+12+8+16+14+11+17+7+16+20+15+14}{12}=\frac{165}{12}=13,75.$$

Среднее число правильно решённых задач одной девочкой равно:

$$\overline{y}=\frac{17+15+14+16+13+17+16+12+14+16}{10}=\frac{150}{10}=15.$$

Для мальчиков наибольшее число правильно решённых задач равно 20, а наименьшее равно 7. Поэтому для мальчиков размах числа правильно решённых задач равен 20-7=13.

Для девочек наибольшее число правильно решённых задач равно 17, а наименьшее равно 12. Поэтому для девочек размах числа правильно решённых задач равен 17-12=5.

Таким образом, для девочек среднее число правильно решённых задач одним человеком больше чем для мальчиков. Кроме того, значения размахов показывают, что результаты девочек разбросаны гораздо меньше, то есть более стабильны. Поэтому разумно сделать вывод, что девочки этого класса лучше считают в уме, чем мальчики.

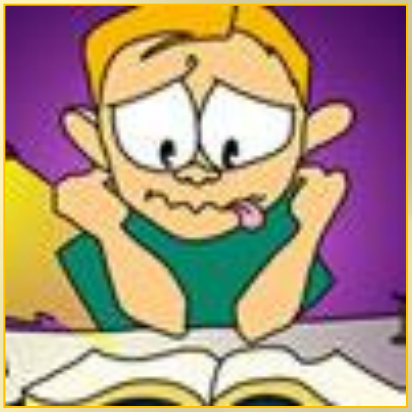
Комбинаторика

Задача 1. В первый ящик положили
5 мобильников,
а во второй – 3 мобильника.
Сколькими способами можно вытащить
один мобильник?

Решение.

Из 1 ящика можно вытащить
пятью способами, а из 2 – тремя способами.
Всего существует 5+3 = 8 способов.

Ответ: 8.



Задача 2. В первом ящике
5 мобильников с зеленым корпусом,
а во втором – 3 мобильника
с красным корпусом.
Сколькими способами можно вытащить
один зеленый и один красный мобильник?

Решение.
Зеленые мобильники можно выбрать
пятью способами, красные – тремя способами.
Всего 1 зеленый и 1 красный можно выбрать
$3 \cdot 5 = 15$ способами.
Ответ: 15.

Задача 3. Сколько не более чем трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 так, чтобы цифры в числах не повторялись?

Решение.

Надо узнать, сколько можно составить однозначных, двузначных или трехзначных чисел.

По правилу суммы их будет $N = N_1+N_2+N_3$.

Однозначных чисел будет 5, значит, $N_1 = 5$.

На месте десятков двузначных чисел можно поставить любую из пяти цифр.

После каждого такого выбора на месте единиц можно поставить любую из четырех оставшихся цифр, т.к. цифры в числе не должны повторяться.

По правилу произведения $N_2 = 5\cdot 4 = 20$.

Рассуждая аналогично, получим число различных трехзначных чисел

$N_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Следовательно, $N = 5+20+60 = 85$.

Задача 4.В одной вазе лежит
5 яблок,
а в другой -8 мандаринов.
Сколькими способами можно выбрать:
а) яблоко или мандарин;
б) яблоко и мандарин?

а) $N = 5+8 = 13$

б) $N = 5 \cdot 8 = 40$

Ответ: 13; 40.

Задача 5.Ученик должен выполнить практическую работу
по математике.
Ему предложили на выбор
17 тем по алгебре и 13 тем
по геометрии.
Сколькими способами он может выбрать одну тему
для практической работы?

$$N = 17+13 = 30$$

Ответ: 30.

Задача 6.В танцевальном кружке 5 мальчиков и 4 девочки. Руководитель хочет отобрать пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки для участия в соревнованиях. Сколько он должен посмотреть пар, чтобы выбрать лучшую пару?

$$N = 5 \cdot 4 = 20$$

Ответ: 20.

Задача 7. Имеется 5 билетов
денежно-вещевой лотереи,
6 билетов спортлото
и 10 билетов автомотолотереи.
Сколькими способами
можно выбрать 1 билет
из спортлото
или автомотолотереи?

Денежно-вещевая лотерея в выборе не участвует, поэтому

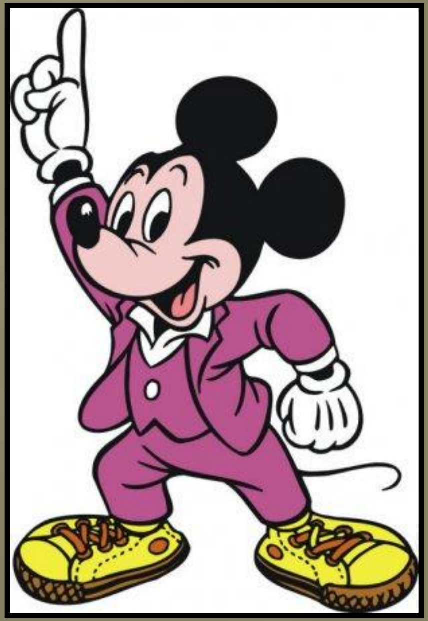
$$10+6=16$$

Ответ: 16.

Задача 8.Сколько имеется путей, которыми
можно попасть
из города А в город С
через город В, если из А в В ведут две дороги,
а из В и С – три дороги?

$$N = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6.



Задача 9.На книжной полке стоят
25 книг по математике,
15 – по физике,
10 – по астрономии.
Сколькими способами можно выбрать
3 книги так, чтобы одна книга была по математике,
другая – по физике
и третья – по астрономии?

$$N = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 3750$$

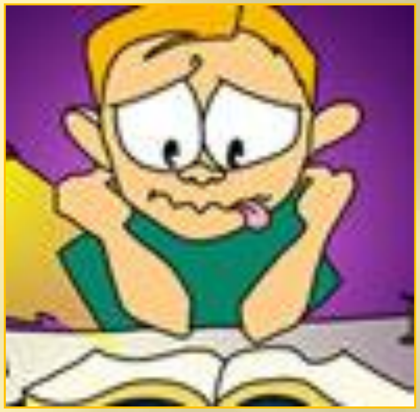
Ответ: 3750.

Задача 10.Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,4,5,9?

Решение.
Составим таблицу: слева от первого столбца – первые цифры искомых чисел, а выше первой строки – вторые цифры этих чисел (учитывая, что числа – четные, т.е. оканчиваются на 0,2,4).

	0	**2**	**4**
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

5 строк · 3 столбика = 15 чисел
Ответ: 15.



Задача 11.Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1,4,7, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

При использовании правила умножения применяют схему – дерево возможных вариантов.

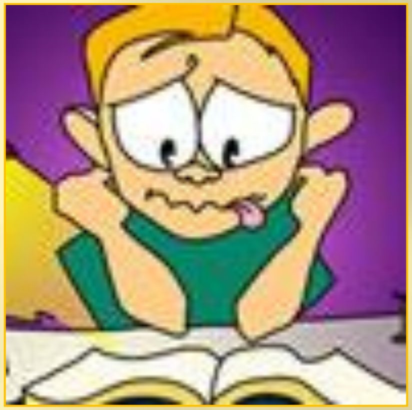
Двузначное число

1 цифра числа 1 4 7

2 цифра числа 4 7 1 7 1 4

14,17 41,47 71,74

Ответ: 6.



Задача 12.На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром.

Из скольких вариантов завтрака Вова может выбирать?

Решение.

Составим таблицу.

	Плюшка	Бутерброд	Пряник	Кекс
Кофе	Кофе, плюшка	Кофе, бутерброд	Кофе, пряник	Кофе, кекс
Сок	Сок, плюшка	Сок, бутерброд	Сок, пряник	Сок, кекс
Кефир	Кефир, плюшка	Кефир, бутерброд	Кефир, пряник	Кефир, кекс

3 строки · 4 столбика = 12 вариантов завтрака

Ответ: 12.

Задача13.Сколько двузначных чисел можно записать
в десятичной системе счисления?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

9 строк ·10 столбиков = 90 чисел

Ответ: 90.

Задача14.Служитель зоопарка
должен дать зайцу
2 различных овоща.
Сколькими способами
он может
это сделать, если у него есть
морковь, свекла и капуста?

Завтрак зайца

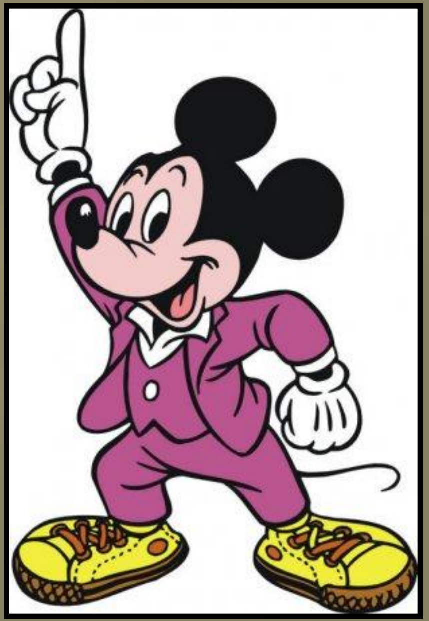
1 овощ М С К

2 овощ С К М К М С

Варианты МС, МК, СМ, СК, КМ, КС

6 вариантов, но блюда МС и СМ,
МК и КМ, КС и СК совпадают, поэтому
3 пары блюд

Ответ: 3.



Задача15.Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

Маршрут

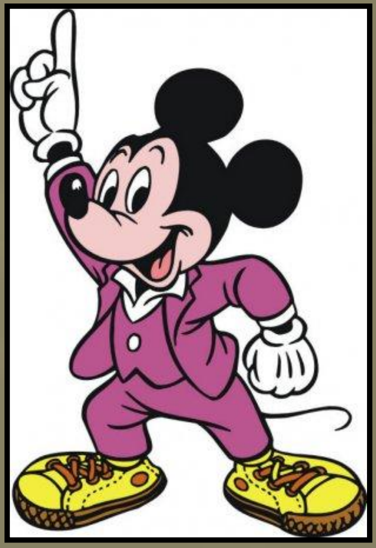
1 город	В		Р		Ф	
2 город	Р	Ф	В	Ф	В	Р
3 город	Ф	Р	Ф	В	Р	В

Варианты ВРФ, ВФР, РВФ, РФВ ФВР, ФРВ

Ответ: 6.

Задача16.Несколько стран
в качестве символа своего государства
решили использовать флаг
в виде трех горизонтальных полос
одинаковых по ширине,
но разных по цвету:
белый, синий, красный.
Сколько стран могут использовать
такую символику при условии,
что у каждой страны свой,
отличный от других,
флаг?

	Белый	Красный	Синий
Белый		б к с	б с к
Красный	к б с		к с б
Синий	с б к	с к б	



Ответ: 6.

Задача17.В коридоре висят три лампочки.
Сколько различных способов освещения коридора?

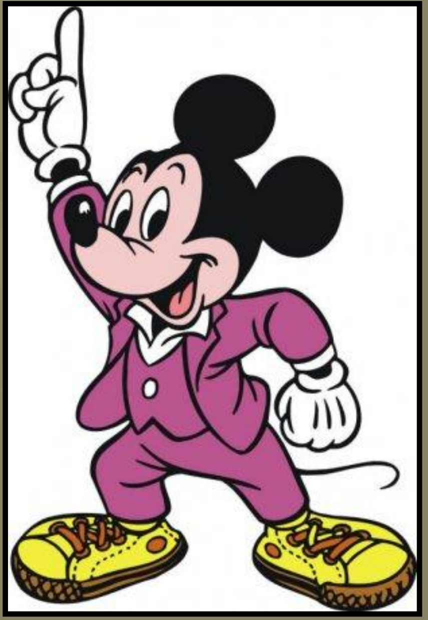
1 способ. По правилу умножения:

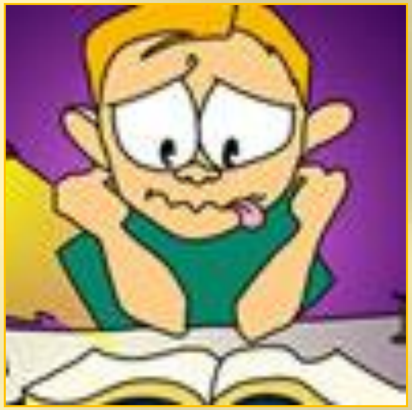
$$N = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

2 способ.   + горит,   - не горит

+++	++-	+-+	+--
---	--+	-+-	-++

Ответ: 8.





Задача 18.Сколько различных
пятизначных чисел можно составить
из цифр 1,2,3,4,5 при условии,
что ни одна цифра в числе
не повторяется?

Решение.

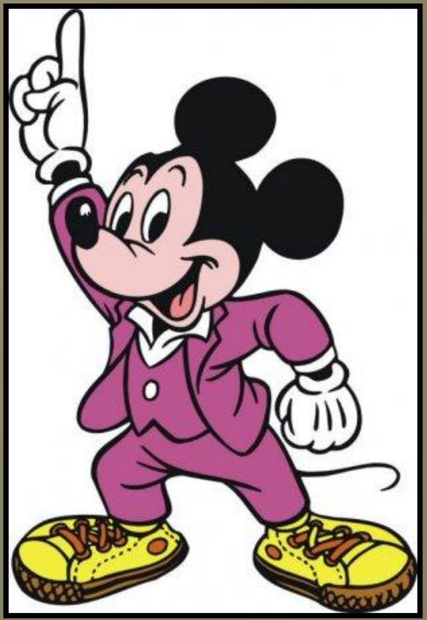
$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Ответ: 120.

Задача19.В соревнованиях участвовало 4 команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

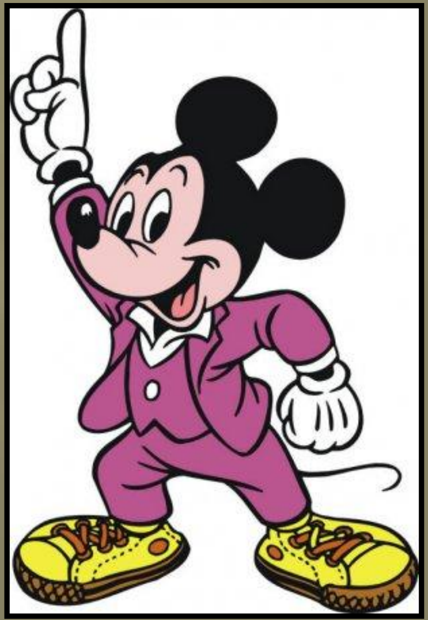
Ответ: 24.

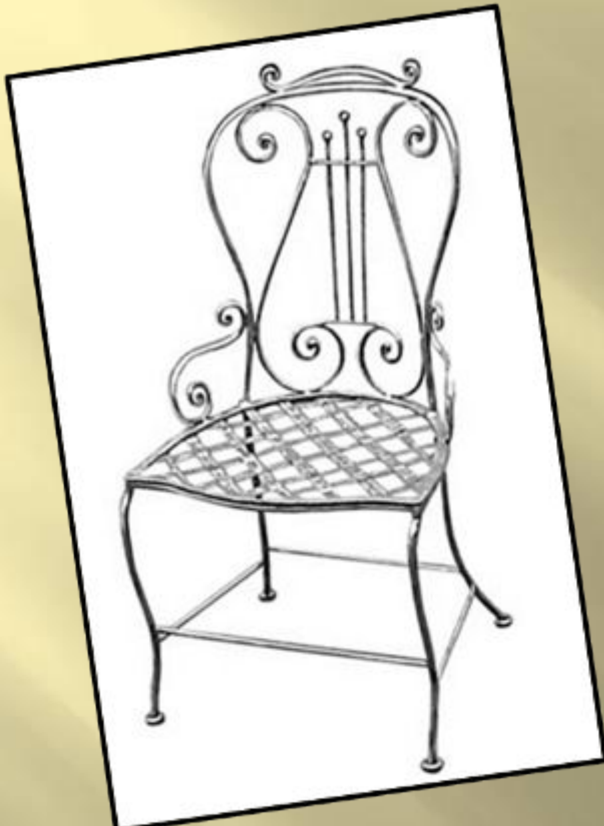


Задача 20.Сколькими способами
можно расположить
на шахматной доске
8 ладей так,
чтобы они не могли взять
друг друга?

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

Ответ: 40320.





Задача 21.Сколькими способами
можно разместить 12 человек
за столом,
возле которого поставлены
12 стульев?

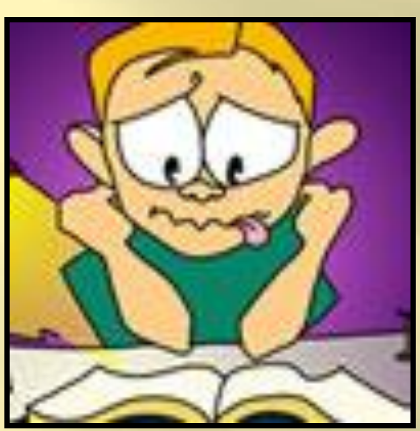
$$P_{12} = 12! = 479001600$$

Ответ: 479001600.

Задача 22.Сколькими способами
7 книг разных авторов
можно расставить на полке
в один ряд?

$P_7 = 7! = 5040$

Ответ: 5040.



Задача 23.Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение.
Т.к. двузначные числа отличаются друг от друга
или самими цифрами, или их порядком,
то искомое количество равно
числу размещений из пяти элементов по два:

$A^2_5 = 5 \cdot 4 = 20$

Ответ: 20.

Задача 24.У нас есть 9 книг из серии «Занимательная математика». Сколькими способами можно подарить 3 из них?

Решение.

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

Ответ: 504.

Задача 25.Сколько существует вариантов
распределения трех призовых мест,
если в розыгрыше участвуют
7 команд?

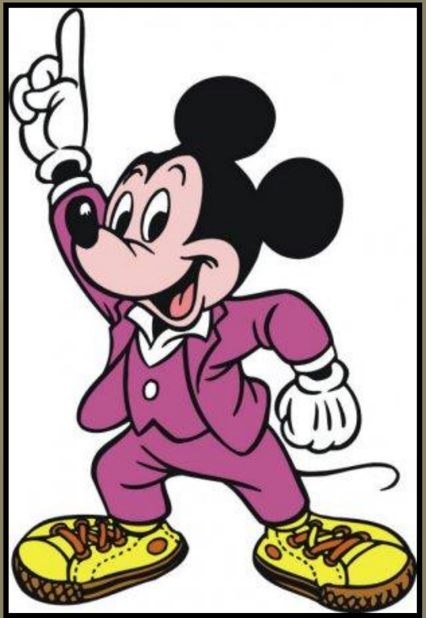
$$A^3_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Ответ: 210.

Задача 26.Сколько вариантов расписания
можно составить на один день,
если всего имеется
8 учебных предметов,
а в расписании на день
могут быть включены
только три из них?

$A^3_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Ответ: 336.



Задача 27.Сколько вариантов распределения
трех путевок в санатории
различного профиля
можно составить
для пяти претендентов?

$A^3_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ответ: 60.

Задача 28.В городе проводится первенство по футболу. Сколько в нем состоится матчей, если участвуют 12 команд?

$A^2_{12} = 12 \cdot 11 = 132$

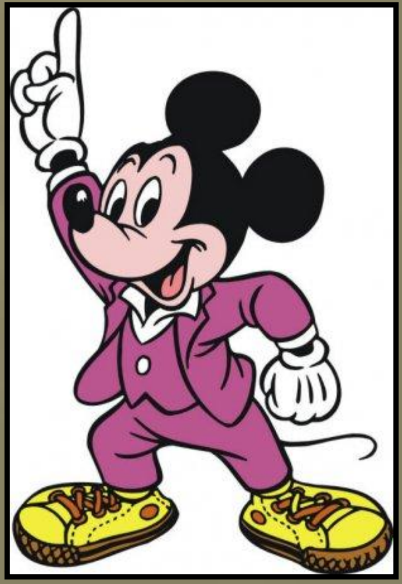
Ответ: 132.

Задача 29.Сколько
различных музыкальных фраз
можно составить
из 6 нот,
если не допускать в одной фразе
повторения звуков?

Музыкальные фразы отличаются одна от другой или нотами, или их порядком. Считаем, что фортепиано имеет 88 клавиш.

$$A_{88}^{6} = \frac{88!}{(88-6)!} = 390190489920$$

Ответ: 390190489920.



Задача 30.Сколько сигналов можно подать 5 различными флажками, поднимая их в любом количестве и в произвольном порядке?

$$A_5^1+A_5^2+A_5^3+A_5^4+A_5^5=\frac{5!}{(5-1)!}+\frac{5!}{(5-2)!}+\frac{5!}{(5-3)!}+\frac{5!}{(5-4)!}+\frac{5!}{(5-5)!}=325$$

Ответ: 325.

Задача 31.В тренировках участвовали
12 баскетболистов.
Сколько различных стартовых пятерок
может образовать тренер?

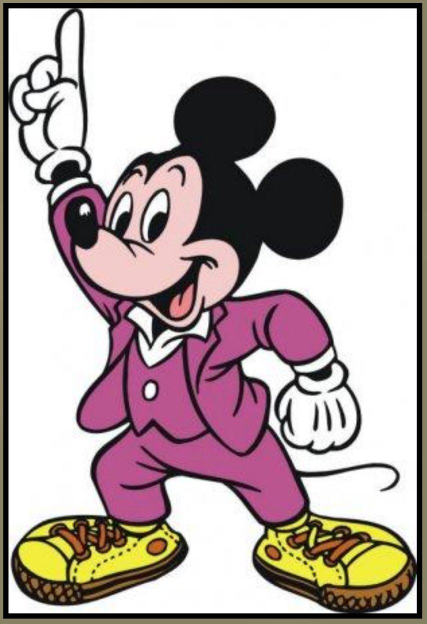
$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{(12-5)!\cdot 5!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

Ответ: 792.

Задача 32.Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет «5 из 36»?

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{(36-5)!5!} = \frac{31!\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{31!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376992$$

Ответ: 376992.



Задача 33.Сколькими способами читатель
может выбрать
2 книжки из 6 имеющихся?

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

*Ответ:*15.

Задача 34.Сколькими способами можно
составить дозор
из трех солдат и одного офицера,
если имеется
80 солдат и 3 офицера?

$$C_{80}^{3} \cdot C_{3}^{1} = \frac{80!}{(80-3)!3!} \cdot \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{77!\cdot78\cdot79\cdot80\cdot3!}{77!\cdot3!\cdot2!} = 246480$$

Ответ: 246480.

Задача 35.Сколькими способами можно
выбрать двух человек в президиум,
если на собрании присутствует
78 человек?

$$C_{78}^{2} = \frac{78!}{(78-2)!\cdot 2!} = \frac{76!\cdot 77\cdot 78}{76!\cdot 1\cdot 2} = 3003$$

Ответ: 3003.

Задача 36.Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

Решение.

Т.к. порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то будут размещения с повторениями из 5 элементов по 3, а их число равно

$$\tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

Ответ: 125.

Задача 37. В кондитерском магазине продают 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, бисквитные и слоеные.
Сколькими способами можно купить
7 пирожных?

Решение.

Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта.

$$\tilde{C}_4^7 = \frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

Ответ: 120.

Задача 38. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение.

Всего 6 букв. Одинаковые буквы

n«а» = 3, n«н» = 2, n«с» = 1.

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

Ответ: 60.

Задача 39. Семь девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?

Решение.
Если бы девушки стояли на месте, то их было бы
$P_7 = 7! = 5040$.
Но т.к. танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих не имеет роли,
важно лишь взаимное расположение, т.е.перестановки, переходящие друг в друга.
Но из каждой перестановки можно получить еще 6 путем вращения - 7 мест
$5040 : 7 = 720$ различных перестановок девушек в хороводе.
$P(\text{вр.}7) = (7-1)! = 720$

Ответ: 720.

Задача 40.Сколко ожерелий
можно составить
из 7 бусинок?

Решение.

Ожерелье можно не только вращать, но и перевернуть.

$$P_{(\text{вр.и пов.})} = \frac{(n-1)!}{2}$$

$$P_7 = \frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$$

Ответ: 360.

Задача 41.На сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи.

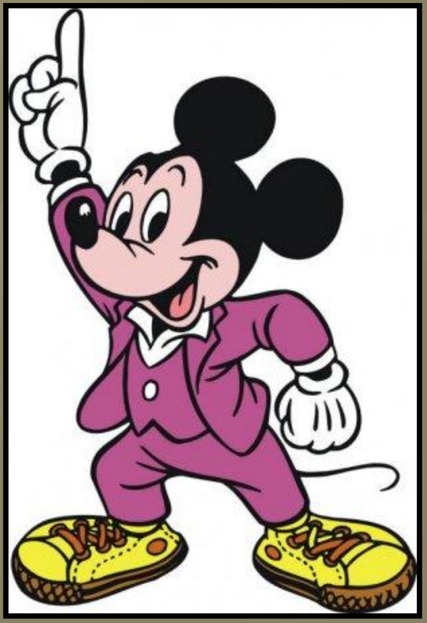
Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры?

Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?

1) $\tilde{A}_4^9 = 4^9 = 262144$

2) $\tilde{C}_4^9 = \frac{(9+4-1)!}{9!(4-1)!} = \frac{12!}{9!3!} = 220$

Ответ: 262144; 220.

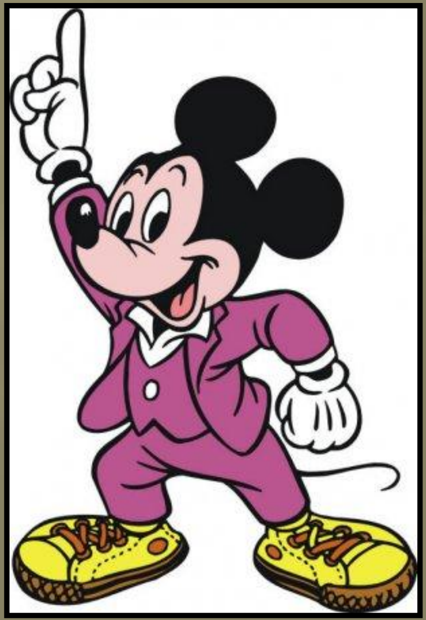


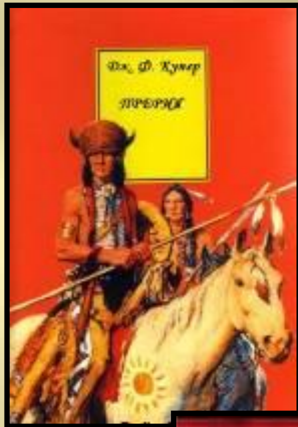
Задача 42.Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Всего букв в слове 9. Одинаковые буквы $n_{«м»}=1$, $n_{«и»}=4$, $n_{«с»}=3$, $n_{«п»}=1$

$$P_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1!4!3!1!} = 2520$$

Ответ: 2520.





Задача 43.В книжный магазин
поступили
романы Ф.Купера
«Прерия», «Зверобой», «Шпион»,
«Пионеры», «Следопыт»
по одинаковой цене.
Сколькими способами
библиотека
может закупить 17 книг
на выбранный чек?

$$\tilde{C}_5^{17} = \frac{(17+5-1)!}{17!(5-1)!} = \frac{21!}{17!4!} = 5985$$

Ответ: 5985.

Задача 44.Номер автомашины состоит
из трех букв русского алфавита
и трех цифр.
Сколько различных номеров
автомашин
можно составить?

$$\tilde{A}_{33}^{3} \cdot \tilde{A}_{10}^{3} = 33^{3} \cdot 10^{3} = 35937000$$

Ответ: 35937000.

Используемая литература:

1.А.Н.Мордкович,П.В.Семенов.
События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп.параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. общеобразоват.учреждений.-
3-е изд. – М.:Мнемозина,2005.

2.А.Г.Климова,И.Н.Данкова,О.П.Малютина.
Элективный курс для профильного обучения.
(10-11 классы). Начала теории вероятностей
с элементами комбинаторики и математической статистики.- Воронеж: ВОИПКРО,2006.

3.Журнал «Математика в школе» №5, №6, №7, 2011.

4.Учебно-методическая газета «Математика» №1, №7, 2008 ; №15, 2009.