Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Школа № 13»

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ ПО МАТЕМАТИКЕ

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

автор проекта:
ученица 8 класса
Лиханова Карина
Научный руководитель:
учитель математики
Проказова О.В.

Рубцовск,2020

«Уравнение - это золотой ключ, открывающий все математические сезамы.»
С. Коваль

Актуальность:

современные научно-методические исследования показывают, что использование разнообразных методов и способов позволяет значительно повысить эффективность и качество изучения решений квадратных уравнений.

Цель работы:

разработать методическое пособие для учащихся, содержащее различные способы решения квадратных уравнений, выделить эффективные способы решения и показать их практическое применение.

Задачи:

- *-изучить историю развития квадратных уравнений;*
- *-рассмотреть стандартные и нестандартные методы решения квадратных уравнений;*
- *-выявить наиболее удобные способы решения квадратных уравнений;*
- *научиться решать квадратные уравнения различными способами;*
- *составить буклет-памятку со всеми изученными способами решения квадратных уравнений.*

Гипотеза: *любое квадратное уравнение можно решить всеми существующими способами.*

Объект исследования: *квадратные уравнения.*

Предмет исследования: *способы решения уравнений второй степени.*

Методы исследования: *теоретический, математический, графический.*

Впервые я услышала о квадратных уравнениях на уроках алгебры от учителя. Особенно меня заинтересовали способы их решения, причем наиболее рациональные.

Во-первых, удивило сочетание слов «**квадратное**», «**уравнение**».

Во-вторых, чем знамениты эти уравнения.

В-третьих, почему их решением так долго занимались великие ученые.

В-четвертых, способы решения квадратных уравнений и их практическая значимость.

Определение квадратного уравнения, его виды:

Квадратным уравнением называется уравнение вида **ax2 +bx + c = 0,**

где **x** - переменная,

a,b,c – некоторые числа, причем, a ≠ 0.

Если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов **b или c равен нулю**, то такое уравнение называют

неполным квадратным уравнением.

Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) ax2 + c = 0, где c ≠ 0;
2) ax2 + bx = 0, где b ≠ 0;
3) ax2 = 0.

Немного из истории:

Квадратные уравнения - это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных, трансцендентных уравнений и неравенств.

- *Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне;*
- *Квадратные уравнения в Индии;*
- *Квадратные уравнения у ал-Хорезми;*
- *Квадратные уравнения в Европе XIII- XVII вв.*

Разложение левой части уравнения на множители:

Пример:

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$3x^2 + 7x - 3x - 7 = 0$$

$$x(3x + 7) - (3x + 7) = 0$$

$$(3x + 7)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1.$$

Метод выделения полного квадрата (классический метод).

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

Для этого запишем выражение x^2 + 6x в следующем виде:

$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 2 \bullet x \bullet 4 - 9$.

$$x^2 + 2 * x * 4 + 4^2 - 4^2 - 9.$$

$$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 4^2 - 9.$$

$$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 16 - 9.$$

$$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 25.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 4^2. Имеем:

$$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 25. \qquad (x + 4)^2 - 25 = 0.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 4)^2 - 25 = 0,$$

$$(x + 4)^2 = 25,$$

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{25},$$

$$x + 4 = \pm 5$$

$$x = -4 + 5$$

$$x = 1 \qquad x_1 = 1$$

Решение квадратных уравнений по формуле с четным коэффициентом.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$a = 1,\ b = p \text{ и } c = q.$$

$$x_{1,2} = -к \pm \sqrt{к^2 - ac}$$

когда p — четное число.

Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0$

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

$$3x^2 + 2 \times 2x - 7 = 0,$$

$$D = k^2 - ac,$$

$$D = 2^2 - 3 \times (-7) = 4 + 21 = 25,$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a},$$

$$x_{1.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{-2 \pm 5}{3},$$

$$x_1 = \frac{-2+5}{3} = \frac{3}{3} = 1, x_2 = \frac{-2-5}{3} = \frac{-7}{3}.$$

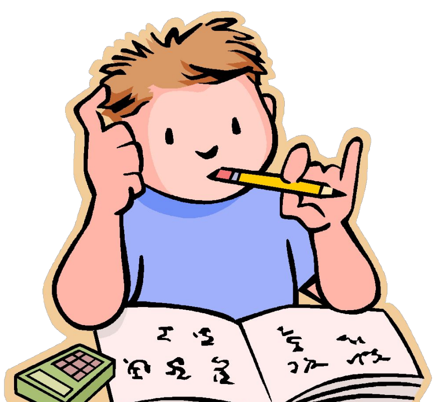
$$x = 1, x = -\frac{7}{3}$$

Теорема Виета.

А) $x^2 – 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$,
так как $q = 2 > 0$ и $p = - 3 < 0$;
$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = - 7$ и $x_2 = - 1$,
так как $q = 7 > 0$ и $p= 8 > 0$.

Б) $x^2 + 4x – 5 = 0$; $x_1 = - 5$ и $x_2 = 1$,
так как $q= - 5 < 0$ и $p = 4 > 0$;

$x^2 – 8x – 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = - 1$,
так как $q = - 9 < 0$ и $p = - 8 < 0$.



Решение уравнений способом «переброски»

квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где, $a \neq 0$.

Умножая обе его части на, а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильно данному.

Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

При этом способе коэффициент, а умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски».

Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

2) Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ (2).

Решение квадратных уравнений через дискриминант.

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$ – дискриминант

1) $D > 0$, два корня $$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

2) $D = 0$, единственный корень $$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) $D < 0$, корней нет.

Пример:

$$3x^2 + 4x - 7 = 0,$$

а=3, в=4, с=-7,

$$D = b^2 - 4ac,$$

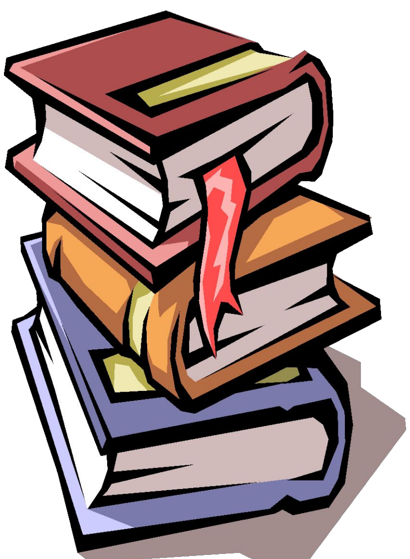
$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm 10}{6},$$

$$x_1 = \frac{-4+10}{6} = 1, \ x_2 = \frac{-4-10}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}.$$

$$x = 1, x = -\frac{7}{3}$$



,если

Выделение полного квадрата двучлена

$$x^2 + 2px + q = 0$$

$$x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = 0$$

$$(x + p)^2 - p^2 + q = 0$$

$$(x + p)^2 = p^2 - q$$

$$x + p = \pm\sqrt{p^2 - q}$$

$$p^2 - q \geq 0 \quad x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0$

$$\frac{3x^2 + 4x - 7 = 0}{3}$$

$$x^2 + 2 \times \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} = 0$$

$$(x + \frac{2}{3})^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$$

$$(x + \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} + \frac{7}{3}$$

$$(x + \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} + \frac{21}{9}$$

$$(x + \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$$

$$x + \frac{2}{3} = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$x + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} x + \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$x = 1, x = -\frac{7}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}$$

Графическое решение квадратного уравнения.

$x^2 + px + q = 0$, $x^2 = - px - q$.

Графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат.

График второй зависимости – прямая.

Возможны следующие случаи:

- *прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;*
- *прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;*
- *прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.*

Пример:

Решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$

прямую $y = 3x + 4$.

Прямая и парабола пересекаются

в точках А и В

с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

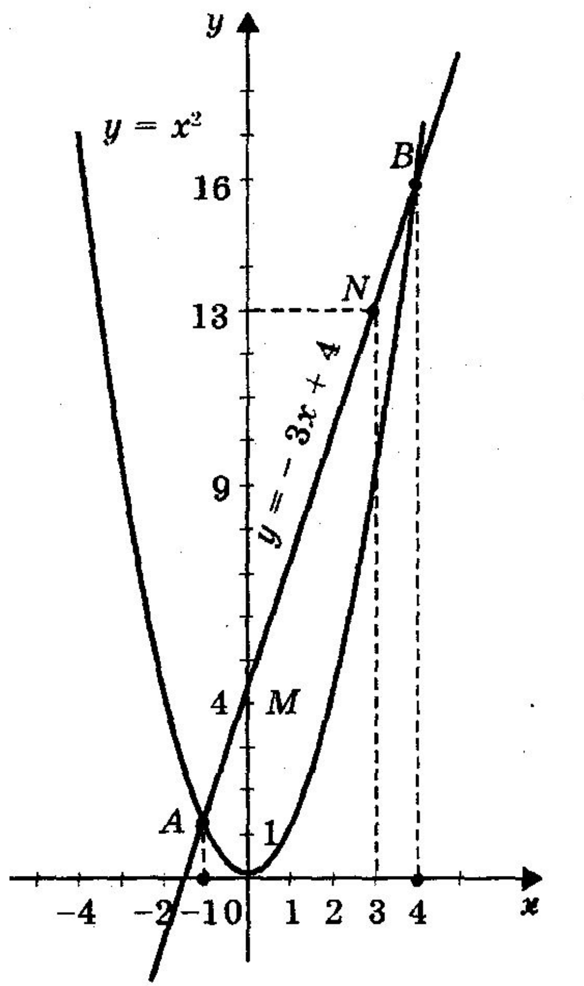


Рис. 2

Решим графически уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$.

$x^2 = 2x - 1$.

Построим параболу $y = x^2$

прямую $y = 2x - 1$.

Прямая и парабола пересекаются

в точке А с абсциссой $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

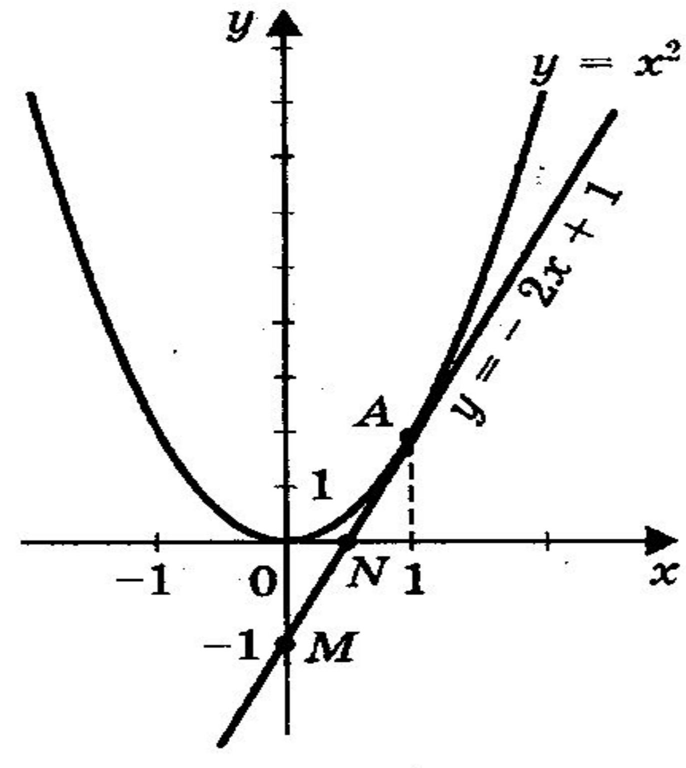


Рис. 3

Решим графически уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$

$x^2 = 5x - 5$.

Построим параболу $y = x^2$

прямую $y = 2x - 5$.

Прямая и парабола не имеют точек пересечения,

т.е. данное уравнение корней не имеет.

Ответ.

Уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ корней не имеет.

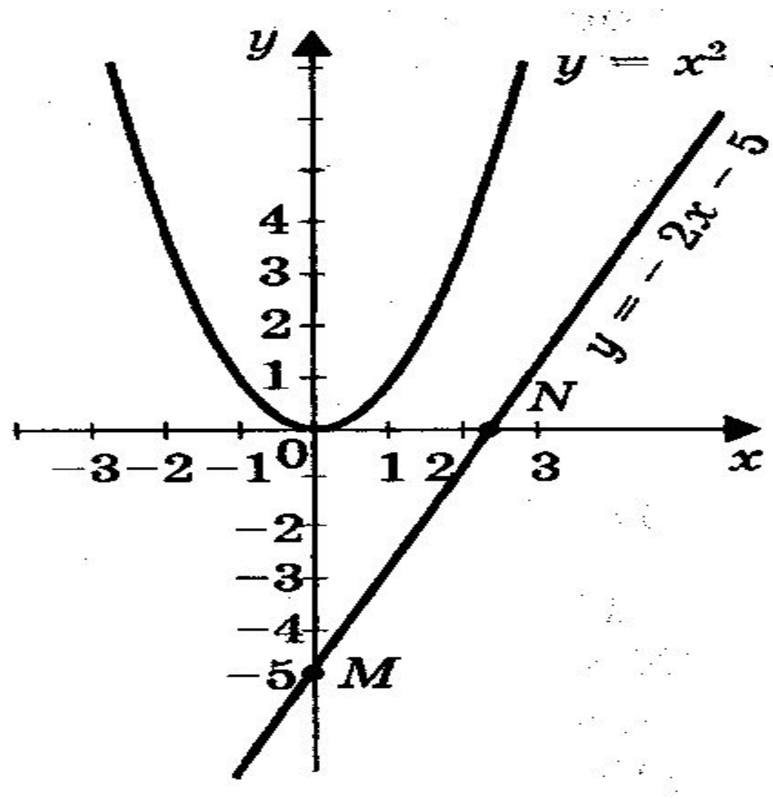


Рис. 4

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

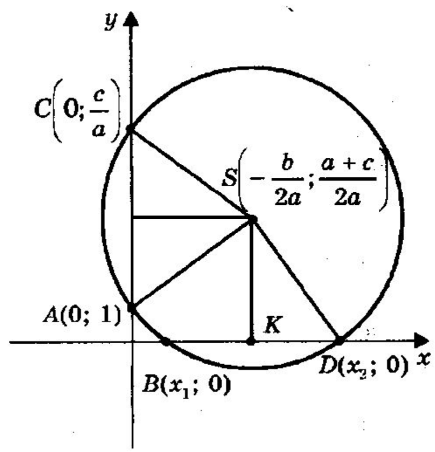
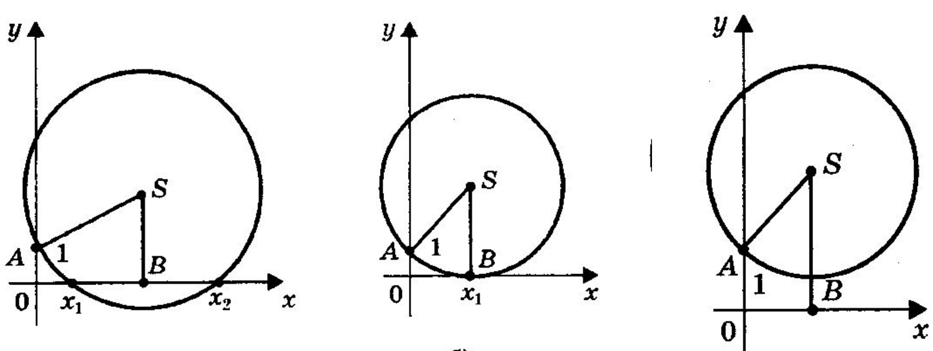


Рис. 5

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

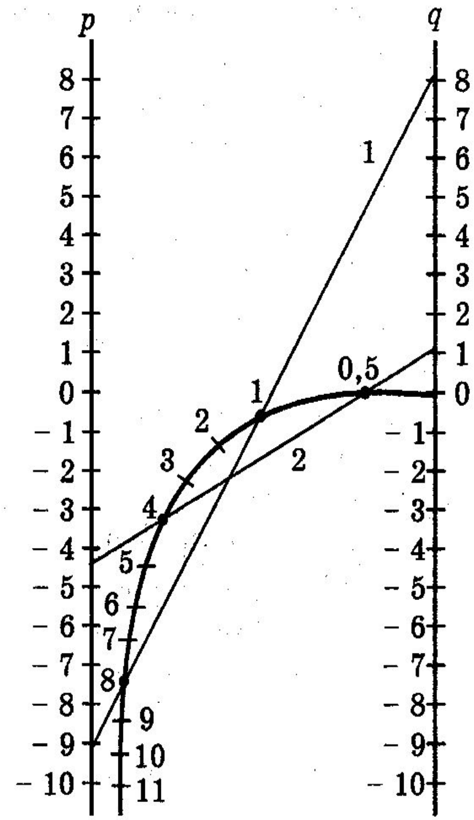
$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$$



а) б) в)

Рис. 6

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.



1)Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$

2)Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$z^2 - 4{,}5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5.$

3) Для уравнения

$z^2 - 25z + 66 = 0$

коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение

$t^2 - 5t + 2{,}64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 4{,}4,$

откуда $z_1 = 5t_1 = 3{,}0$ и $z_2 = 5t_2 = 22{,}0$

Геометрический способ решения квадратных уравнений

$x^2 + 10x = 39.$

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39»

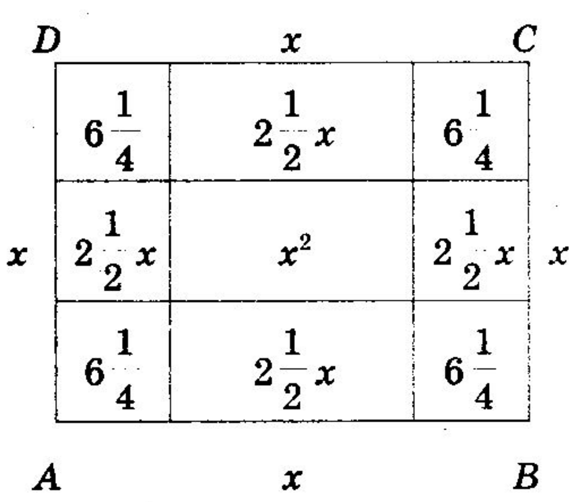


Рис. 15

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

Заключение:

Уравнения – язык алгебры, квадратные уравнения – это фундамент, на котором построено величественное здание алгебры. Изученные способы решения квадратных уравнений будут применяться и при дальнейшем изучении математики, при решении уравнений, сводящихся к решению квадратных.
В ходе выполнения своей работы я считаю, что с поставленной целью и
задачами я справилась, мне удалось обобщить и систематизировать изученный
материал по выше указанной теме.
Проанализировав все новые способы решения квадратных уравнений, я увидела, что нельзя однозначно сказать, какой именно метод наиболее удобен или совершенен. Все они хороши, но каждый в своем конкретном случае.
Я пришла к выводу, что все способы надо иметь в своем арсенале и применять их по мере
необходимости с точки зрения рациональности решения.

Я составила буклет-памятку, в него вошли те способы решения квадратных уравнений, которые не изучаются в школе.
Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них уникален. Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на ОГЭ и ЕГЭ.
Данные буклеты я раздам одноклассникам и ученикам других классов.
Они могут воспользоваться собранными в буклет-памятку материалами для изучения и закрепления рациональных способов решения квадратных уравнений. В дальнейшем я планирую провести опрос, насколько интересна информация, предложенная в буклете, и используют ли они данные способы для решения квадратных уравнений, если да, то какой способ они считают наиболее простым и понятным

Литература:

1. Алимов Ш.А., Ильин В.А. и др. Алгебра, 6-8. Пробный учебник для 6-8 классовой средней школы. - М., Просвещение, 1981.
2. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы.Изд. 57-е. - М., Просвещение, 1990. С. 83.
3. Кружепов А.К., Рубанов А.Т. Задачник по алгебре и элементарным функциям. Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - М., высшая школа, 1969.
4. Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М., Просвещение, 1972.
5. Пресман А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки. - М., Квант, № 4/72. С. 34.
6. Соломник В.С., Милов П.И. Сборник вопросов и задач по математике. Изд. - 4-е, дополн. - М., Высшая школа, 1973.
7. Худобин А.И. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учителя. Изд. 2-е. - М., Просвещение, 1970.

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!