Проект по математике

«Различные способы решения квадратных уравнений»

Фоминой Екатерины
ученицы 8 класса
МБОУ- СОШ «Рязанские сады»
Учитель: Ярославцева Л.Е.
2013-2014

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- Познакомиться с биографией великих математиков, занимавшихся решением квадратных уравнений.
- Найти различные способы решений квадратных уравнений.
- Рассмотреть практическое применение способов решения квадратных уравнений в современной жизни.

ВВЕДЕНИЕ

Человеку, изучающему алгебру, часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три-четыре задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У.У. Сойер (английский математик XX века)

Квадратные уравнения - это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Умение решать уравнения не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит практическим целям.

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кто хочет ограничиться настоящим без знания прошлого, тот никогда его не поймет.

Г.В. Лейбниц

(немецкий математик XVII-XVIII веков)

Древний Вавилон

Найденные древние вавилонские глиняные таблички (около 2 тысяч лет до н.э.) являются самыми ранними свидетельствами об изучении квадратных уравнений. На них изложены методы решения некоторых типов квадратных уравнений.

Примеры квадратных уравнений, решавшихся в Древнем Вавилоне, используя современную алгебраическую запись:

$x^2 + x = \frac{3}{4}$; $\quad x^2 - x = 14\frac{1}{2}$

Индия

Индийский ученый, Брахмагупта (VII век), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой конической форме:

$ax^2 + bx = c$, где $a > 0$. В этом уравнении коэффициенты (кроме a) могут быть и отрицательными.

Брахмагупта

Древняя Греция

Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский (III в.). В его книгах «Арифметика» нет систематического изложения алгебры, однако в них содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений различных степеней. При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

СРЕДНЯЯ АЗИЯ

Основоположником алгебры считают среднеазиатского математика Мухаммед бен Муса аль - Хорезми (787 – 850 г. г.).

Аль-Хорезми написал сочинение, которое по-арабски называется «Китаб аль-джебр валь-мукабала» . Это сочинение оказало большое влияние на развитие математики в Европе, а само слово «аль-джебр», входившее в название книги, постепенно стало названием науки - алгебра.

Мухаммад ибн Муса Хорезми (783 — ок. 850).

1) «Квадраты равны корням», т.е. $ax^2 = bx$.

2) «Квадраты равны числу», т.е. $ax^2 = c$.

3) «Корни равны числу», т.е. $bx = c$.

4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax^2 + c = bx$.

5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax^2 + bx = c$.

6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax^2$.

ЕВРОПА

Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. в «Книге абака» итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Он первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Леонард Фибоначчи

Франсуа Виет (1540-1603) первым догадался обозначать буквами не только неизвестные, но и коэффициенты при них. Это скромное, казалось бы, новшество внесло огромный вклад в развитие математики. Ведь если не использовать букв для обозначения коэффициентов квадратного уравнения, то записать даже несложную формулу для его решения будет довольно трудно. Недаром Виета часто называют «отцом алгебры».

Франсуа Виет

ЛЮДИ, БЛАГОДАРЯ КОТОРЫМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИНИМАЕТ СОВРЕМЕННЫЙ ВИД



Декарт *Жиррар* *Ньютон*

ЧТО ТАКОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ?

- ***Квадратное уравнение*** – уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x- переменная, a,b и c-некоторые числа, причем, $a \neq 0$.

- **Приведенные квадратные уравнения** – это уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, в котором старший коэффициент $a=1$.

- Если в квадратном уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $b = 0$;

2) $ax^2 + bx = 0$, где $c = 0$;

3) $ax^2 = 0$, где $b = c = 0$.

СПОСОБЫ РЕШЕНИЙ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1 СПОСОБ: РАЗЛОЖЕНИЕ ЛЕВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0$

$x(x - 2) + 12(x - 2) = 0$

$(x-2)(x+12) = 0$

$x - 2 = 0$ или $x + 12 = 0$

$x = 2$ или $x = -12$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -12$

- Этот метод не всегда удобен, т.к. не всегда удается применить способ группировки.

2 *СПОСОБ: ВЫДЕЛЕНИЕ КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА.*

Цель метода - привести уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению. В этом нам помогут формулы сокращенного умножения, а именно, квадратов суммы и разности:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- *Этот метод применим для любых квадратных уравнений, но очень громоздкий, поэтому не всегда удобен. Используется для доказательства формулы корней квадратного уравнения и при решении более сложных задач.*

ПРИМЕР 1

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = 0$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = 0$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}$

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$

$x - \frac{5}{6} = -\sqrt{\frac{49}{36}}$ или $x - \frac{5}{6} = \sqrt{\frac{49}{36}}$

$x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6}$ или $x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

$x = -\frac{1}{3}$ или $x = 2$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$

3 СПОСОБ: РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛЕ.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Число корней зависит от знака дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Так как а ≠ 0, то $4a^2 > 0$*, поэтому знак этой дроби зависит от знака её числителя.*

D =b² - 4ac *- дискриминант квадратного уравнения («дискриминант» по-латыни - различитель).*

- ***Если D > 0, то 2 корня:***

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

- ***Если D = 0, то 1 корень:***

  $$x = \frac{-b}{2a}$$

- ***Если D < 0, то корней нет.***

Пример 1:

$12x^2 + 7x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1 > 0$

Значит, 2 корня.

$\xi\overline{\square} = \xi\overline{1} = 1$

$$x_1 = \frac{-\square + \xi\overline{\square}}{2\square} = \frac{-7+1}{2 \cdot 12} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-\square - \xi\overline{\square}}{2\square} = \frac{-7-1}{2 \cdot 12} = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$

Пример 2:

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$D = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0,$

Зн, 1 корень.

$$\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

Ответ: $x = 6$

Пример 3:

$7x^2 - 25x + 23 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 625 - 644 = -19 < 0$, значит, корней нет.

Ответ: корней нет

Если коэффициент b = 2k – четное число, то уравнение примет вид:

$ax^2 + 2kx + c = 0.$

$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$

Обозначим через $D_1 = k^2 - ac$.

Если $D_1 \geq 0$, то

$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, т. е.

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$.

Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

- Этой формулой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений, у которых второй коэффициент является четным числом.

Пример 4:

$9x^2 - 14x + 5 = 0$

$D_1 = k^2 - ac = 49 - 45 = 4$

$\sqrt{D_1} = \sqrt{4} = 2$

$x_1 = \frac{7+2}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$x_2 = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{9}$

4 СПОСОБ: РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМЫ ВИЕТА.

Теорема: *Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е.*

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

По коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней:

Если сводный член q > 0, то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p.

Если p > 0 (- p < 0) , то оба корня отрицательны, если p < 0 (- p > 0), то оба корня положительны.

Если свободный член q < 0, то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если p < 0, или отрицателен, если p > 0.

Пример: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x_1 \cdot x_2 = 12$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = 4.$$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = 4.$

- ***Теорема Виета позволяет в ряде случаев находить корни приведенного квадратного уравнения без использования формулы корней - подбором. Но корни возможно подобрать только в том случае, если дискриминант D .***
- ***По теореме, обратной теореме Виета, можно проверять, правильно ли найдены корни квадратного уравнения.***

5 СПОСОБ: РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ «ПЕРЕБРОСКИ».

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a > 0$$

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

Замена: $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$

$$y^2 + by + ac = 0$$

$$y_1 \cdot y_2 = ac;$$

$$y_1 + y_2 = -b$$

$$x_1 = \frac{y_1}{a}; \quad x_2 = \frac{y_2}{a}.$$

- ***Метод хорош для квадратных уравнений с “удобными” коэффициентами. В некоторых случаях позволяет решить квадратное уравнение устно.***

ПРИМЕР 1:

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$,

«перебросим» коэффициент «2» к свободному члену, и сделав замену, получим:

$y^2 - 11y + 30 = 0$

$y_1 \cdot y_2 = 30$

$y_1 + y_2 = 11$

$y_1 = 5; \quad y_2 = 6$

$x_1 = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$x_2 = \frac{6}{2} = 3$

Ответ: $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 3$

6 *СПОСОБ: СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ*.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 0$.

1. Если a + b + c = о (т. е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$ (по теореме Виета)
2. Если $a - b + c = 0$, (или $b = a + c$, т.е. второй коэффициент равен сумме 1-го и 3-го коэффициентов), то $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$

- *Этот метод удобно применять, когда коэффициенты квадратного уравнения – большие числа.*

Пример 1:

$345x^2 - 137x - 208 = 0$

$a + в + c = 345 - 137 - 208 = 0$

$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{208}{345}$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{208}{345}$

Пример 2:

$132x^2 + 247x + 115 = 0$

$b = a + c$

$247 = 132 + 115$

$x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{115}{132}$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{115}{132}$

В 2013-2014 учебном году на олимпиаде можно предложить такое уравнение:

$2013x^2 - 2014x + 1 = 0$

$a + b + c = 2013 - 2014 + 1 = 0,$

значит, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2013}$

или составить такое уравнение:

$2013x^2 + 2014x + 1 = 0$

$b = a + c$, т.е.

$2014 = 2013 + 1$

значит, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2013}$

7 СПОСОБ: ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Решим графически уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Можно свести уравнение к приведенному

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 = -px - q,$$

построить графики функций:

параболу $y = x^2$ и прямую $y = -px - q$.

Абсциссы точек пересечения – есть решения данного уравнения.

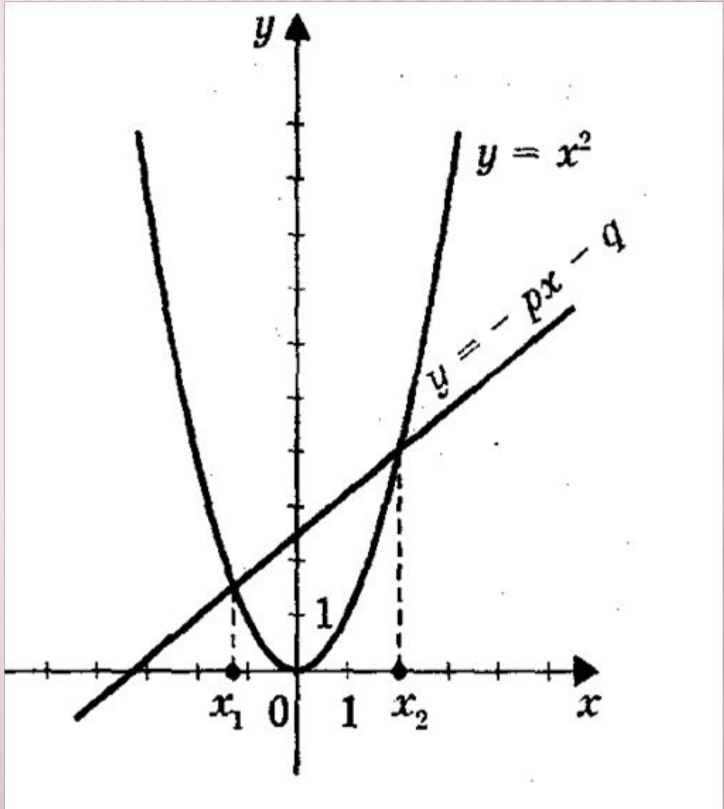


Рис. 1

ВОЗМОЖНЫ СЛЕДУЮЩИЕ СЛУЧАИ:

- Прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения.

- Прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т. е. уравнение имеет одно решение.

- Прямая и парабола не имеют общих точек, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Пример:

$x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 = x + 2$

Строим графики функций

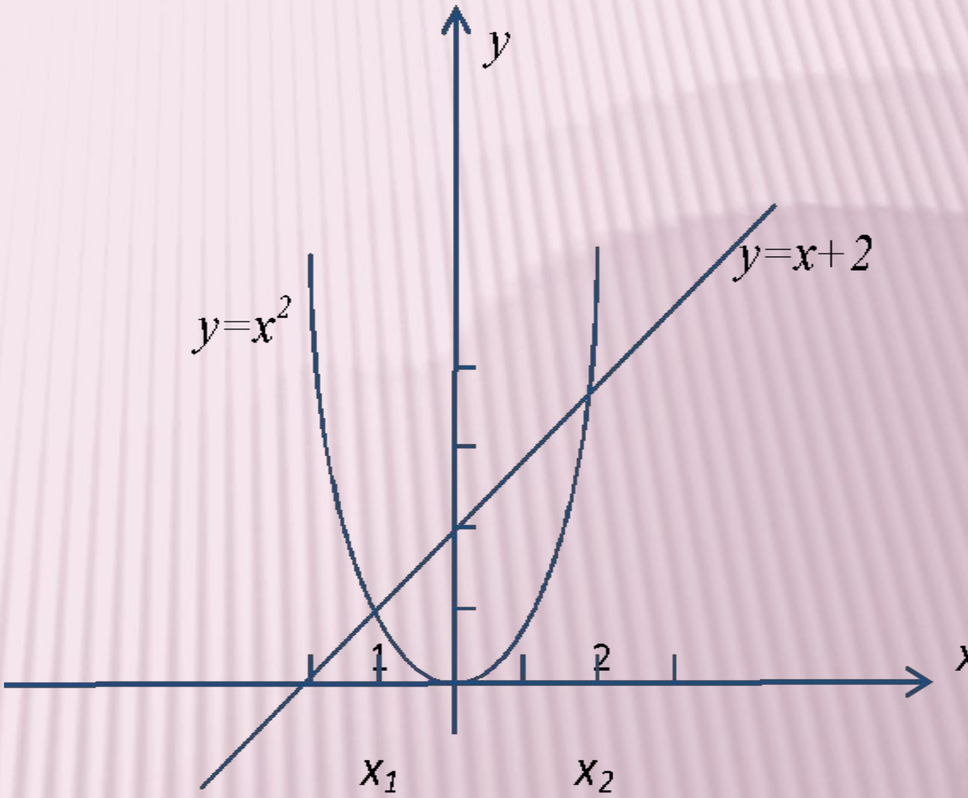
$y = x^2$ и $y = x + 2$

1) $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	2

2) $y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0



$x_1 \approx -1$

$x_2 \approx 2$

Ответ: $x_1 \approx -1$; $x_2 \approx 2$

❖ Применяя графический метод, не всегда можно найти точное значение корней. Поэтому этот метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.

8 СПОСОБ: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ (ОСНОВАН НА ВЫДЕЛЕНИИ ПОЛНОГО КВАДРАТА).

Решить уравнение $x^2 + 10x = 39$

Строим квадрат со стороной х и на его сторонах – 4 прямоугольника высотой $\frac{10}{4}$.

В углах фигуры построим 4 квадрата со стороной $\frac{10}{4}$.

Подсчитаем площадь получившегося большого квадрата:

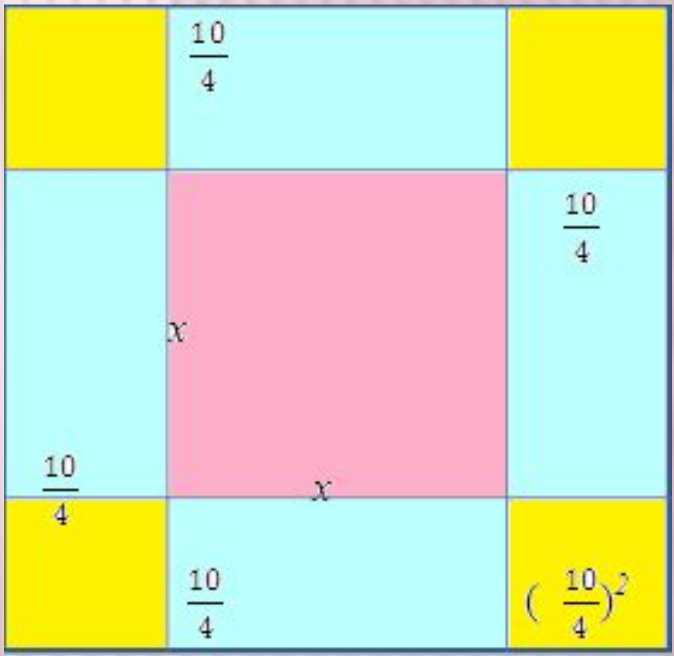
$x^2 + (\frac{10}{4} \cdot x) \cdot 4 + (\frac{10}{4})^2 \cdot 4 = x^2 + 10x + 4 \cdot \frac{100}{16} =$

$= x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$

Значит, сторона большого квадрата равна 8, тогда $x + 2 \cdot \frac{10}{4} = 8$

$x + 5 = 8$

$x = 3$

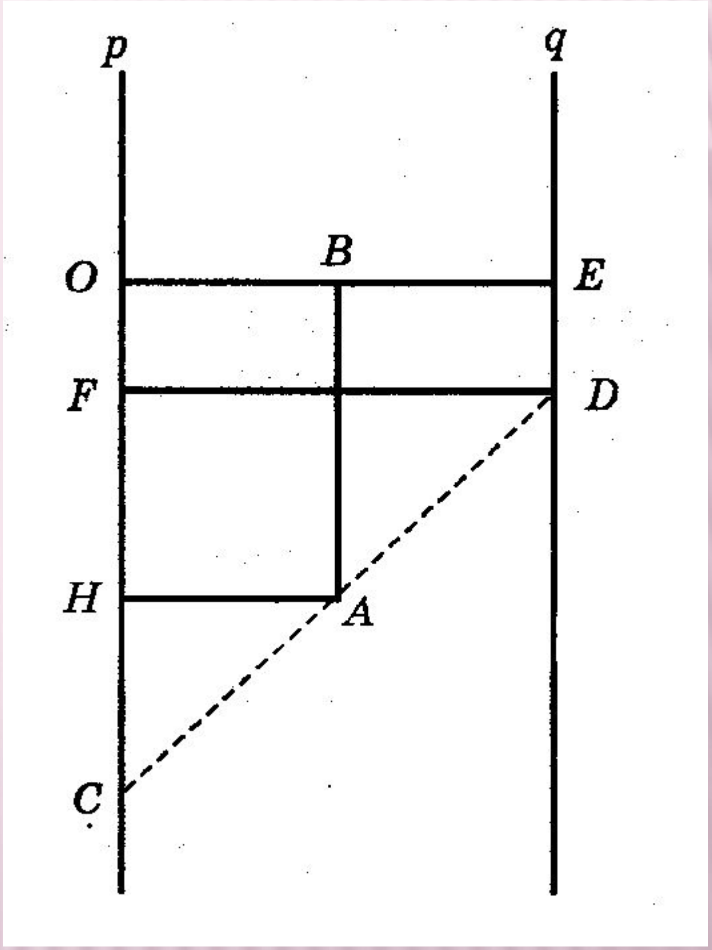


- Геометрический способ использовался в древности, когда не было известно алгебраических способов решения. В современной жизни не находит применения.

9 способ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Номограмма для решения уравнений вида $z^2 + pz + q = 0$ позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения. Криволинейная шкала номограммы построена по формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z} \qquad AB = -\frac{z^2}{1+z}$$



Полагая OC = p, ED = q, OE = a (все в см), из $\Delta CAH \sim \Delta CDF$ получим пропорцию:

$$\frac{CF}{CH} = \frac{DF}{AH} \qquad \frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}$$

$$\frac{p-q}{p+\frac{z^2}{1+z}} = \frac{a}{\frac{a}{1+z}}$$ откуда после упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причём буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

ПРИМЕРЫ :

Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма даёт корни $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$

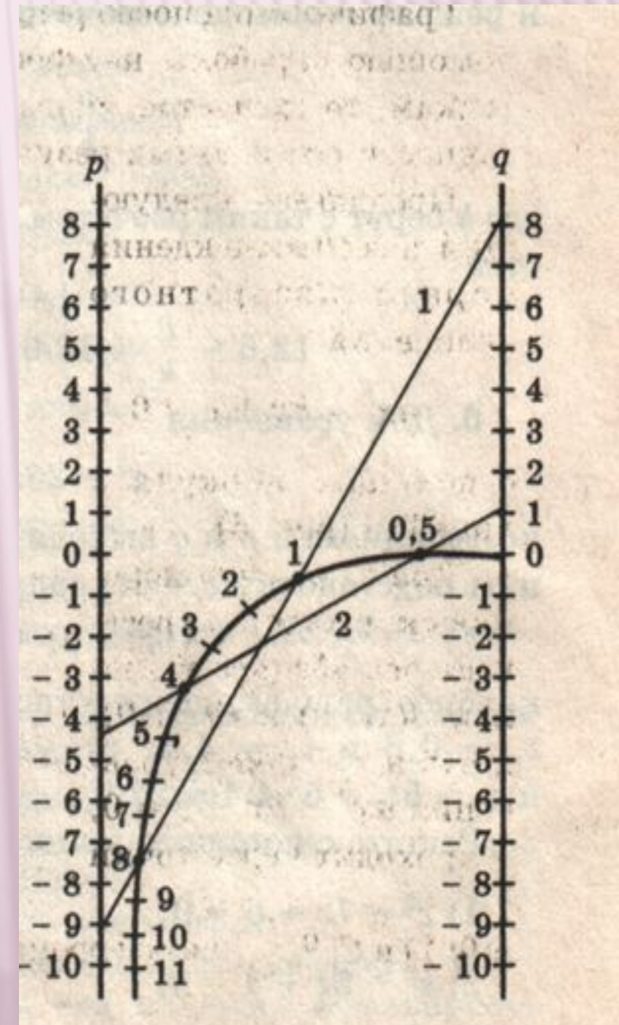
Решим с помощью номограммы уравнение

$$2z^2 - 9z + 2 = 0$$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$$z^2 - 4,5z + 1 = 0$$

Номограмма даёт корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$

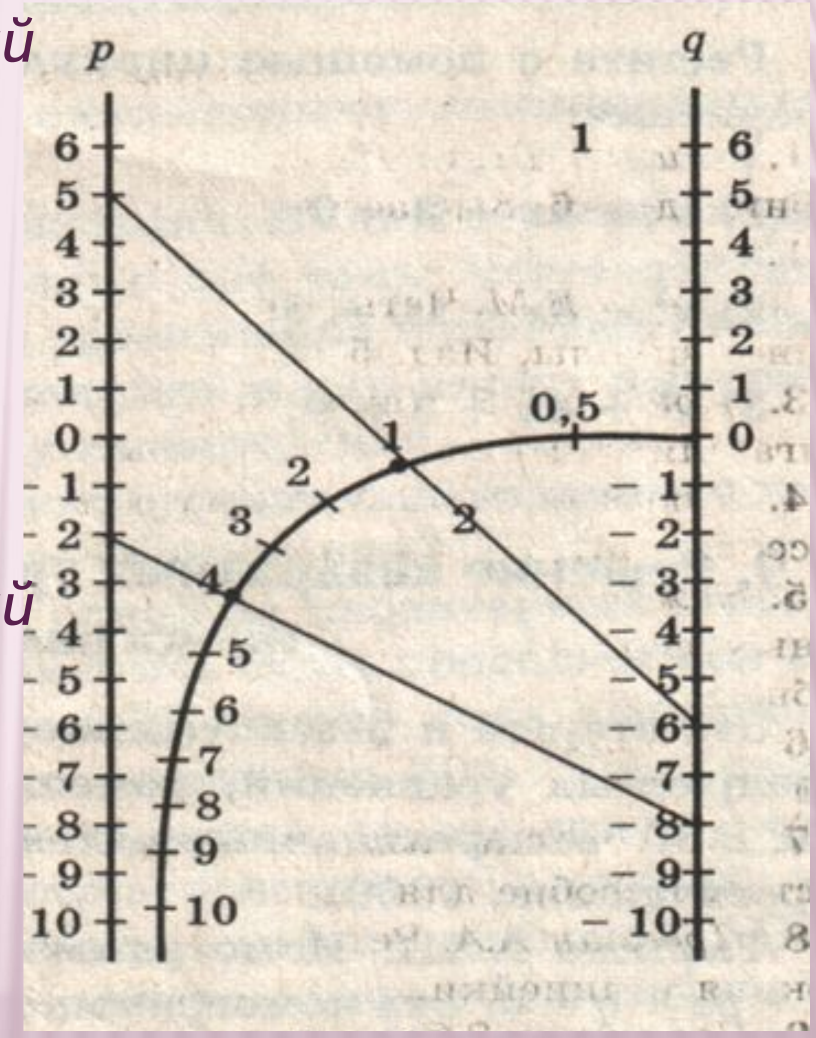


Для уравнения $z^2 + 5z - 6 = 0$ *номограмма даёт положительный корень* $z_1 = 1$, *а отрицательный корень находим, вычитая положительный корень из* $-p$, *т. е.*

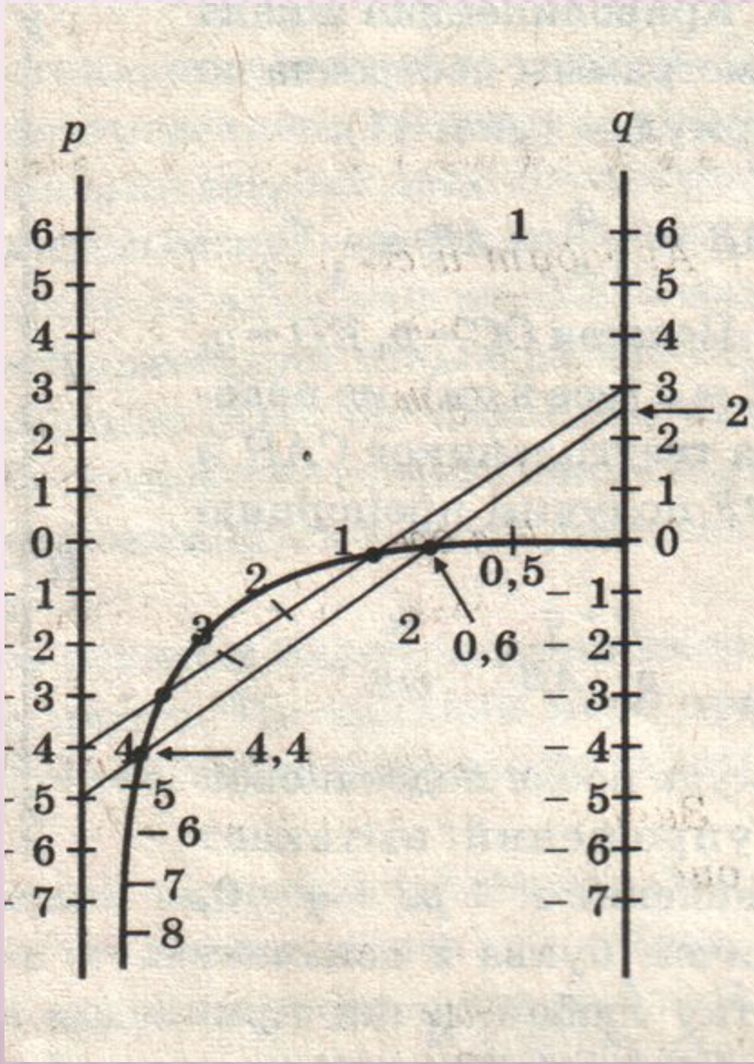
$z_2 = - p - 1 = - 5 - 1 = -6.$

Для уравнения $z^2 - 2z - 8 = 0$ *номограмма даёт положительный корень* $z_1 = 4$, *отрицательный равен* $z_2 = - p - z_1 = 2 - 4 = -2.$

Если оба корня отрицательные, то делают замену $z_1 = -t$.



Для уравнения $z^2 + 4z + 3 = 0$, оба корня которого ($z_1 \cdot z_2 = 3$; $z_1 + z_2 = -4$) отрицательные числа, берём $z_1 = -t$ и находим по номограмме два положительных корня t_1 и t_2 уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$, это $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$, а затем $z_1 = -t_1 = -1$ и $z_2 = -t_2 = -3$.



Если коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, то выполняют подстановку $z = kt$ и решают с помощью номограммы уравнение $t^2 + \frac{p}{k}t + \frac{q}{k^2} = 0$, где k берут с таким расчетом, чтобы имели место неравенства $-12,6 \le \frac{p}{k} \le 12,6$

$$-12,6 \le \frac{q}{k^2} \le 12,6$$

Для уравнения $z^2 - 25z + 66 = 0$ коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим:

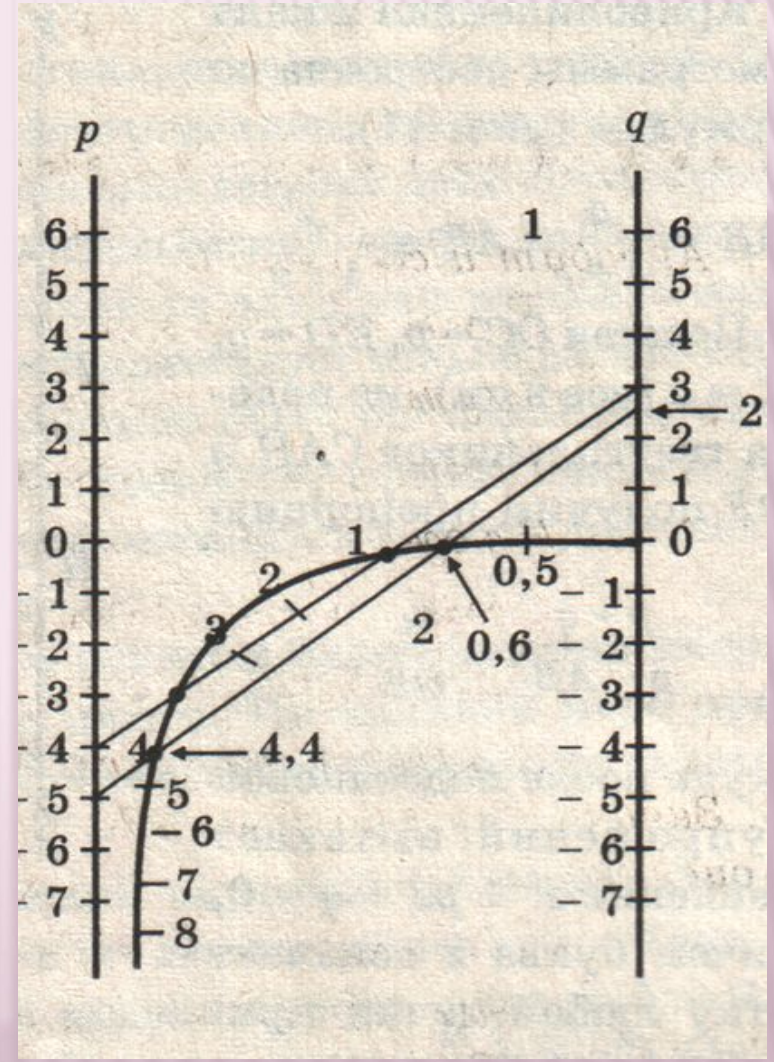
$t^2 - 5t + 2,64 = 0$,

которое решаем посредством номограммы и получим:

$t_1 = 0,6$ и $t_2 = 4,4$

откуда $z_1 = 5t_1 = 5 \cdot 0,6 = 3$

$z_2 = 5t_2 = 5 \cdot 4,4 = 22$



Заключение

В результате выполнения

работы были изучены следующие способы:

1.*Разложение левой части уравнения на множители.*

2. *Выделение квадрата двучлена.*

3.*Решение квадратных уравнений по формуле.*

4.*С помощью теоремы Виета.*

5.*Решение квадратных уравнений способом «переброски».*

6.*Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

7.*Графический способ решения квадратных уравнений.*

8. *Геометрический метод.*

9.*Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.*

Каждый из изученных способов имеет как положительные стороны, так и недостатки. Но выполненная работа показывает, что использование различных способов при решении квадратных уравнений является важным звеном в изучении математики, развивает внимание и сообразительность. Так же не менее важно умение правильно выбирать рациональный способ решения конкретно для каждого уравнения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1) **Макарычев Ю.Н. Алгебра: Учебник для 8 кл. общеобразовательных учреждений // 15-е издание, доработанное. М.: Просвещение, 2010.**

2) Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы // М.: Дрофа, 2001.

3) Глейзер Г.И. История математики в школе VII - VIII классы. Пособие для учителей // М.: Просвещение, 1997.

4) Дроздов В. Квадратное уравнение: варианты решения.

7) Плужников И. Десять способов решения квадратных уравнений. Математика // Приложение к газете «Первое сентября» №40/2000. стр.24 -31.

8) Шаталова С. Способы решения квадратных уравнений // «Математика в школе» №42/2004.