

Приложения дифференциальных уравнений

11 класс

Дифференциальные уравнения в физике.

The image displays several mathematical formulas related to probability distributions and differentiation, likely in the context of statistical inference or physics. The formulas are arranged in a collage-like fashion, overlapping and tilted.

Key formulas visible include:

- The Fisher information matrix:
$$\frac{\partial}{\partial \theta} M T(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} T(x) f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} T(x) f(x, \theta) dx$$
- The score function:
$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$$
- The Cramere-Rao lower bound:
$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2} f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(\xi_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \ln f_{a, \sigma^2}(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)}{\sigma^2}$$
- The Fisher information matrix for a normal distribution:
$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \cdot \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) \cdot f(x, \theta) dx$$

Задача 1

Житель Владивостока Вася Дифур очень любит экстрим. Поэтому в один из ветреных осенних дней (несмотря на прямой запрет властей) он решил прогуляться по мосту на остров Русский. Оцените среднюю силу с которой ветер давит на Васю. Примечание: силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости ветра относительно Васи. $F_{\tilde{n}} = -KV$

Известные величины:

V изменятся по следующему закону:

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 0.75T, V = V_0; \\ 0.75T \leq t \leq T, V = \frac{V_0}{5} \left(-256 \frac{t^2}{T^2} + 448 \frac{t}{T} - 187 \right). \end{cases}$$

$$V_0 = 5 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

$$K = 12 \text{ н/м};$$



Решение:

$$1. Y = F_{\text{cp.}} \cdot T;$$

$$F_{\text{cp.}} = \frac{Y}{T};$$

$$2. dY = F_c \cdot dt;$$

$$Y = \int_0^T F_c dt;$$

$$Y = \int_0^T (-k \cdot v) dt;$$

$$Y = -k \left(\int_0^{0,75T} V_0 dt + \int_{0,75}^T \left(\frac{V_0}{5} \left(-256 \frac{t^2}{T^2} + 448 \frac{t}{T} - 187 \right) \right) dt \right)$$

$$Y = -kV_0 \left(\int_0^{0,75T} dt + \frac{1}{5} \int_{0,75}^T \left(-256 \frac{t^2}{T^2} + 448 \frac{t}{T} - 187 \right) dt \right)$$



Расчет:

$$F_{cp.} = -\frac{kV_0}{T} \left(\int_0^{0,75T} dt + \frac{1}{5} \int_{0,75T}^T \left(-256 \frac{t^2}{T^2} + 448 \frac{t}{T} - 187 \right) dt \right);$$

$$F_{cp.} = -\frac{kV_0}{T} \left((0,75T - 0) + \frac{1}{5} \left(-\frac{256}{3T^2} (T^3 - (0,75T)^3) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{448}{2T} (T^2 - (0,75T)^2) - 187(T - 0,75T) \right) \right);$$

$$F_{cp.} = -\frac{kV_0}{5T} \left(\frac{15}{4} T - \frac{148}{3} T + 98T - \frac{187}{4} T \right);$$

$$F_{cp.} = -\frac{kV_0}{5} \left(98 - 43 - \frac{148}{3} \right) = -kV_0 \left(\frac{165 - 148}{15} \right) = -\frac{17}{15} kV_0;$$

$$F_{cp.} = -12 \cdot 5 \cdot \frac{17}{15} \text{H} = -68 \text{H};$$

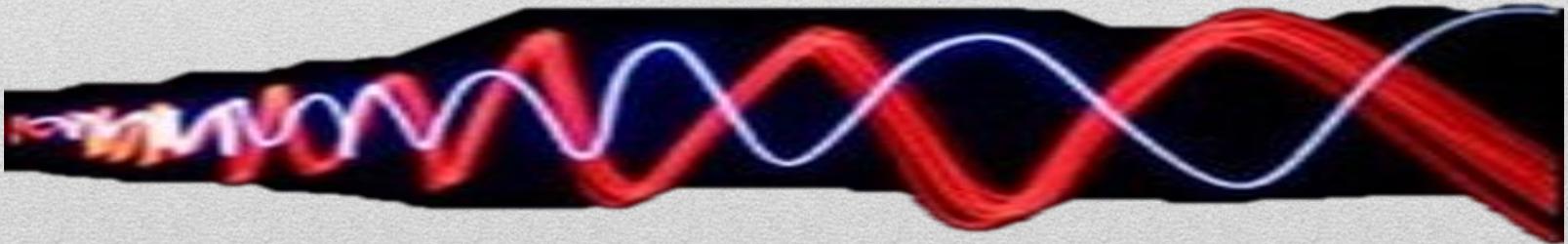
$$F = -kV_0 = -12 \cdot 5 \text{H} = -60 \text{H};$$

Задача 2

Студент ДВФУ по прозвищу True Bot очень любит учиться по ночам. Однако его соседи не разделяют интересов True и предпочитают проводить ночь в компании симпатичных сокурсниц и metal core-а громкостью 120 Дб. Толщина стен общежития всего 10 см, в результате чего True Bot всю ночь “наслаждается” замечательной музыкой. Помогите True Bot-у рассчитать, на сколько должен увеличить толщину стены нанятый им кореец, чтобы громкость музыки в комнате составляла 60 Дб.

Известные данные:

Можно считать, что при прохождении волны (звука) через поглощающую среду (стену) её поток (громкость) - Φ - зависит только от толщины среды и коэффициента поглощения (a)
Принять a равным 2,5.



Решение:

$$-d\Phi = a \cdot \Phi \cdot dx;$$

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -a dx;$$

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Phi} = -a \int_0^x dx;$$

$$\ln \frac{\Phi}{\Phi_0} = -ax;$$

$$\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-ax};$$

$$x = \frac{1}{a} \ln \frac{\Phi_0}{\Phi};$$

Расчет:

$$x = \frac{1}{a} \ln \frac{\Phi_0}{\Phi};$$

$$x = \frac{1}{2,5} \ln \frac{120}{60};$$

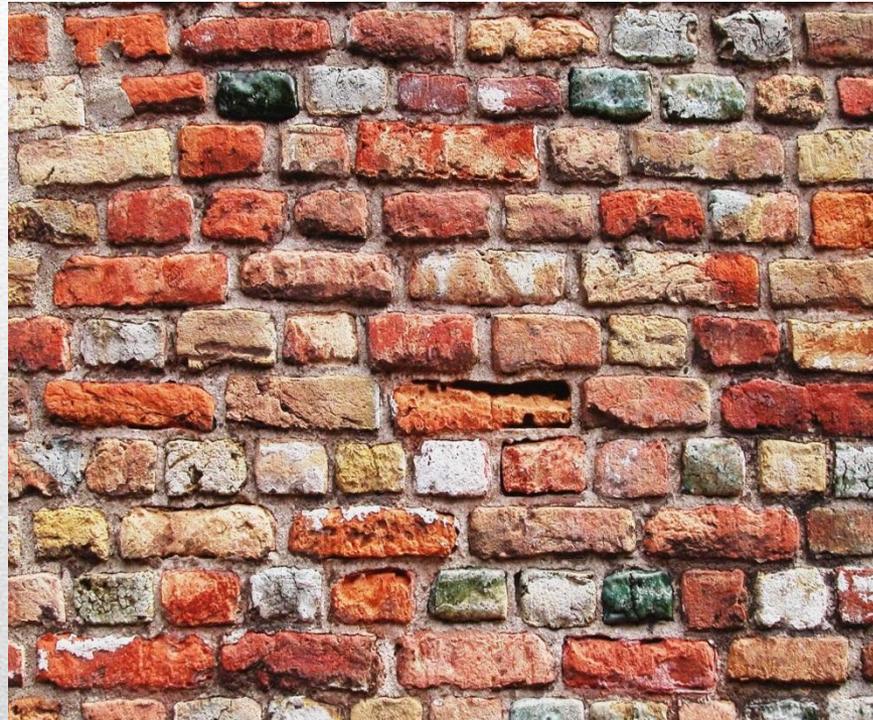
$$x = 0,4 \ln 2;$$

$$x \approx 27,7 \text{ см};$$

$$\Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta x = (27,7 - 10) \text{ см};$$

$$\Delta x = 17,7 \text{ см};$$



Задача 3

Девушка экспериментатора Глюка очень привередлива – она пьет только чай, подогретый ровно до 87 градусов. Обычно Глюк разогревает чай в микроволновке, измеряя температуру высокоточным термометром. Сегодня экспериментатор забыл градусник на работе, однако сумел вспомнить некоторые параметры микроволновки.

Спасите здоровье и нервы Глюка – помогите вычислить точное время нагрева чая.

Известные данные:

Поскольку при 87 С поток тепла воздуху довольно велик, то будем считать, что сопротивление воды зависит от температуры:

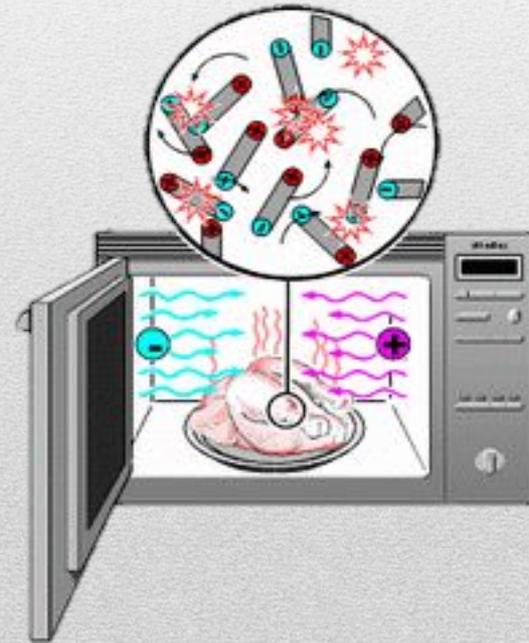
$$P_0 = 1600\text{Вт};$$

$$T_0 = 22\text{С};$$

$$T_k = 87\text{С};$$

$$c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{С}};$$

$$m = 200\text{г};$$



Решение

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{P_0 R_0}{R};$$

$$dQ = P dt = \frac{P_0 R_0}{R} dt = \frac{P_0 R_0}{R_0(0,1T + 1)} dt;$$

$$dQ = cm dT;$$

$$cm dT = \frac{P_0}{(0,1T + 1)} dt;$$

$$\int_{T_0}^{T_K} (0,1T + 1) dT = \frac{P_0}{cm} \int_0^t dt;$$

$$\frac{cm}{P_0} \left(\frac{T_K^2 - T_0^2}{20} + (T_K - T_0) \right) = (t - 0);$$

$$t = \frac{4200 \cdot 0,2}{1600} \left(\frac{87^2 - 12^2}{20} + (87 - 12) \right) c \approx 234,28 c.$$