

*Школа КГУ НИСЦ РО «Восток» для
одарённых детей управления
образования ВКО
г. Усть-Каменогорск*

***Решение
иррациональных
уравнений***

**Михальчук Н.Л.,
учитель
математики
высшей категории**

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, а также под знаком возведения в дробную степень. Например,

$$\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\sqrt[3]{x+5} - 12\sqrt{x-4} = 5$$

$$3x^{\frac{4}{7}} - \sqrt{x+8} = 15$$

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- **возведение в степень обеих частей уравнения;**
- **введение новой переменной;**
- **разложение на множители.**

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- ✓ **умножение на сопряженное;**
 - **переход к уравнению с модулем;**
 - **метод «пристального взгляда»
(метод анализа уравнения);**
- ✓ **использование монотонности функции.**

$$\sqrt[4]{x + 3} + 2 = 0$$

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

- 1) Если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно записать так, чтобы в одной части знака равенства оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилась рациональное уравнение.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

- 2) Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.**

Пример №1 $\sqrt{3x - 2} = x$

Пример №1 $\sqrt{3x - 2} = x$

$$3x - 2 = x^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1=1 \quad x_2=2$$

Проверка: $x = 1: \sqrt{3 * 1 - 2} = 1$

$$1=1$$

$x = 2: \sqrt{3 * 2 - 2} = 2$

$$2=2$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2$

Пример №2 $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$

Пример №2 $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$

$$x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3.$$

Проверка: 1) $x = 0$: $\sqrt{0 + 5 * 0 + 1} = 2 * 0 - 1$

$$1 \neq -1$$

2) $x = 3$: $\sqrt{9 + 15 + 1} = 6 - 1$

$$5 = 5$$

Ответ: $x = 3$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Пример №3 Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$

Пример №3 Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4 - x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 19 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\underline{x = 5 - \sqrt{6}}$$

$$x = 5 + \sqrt{6} > 4 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $x = 5 - \sqrt{6}$.

Пример№4

Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x = -1 < 0 & \text{ — посторонний корень} \\ x = 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример №5 Решите уравнение

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$$

$$3x-1 = 9 + 6\sqrt{x-2} + x-2$$

$$3x-1 = 7 + x + 6\sqrt{x-2}$$

$$2x-8 = 6\sqrt{x-2}$$

$$x-4 = 3\sqrt{x-2}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9(x-2)$$

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 * 1 * 34 = 289 - 136 = 153$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{153} = \sqrt{9 * 17} = 3\sqrt{17}$$

$$x = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2} \in \text{ОДЗ}$$

$$x = \frac{17 - 3\sqrt{17}}{2} < 4 \notin \text{ОДЗ} - \text{посторонний корень}$$

$$\text{Ответ: } \frac{17+3\sqrt{17}}{2}$$

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

$$(x - 1)^3 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 0; 2.$

Пример №7 Решите уравнение

$$\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5} = 1$$

$$(\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5})^3 = 1^3$$

$$5-x + 3\sqrt[3]{(5-x)^2} * \sqrt[3]{x+5} + 3\sqrt[3]{5-x} * \sqrt[3]{(x+5)^2} + x+5 = 1$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}(\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5}) = -9$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)} * 1 = -9$$

$$\sqrt[3]{(5-x)(5+x)} = -3$$

$$(5-x)(5+x) = -27$$

$$25 - x^2 = -27$$

$$x^2 = 52$$

$$x = \pm 2\sqrt{13}$$

Ответ: $x = \pm 2\sqrt{13}$.

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = (x - 1)^2$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2)$$

$$-x(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)) = 0$$

$$x = 0 - \text{постороний корень} \quad x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{4}$$

Метод введения новой переменной

Данный метод применяется в том случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл принять это выражение за новую переменную и решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом найти исходную величину.

Пример №9 Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0 \quad x \geq 0$$

$$\sqrt[8]{x} = y, \quad y \geq 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$\underline{y = 1}$$

$y = -2 < 0$ – посторонний корень

$$y = 1, \quad \sqrt[8]{x} = 1, \quad \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

Пример №10 Найдите сумму корней уравнения:

$$(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$$

$$x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$$

Обозначим $y = \sqrt{x^2 + 5x + 2}$, $y \geq 0$ и

перейдем к уравнению

$$y^2 + 2 - 3y = 6$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$y = -1 < 0$ – посторонний корень

$$\underline{y = 4}$$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4$$

$$x^2 + 5x + 2 = 16$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x = -7$$

$$x = 2$$

Проверка: 1) $x = -7$, тогда $\sqrt{(-7)^2 + 5(-7) + 2} = 4$

$$\sqrt{16} = 4; \quad 4 = 4 \quad \text{верно}$$

2) $x = 2$, тогда $\sqrt{2^2 + 5 * 2 + 2} = 4$

$$\sqrt{16} = 4; \quad 4 = 4 \quad \text{верно}$$

Ответ: -5 .

Пример №11 Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = a, \quad a > 0$$

$$a - 2 * \frac{1}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$a = -1 < 0$ – посторонний корень

$$\underline{a = 2}$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2$$

$$2x + 1 = 4(x - 1)$$

$$2x = 5 \Rightarrow x = 2,5$$

Ответ: $x = 2,5$.

Метод разложения на множители

Для решения иррациональных уравнений данным методом следует пользоваться правилом:

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей, входящих в произведение; равен нулю; а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $\sqrt{f(x)} \cdot q(x) = 0$ равносильно совокупности

$$1) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ q(x) - \text{определена} \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} q(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right.$$

Пример №12

Решите уравнение: $(x^2 - 5x - 6) \sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0$

Решение:

$$1) \frac{x+2}{x-5} = 0$$

$$x = -2$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \frac{x+2}{x-5} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, x = -1 \\ x \in (-\infty; -2] \cup (5; \infty) \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; 6\}$

Пример №13

Решите уравнение: $\sqrt{x-3} * x^2 = 4\sqrt{x-3}$

Решение:

$$\sqrt{x-3} * (x^2 - 4) = 0$$

$$1) x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, & x = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Ответ: {3}

Пример №14 Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} - 3\sqrt{x - 3} - 5\sqrt{x - 2} + 15 = 0$$

Решение:

ОДЗ: $x \geq 3$

$$\sqrt{(x - 3)(x - 2)} - 3\sqrt{x - 3} - 5\sqrt{x - 2} + 15 = 0$$

$$\sqrt{x - 3}(\sqrt{x - 2} - 3) - 5(\sqrt{x - 2} - 3) = 0$$

$$(\sqrt{x - 3} - 5)(\sqrt{x - 2} - 3) = 0$$

1) $\sqrt{x - 3} = 5$

$x = 28$

2) $\sqrt{x - 2} = 3$

$x = 11$

Ответ: {11;28}

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- **метод «пристального взгляда»
(метод анализа уравнения);**
- **использование монотонности функции;**
- **переход к уравнению с модулем.**

Метод анализа уравнения

Свойства корней, которые используют при решении уравнений данным способом:

1. Все корни четной степени являются арифметическими, то есть если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения.

3. Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$

являются возрастающими в своей области определения.

Пример №15 $\sqrt{x+1} + \sqrt{20} = \sqrt{5}$

$$\sqrt{x+1} = -\sqrt{5}$$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

Пример №16 $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+9} = 4$

$$\sqrt{x^2+4} \geq 2$$

$$\sqrt{x^2+9} \geq 3$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №17 $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 5} = 1$

$$x^2 + 1 < 2x^2 + 5$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №18 $\sqrt{4 - x} - \sqrt{x - 6} = 2$

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Уравнение не имеет решений.

Метод использования монотонности функции

Использование монотонности функций, входящих в уравнение, нередко значительно упрощают техническую часть решения.

Сформулируем два свойства монотонных функций:

1. Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.
2. Разность возрастающей и убывающей (соответственно, убывающей и возрастающей) функций – функция возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Метод использования монотонности функций

Теорема о корне

Пусть $y=f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x)=a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Пример №19 Решите уравнение: $\sqrt{37x + 12} - \sqrt{31 - 6x} = 2$.

Ответ: {1}

Пример №20

Решите уравнение: $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 8$.

Ответ: {10}

Пример №21

Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{4x - 1} + \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[9]{x - 6} = 6.$$

Ответ: {7}

Метод перехода к уравнению с модулем

Пример №22 Найти наибольший корень уравнения

$$\sqrt{x^2 + 12x + 36} = x^2 - 36$$

$$\sqrt{(x + 6)^2} = x^2 - 36$$

$$|x + 6| = x^2 - 36$$

$$1) \begin{cases} x + 6 < 0 \\ -x - 6 = x^2 - 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x^2 + x - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ x + 6 = x^2 - 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x^2 - x - 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x = -6 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ: наибольший корень уравнения $x = 7$.

Пример №23

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = 2$$

$$|\sqrt{x+1}+1| + |\sqrt{x+1}-1| = 2$$

$$\sqrt{x+1}+1 + |\sqrt{x+1}-1| = 2$$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+1}-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2\sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 1 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+1}-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2 = 2 \text{ (верно)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 0)$$

Ответ: $x \in [-1; 0]$

Пример №24

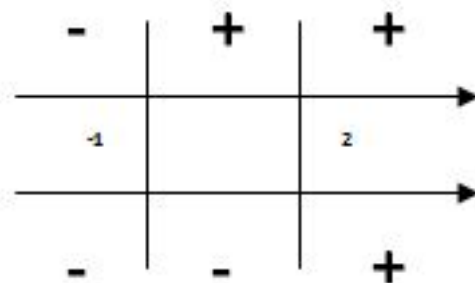
При каких значениях k уравнение имеет два корня?

$$|x + 1| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = k$$

$$|x + 1| + |x - 2| = k$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$



$$\begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 - x + 2 = k \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x + 1 - x + 2 = k \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x + 1 + x - 2 = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x = \frac{1-k}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ k = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{k+1}{2} \end{cases}$$

Условия существования двух корней:

$$\begin{cases} k \neq 3 \\ \frac{1-k}{2} < -1 \\ \frac{k+1}{2} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 3 \\ k > 3 \\ k \geq 3 \end{cases} \Rightarrow k > 3$$

Ответ: при $k > 3$ уравнение имеет два корня.