

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная содержится под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a - действительное число.

К настоящему моменту мы знаем, что:

- Если $|a| \leq 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид $x = \pm \arccos a + 2\pi n$,
- Если $|a| \leq 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$,
или, что то же самое, $x = \arcsin a + 2\pi k$,
 $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$;
- Если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений.

- Решения уравнения $\operatorname{tg}x=a$ для любого значения a имеют вид $x=\operatorname{arctg}a+\pi n$;
- Особо важны частные случаи:

$$\sin x=0, \quad x=\pi n;$$

$$\sin x=1, \quad x=\pi/2+2\pi n;$$

$$\sin x=-1, \quad x=-\pi/2+2\pi n;$$

$$\cos x=0, \quad x=\pi/2+\pi n;$$

$$\cos x=1, \quad x=2\pi n;$$

$$\cos x=-1, \quad x=\pi+2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$).

К простейшим относят обычно и уравнения вида $T(kx+m)=a$, где T – знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $\sin 2x = 1/2$;

$$2x = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^n \pi/12 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}.$$

б) $\cos 3x = -\sqrt{2}/2$;

$$3x = \pm \arccos(-\sqrt{2}/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \pm(\pi - \arccos \sqrt{2}/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \pm(\pi - \pi/4) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \pi/4 + 2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}.$$

B)

$$\operatorname{tg}(4x - \pi/6) = \sqrt{3}/3;$$

$$4x - \pi/6 = \operatorname{arctg}\sqrt{3}/3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};;$$

$$4x - \pi/6 = \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};;$$

$$4x = \pi/6 + \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4x = \pi/3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi/12 + \pi n/4, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2.

Найти те корни уравнения $\sin 2x = 1/2$,
которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в
общем виде: $\sin 2x = 1/2$;

$$2x = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^n \pi/12 + \pi n/2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Далее придадим параметру n
последовательно значения $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$
и подставим эти значения в общую
формулу корней.

Если $n=0$, то $x=(-1)^0 \pi/12+0=\pi/12$,
 $\pi/12 \in [0; \pi]$.

Если $n=1$, то $x=(-1)^1 \pi/12+\pi/2 =-\pi/12+\pi/2=5\pi/12$,
 $5\pi/12 \in [0; \pi]$.

Если $n=2$, то $x=(-1)^2 \pi/12+\pi=\pi/12+\pi=13\pi/12$,
 $13\pi/12 \notin [0; \pi]$.

Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x , которые получаются из общей формулы при $n=3,4,\dots$.

Пусть теперь $n = -1$,
тогда $x = (-1)^{-1} \pi/12 - \pi/2 = -\pi/12 - \pi/2 = -7\pi/12$.

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x , которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \dots$.

На рисунке представлена геометрическая интерпретация проведенных рассуждений.



Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n : $n=0$, $n=1$.

Эти корни таковы: $\pi/12$, $5\pi/12$.

Ответ: $\pi/12$; $5\pi/12$.

№18.2(6)

№18.3(Г)

№18.4(б,в)

№18.13(6)

**Домашнее задание:
№18.2(в), №18.3(а),
№18.4(а, г), №18.13(г),
№18.15(б, в, г).**