МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Урок
обобщения
и
систематизации
знаний

Первый метод решения – уравнивание оснований степеней

Суть данного метода заключается в том, что
используя свойства степеней,
мы приводим уравнение к виду

При положительном отличном от единицы a

это уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = g(x)$$

При решении используем определения и свойства степеней

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Решить уравнение $$\frac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}}=64$$

Решение $$\frac{2^{2x-1}\cdot 2^{2x+2}}{2^{3x-3}}=2^6$$

$$2^{(2x-1)+(2x+2)-(3x-3)}=2^6;$$

$$2^{x+4}=2^6;$$

$$x+4=6;$$

$$x=2$$

Второй метод решения – вынесение общего множителя за скобки

Суть метода заключается в том, что используя свойства степеней, выносим за скобки степень с наименьшим показателем

При решении используем свойство степеней

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Решить уравнение

$$3^{x+1}+3^{x-1}-3^{x-2}-3^{x-3}=258$$

Решение

$$3^{x-3}(3^4+3^2-3-1)=258;$$

$$3^{x-3}(81+9-3-1)=258$$

$$3^{x-3}\cdot 86=258$$

$$3^{x-3}=3$$

$$x-3=1;$$

$$x=4$$

Третий метод-вынесение за скобки общего множителя в уравнениях, содержащих степени с разными основаниями

Суть метода заключается в следующем:

1.Переносим слагаемые с разными основаниями
 в разные стороны уравнения

2.В левой и правой части уравнения выносим
 за скобку степени с наименьшими показателями

3.Делим обе части уравнения на подходящие множители, чтобы получить уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Решить уравнение

$$2^{3x+10} - 3^{3x+9} + 3^{3x+7} + 2^{3x+9} = 0$$

Решение:

$$2^{3x+10} + 2^{3x+9} = 3^{3x+9} - 3^{3x+7}$$

$$2^{3x+9}(2+1) = 3^{3x+7}(3^2 - 1)$$

$$2^{3\mathrm{x}+9} \cdot 3 = 3^{3x+7} \cdot 8$$

$$\frac{2^{3x+9} \cdot 3}{2^3 \cdot 3^{3x+7}} = 1$$

$$\frac{2^{3x+6}}{3^{3x+6}} = 1$$

$$(\frac{2}{3})^{3x+6} = 1$$

$$3x + 6 = 0$$

$$x = -2$$

Четвертый метод – введение новой переменной

Данный метод применяется в уравнениях вида

$$Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + c = 0$$

Обозначим $a^{f(x)} = t$

По свойствам показательной функции t - положительно

Уравнение примет вид $At^2 + Bt + C = 0$

Решая квадратное уравнение , находим значения t_1, t_2

Для положительных значений решаем уравнение

$$a^{f(x)} = t$$

$$2^{2x+1}+2^{x+2}=16$$

Решение: $2\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^{x}-16=0$

Обозначим $2^{x}=t;$

Уравнение примет вид: $2t^{2}+4t-16=0;$

$$t^{2}+2t-8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=2 \end{array}\right.;\left[\begin{array}{l} 2^{x}=-4 \\ 2^{x}=2 \end{array}\right.$$

Уравнение $2^{x}=-4$ решений не имеет

Из уравнения $2^{x}=1$ получаем $x=0$

Пятый метод – введение новой переменной в однородных показательных уравнениях

Данный метод применяется в уравнениях вида

$$Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)}b^{f(x)} + Cb^{2f(x)} = 0$$

Разделим обе части уравнения на $b^{2f(x)}$

Уравнение примет вид $A(\frac{a}{b})^{2f(x)} + B(\frac{a}{b})^{f(x)} + C = 0$

Обозначим $(\frac{a}{b})^{f(x)} = t$

По свойствам показательной функции t - положительно

Уравнение примет вид

$$At^2 + Bt + C = 0$$

Решаем квадратное уравнение и для положительных значений t решаем уравнение $(\frac{a}{b})^{f(x)} = t$

$$3\cdot 4^x - 5\cdot 6^x + 2\cdot 9^x = 0$$

Решение: $$3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 2\cdot 3^{2x} = 0$$

Разделим обе части уравнения на 3^{2x}

Получим $$3\cdot(\frac{2}{3})^{2x} - (\frac{2}{3})x + 2 = 0$$

Обозначим $$(\frac{2}{3})^x = t$$

Уравнение примет вид $$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (\frac{2}{3})^x = 1 \\ (\frac{2}{3})^x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Шестой метод – использование свойства монотонности функций

Теорема: Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке М, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке.

Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Суть метода в следующем:

1.Определяем монотонность функций в левой и правой частях уравнения

2.Угадываем корень уравнения

3.На основании теоремы делаем вывод о единственности найденного корня

Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{x} + 1$$

Решение: Рассмотрим две функции.

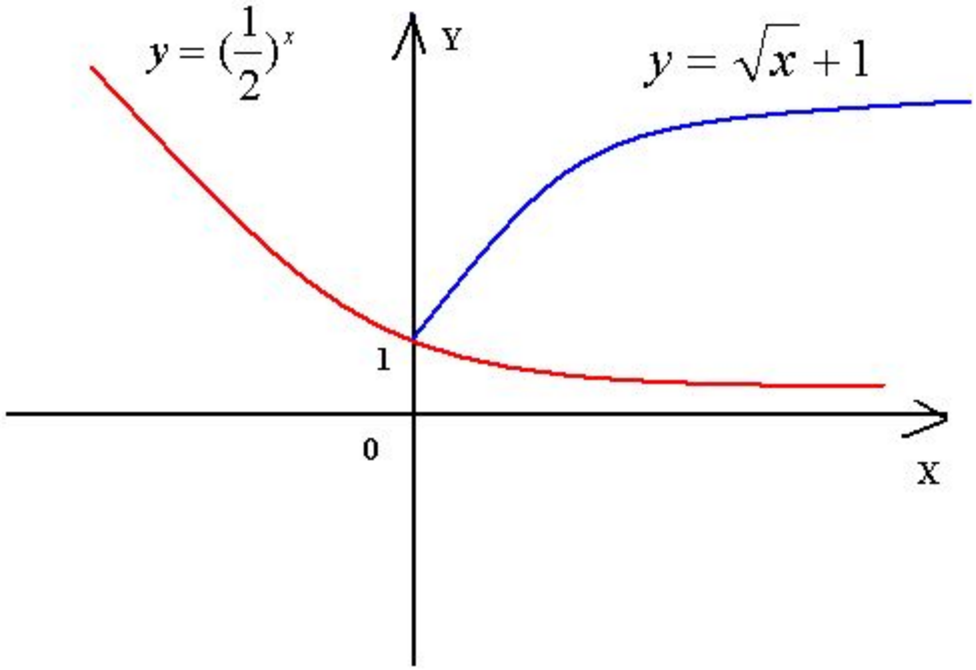
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функция, убывающая на всей числовой оси

$y = \sqrt{x} + 1$ функция возрастающая на всей числовой оси

$x = 0$ является очевидным корнем уравнения.
По теореме этот корень – единственный

Графическая иллюстрация решения уравнения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{x} + 1$$



Седьмой метод –решение уравнений вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

При положительном значении a прологарифмируем

обе части по любому основанию

Удобнее логарифмировать по основанию a (или b)

$$\log_a(a^{f(x)}) = \log_a(b^{g(x)})$$

$$f(x)\cdot\log_a a = g(x)\cdot\log_a b$$

$$f(x) = g(x)\cdot\log_a b$$

Получили алгебраическое уравнение,
решаемое стандартными способами

$$2^x = 3^{x+2}$$

Решение: Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3

$$\log_3 2^x = \log_3 3^{x+2}$$

$$x\log_3 2 = (x+2)\log_3 3$$

$$x\log_3 2 = x + 2$$

$$x(\log_3 2 - 1) = 2$$

$$x = \frac{2}{\log_3 2}$$

Презентацию подготовила
учитель математики БГОУ СОШ №531
Красногвардейского района
города Санкт-Петербурга
СМИРНОВА Галина Васильевна