«Эти замечательные точки параболы….»

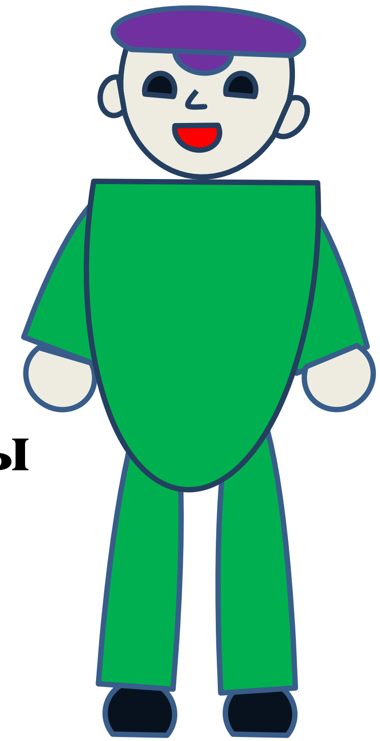
Номинация «Неизвестное об известном»

«Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе , который нас окружает».

Норберт Винер

(американский учёный, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта).

Здравствуйте, ребята! Меня зовут Парабэл. Я хочу научить вас строить замечательную кривую – параболу.
Для этого вам нужно посмотреть эту презентацию.
Для построения любой параболы вы должны работать по следующему алгоритму:
1. Вычислить координаты вершины параболы.
2. Найти шаги параболы, т.е.
а) коэффициент а при x^2 это будет первый шаг от вершины вдоль оси ОУ.
б) 2а - это будет второй и последующие шаги вдоль оси ОУ.
И это всё! Очень легко и интересно!

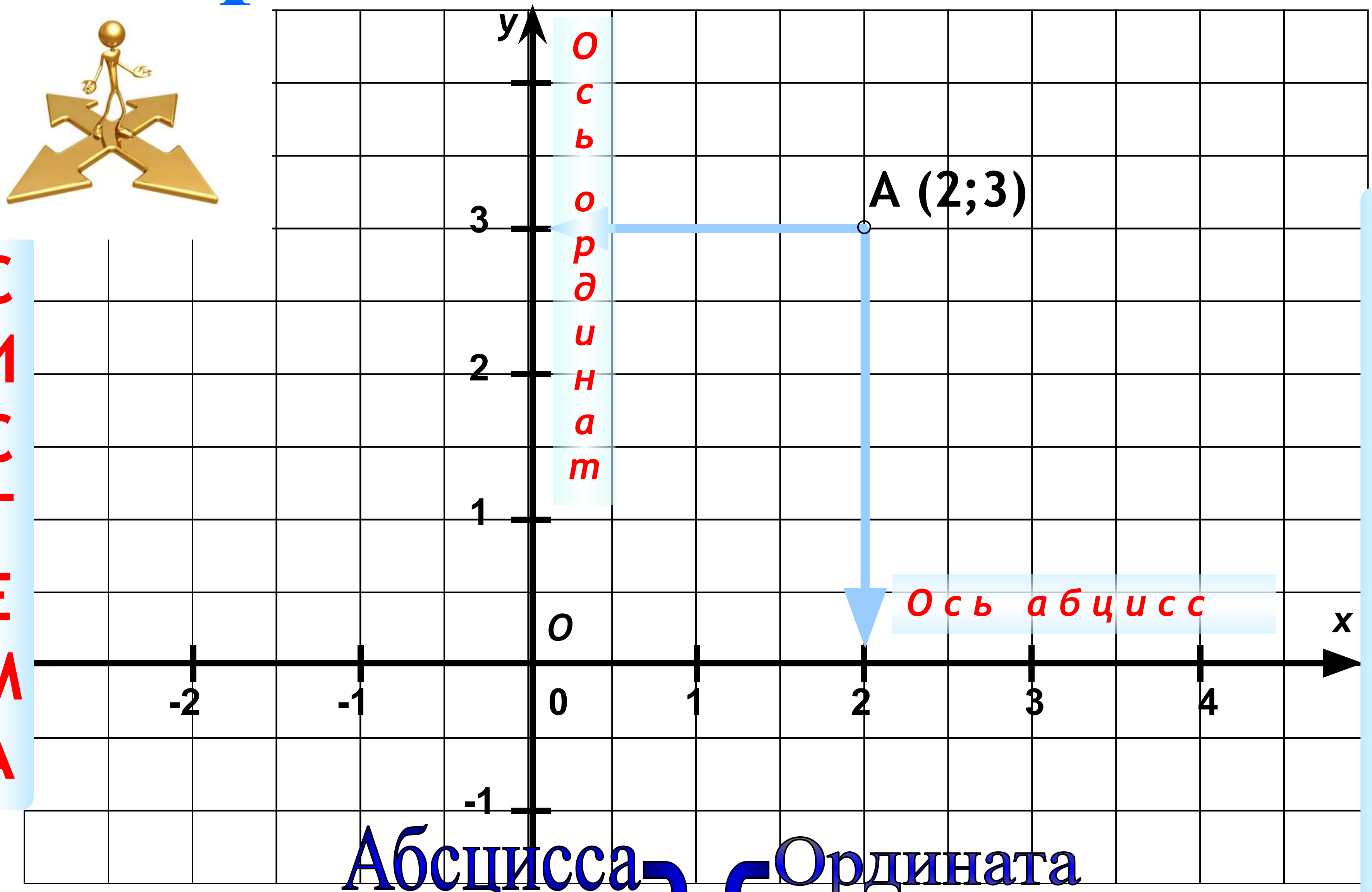


Ребята, все ли вы знаете, что построить любую параболу можно очень просто:
Смотрите как легко!

Сначала построим график функции: $y = x^2$
Построение идёт от вершины в следующем порядке:
1 шаг: 1 клетка вправо, 1 вверх
2 шаг: 1 клетка вправо, 3 вверх
3 шаг: 1 клетка вправо, 5 вверх и т.д.
Аналогично от вершины влево
4 шаг: 1 клетка влево, 1 вверх
5 шаг: 1 клетка влево, 3 вверх
6 шаг: 1 клетка влево, 5 вверх и т.д.

Координатная плоскость

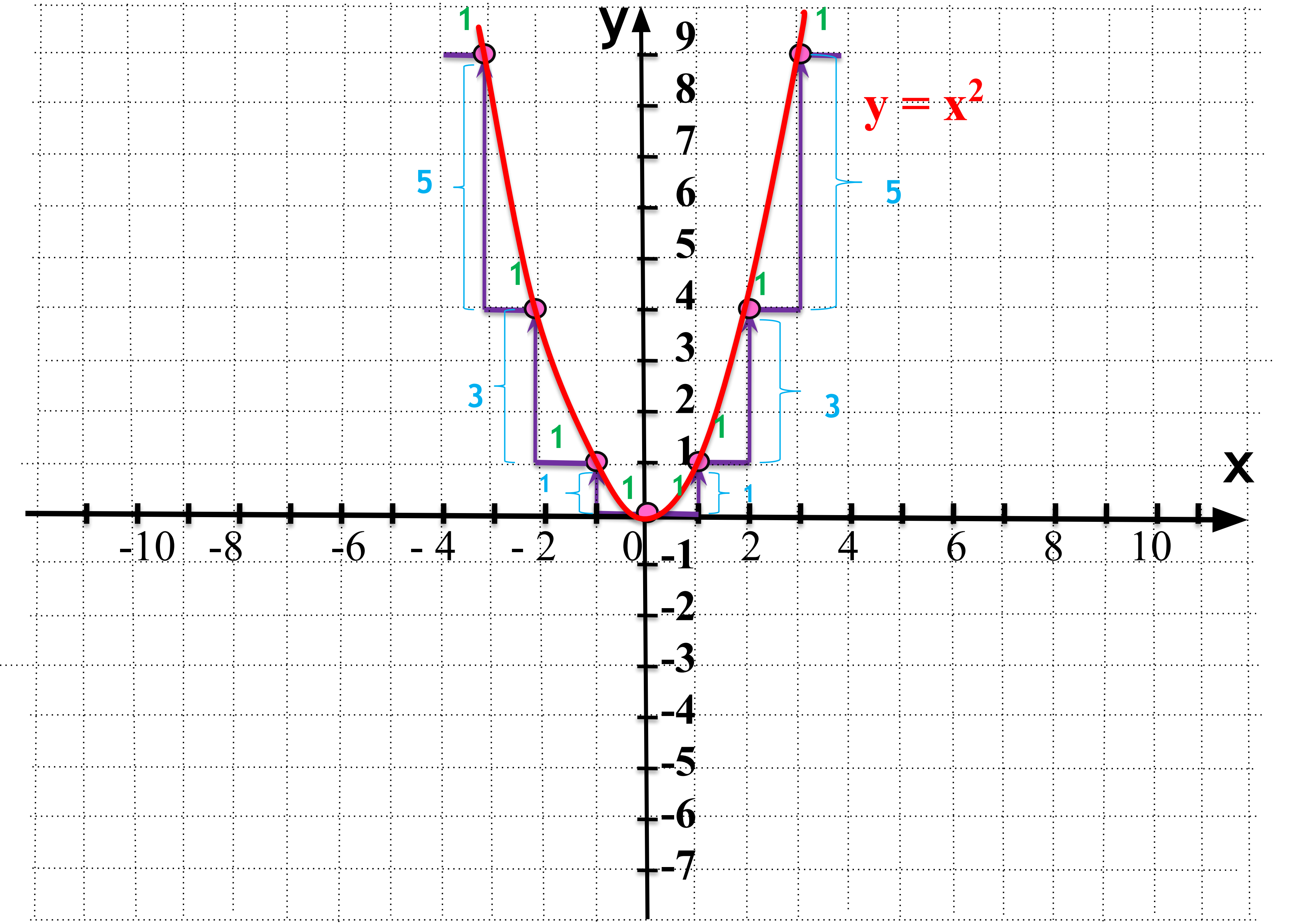
СИСТЕМА



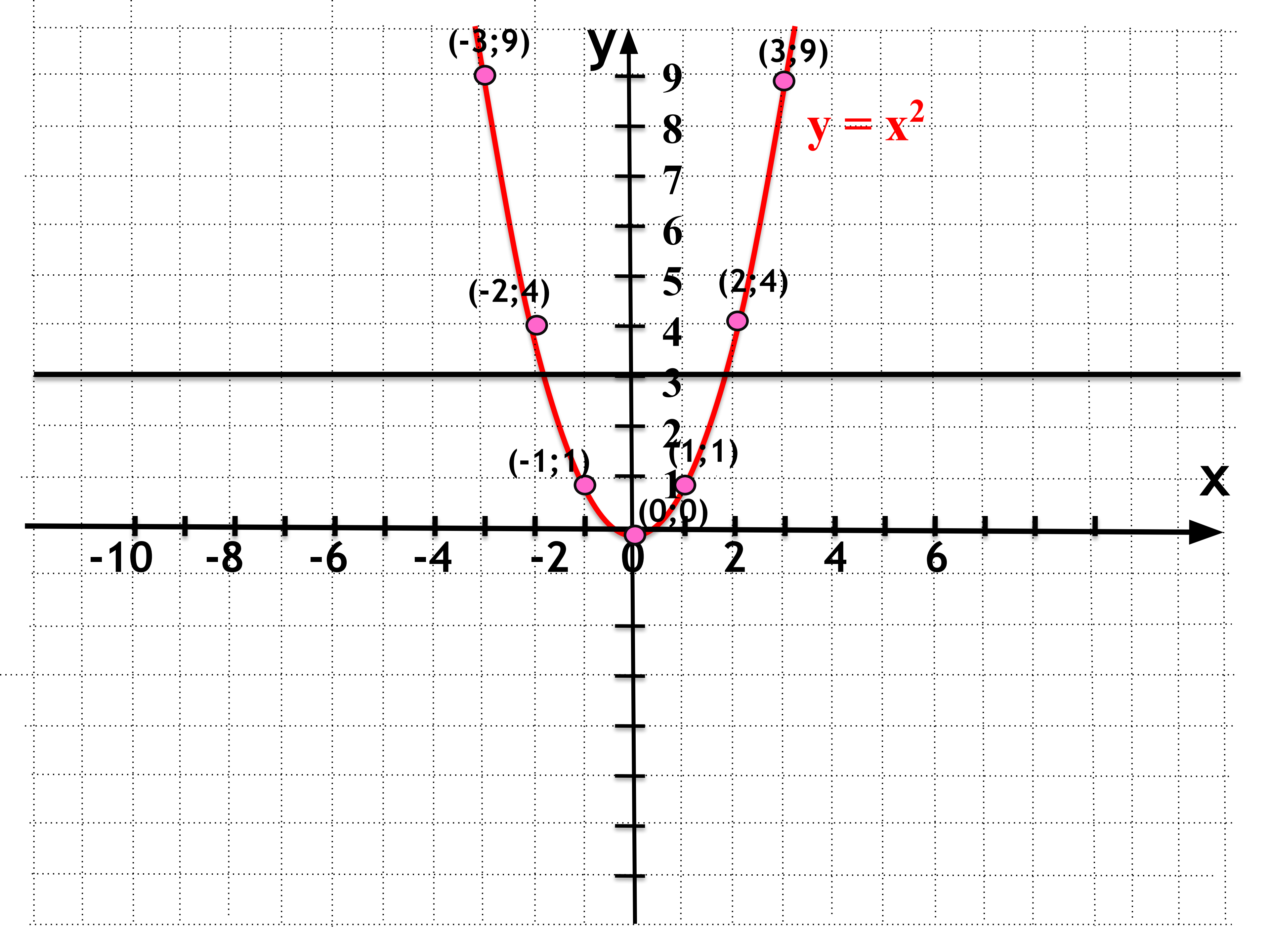
КООРДИНАТ

Абсцисса Ордината

$A(2;3)$



y
x
$y = x^2$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10
1
5
3


y
x
y = x2
(-3;9)
(3;9)
(-2;4)
(2;4)
(-1;1)
(1;1)
(0;0)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6

Построение графика функции $y = x^2$

	Координаты вершины	Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0.$ $y_0 = x_0^2 = 0^2 = 0.$				
Вправо по оси ОХ		1	1	1	1	
Вверх по оси ОУ		1	3	5	7	
шаг		1	2	2	2	Первый шаг равен а (а=1), коэффициенту перед x^2. Следующие шаги равны а $\cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.
Абсцисса точки х	0	1	2	3	4	
Ордината у	0	1= 0+1	4=1+3	9=4+5	16=9+7	

Я, кажется, знаю, на чём основано такое построение любой параболы. На факультативе мы изучали метод математической индукции. Используя этот метод, можно доказать следующее утверждение:

сумма нечётных натуральных чисел равна квадрату количества этих чисел, то есть

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = n^2$,

где n – натуральное число.

Сумма нечетных натуральных чисел равна квадрату количества этих чисел, то есть
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = n^2$, где n – натуральное число.

Доказательство:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = n^2$.

1) Пусть $n = 1$, тогда $1 = 1^2$

2) Пусть $n = k$, $k > 1$.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ - это верно,

3) Докажем данное утверждение при $n = k + 1$ тогда имеем:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$;

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$;

Итак, методом математической индукции мы доказали, что

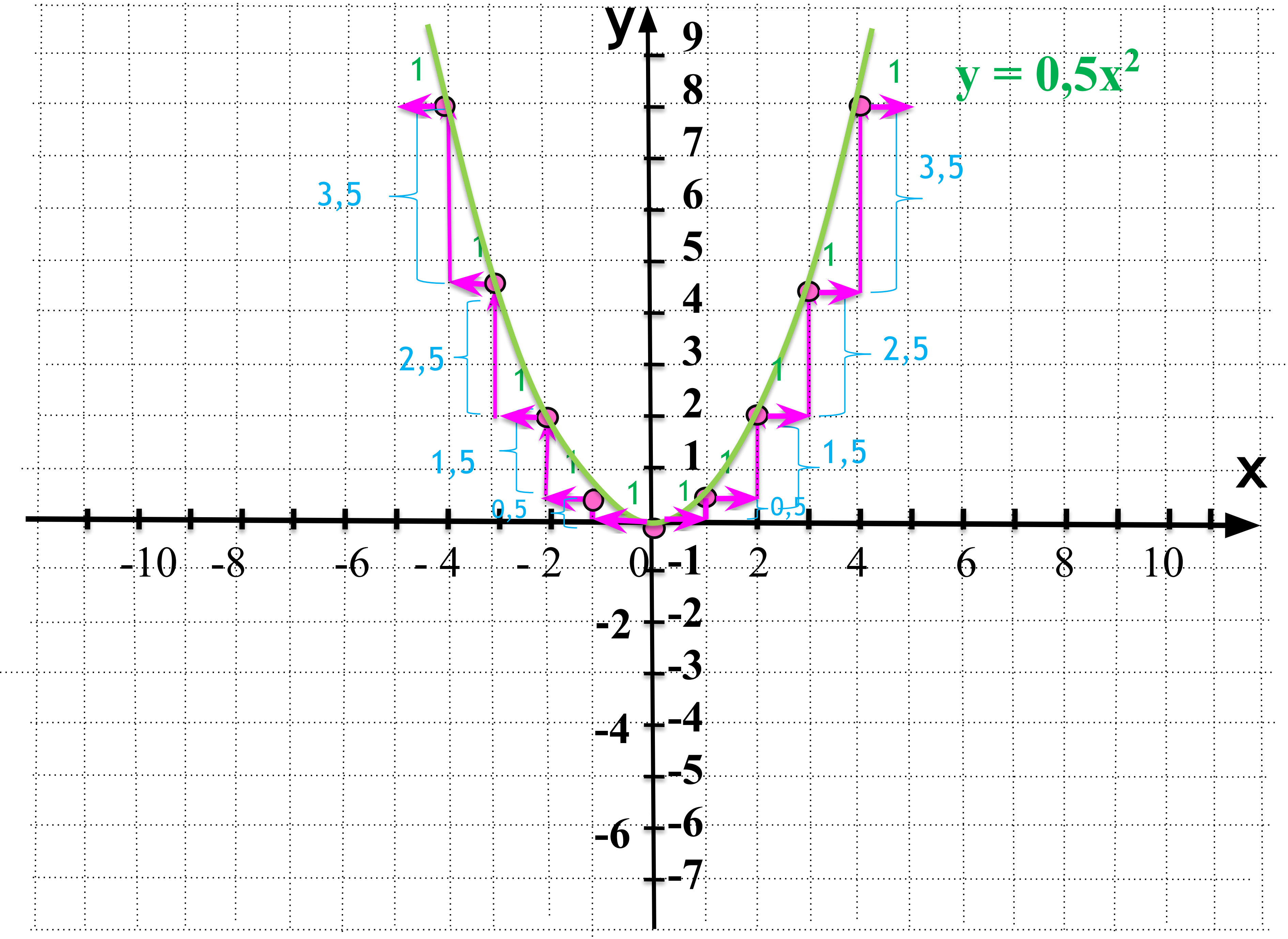
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = n^2$, где n – натуральное число

Построение графика функции $y = 0{,}5x^2$

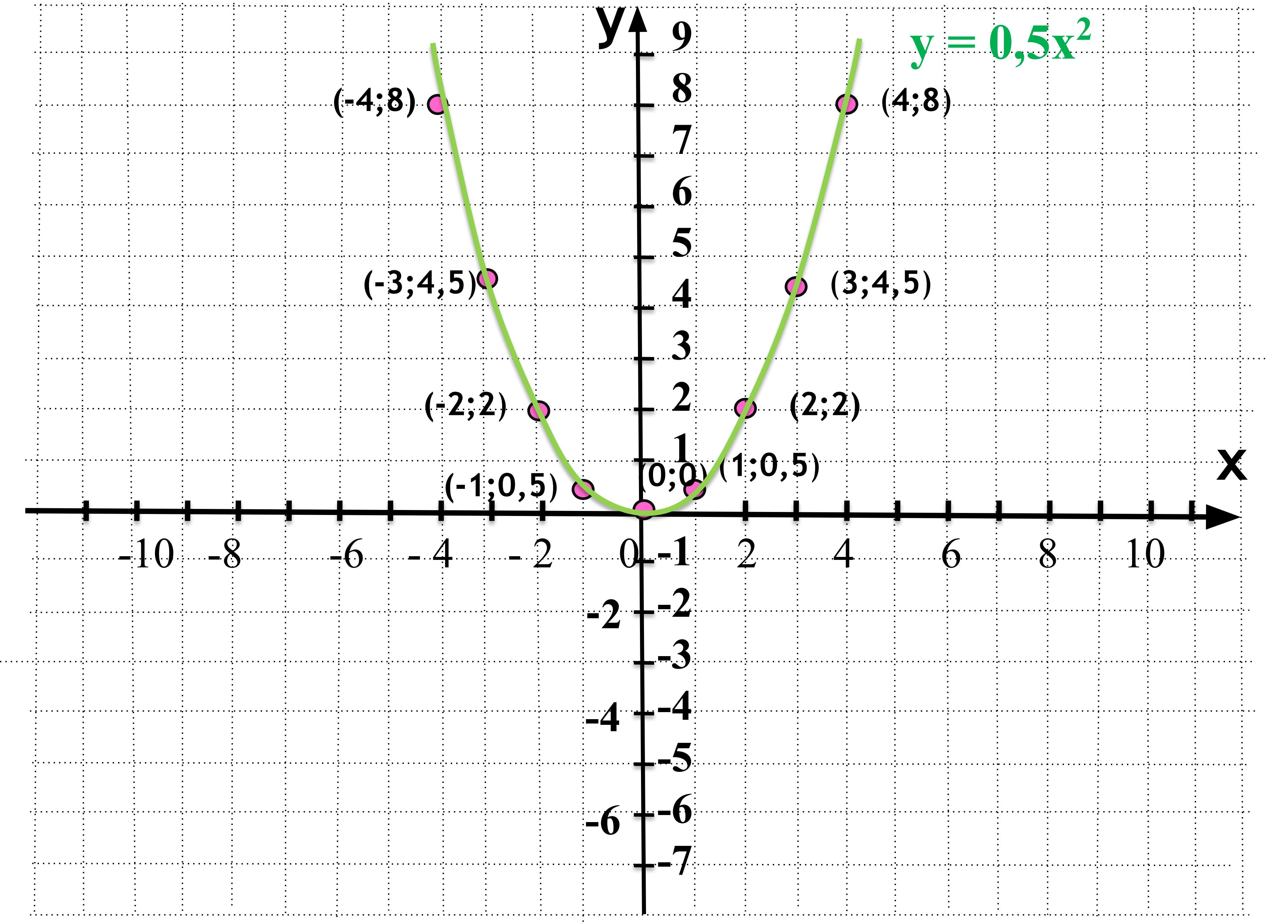
	Координаты вершины	Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = -\frac{0}{2 \cdot 0{,}5} = 0$. $y_0 = 0{,}5 \cdot x_0^2 = 0{,}5 \cdot 0^2 = 0$.				
Вправо по оси ОХ		**1**	**1**	**1**	**1**	
Вверх по оси ОУ		**0,5**	**1,5**	**2,5**	**3,5**	
Шаг		**0,5**	**1**	**1**	**1**	**Первый шаг равен а (а=0,5), коэффициенту перед x^2. Следующие шаги равны а ·2= 0,5· 2 = 1**
Абсцисса точки х	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	
Ордината у	**0**	**0,5= = 0 +0,5**	**2= = 0,5+1,5**	**4,5= = 2+2,5**	**8= = 4,5+3,5**	

Если коэффициент перед x^2 отличен от 1, то первый шаг по оси ОУ равен коэффициенту а, а затем следующие шаги 2а. Если $y = 0{,}5x^2$, то первый шаг (по оси ОУ) будет равен а = 0,5; а остальные 2а =2·0,5= 1. По оси ОХ вправо или влево от абсциссы координаты вершины параболы на 1 единичный отрезок.

$y = 0{,}5x^2$	**По оси ОХ (единичных отрезков)**	**По оси ОУ (единичных отрезков)**
1 шаг	**1 вправо**	**Вверх 0,5**
2 шаг	**1 вправо**	**Вверх 0,5 + 1 = 1,5**
3 шаг	**1 вправо**	**Вверх 1,5 + 1= 2,5**
4 шаг и т. д.	**1 вправо (аналогично влево)**	**Вверх 2,5 + 1 = 3,5**



y = 0,5x²
y
x
3,5
2,5
1,5
0,5
1

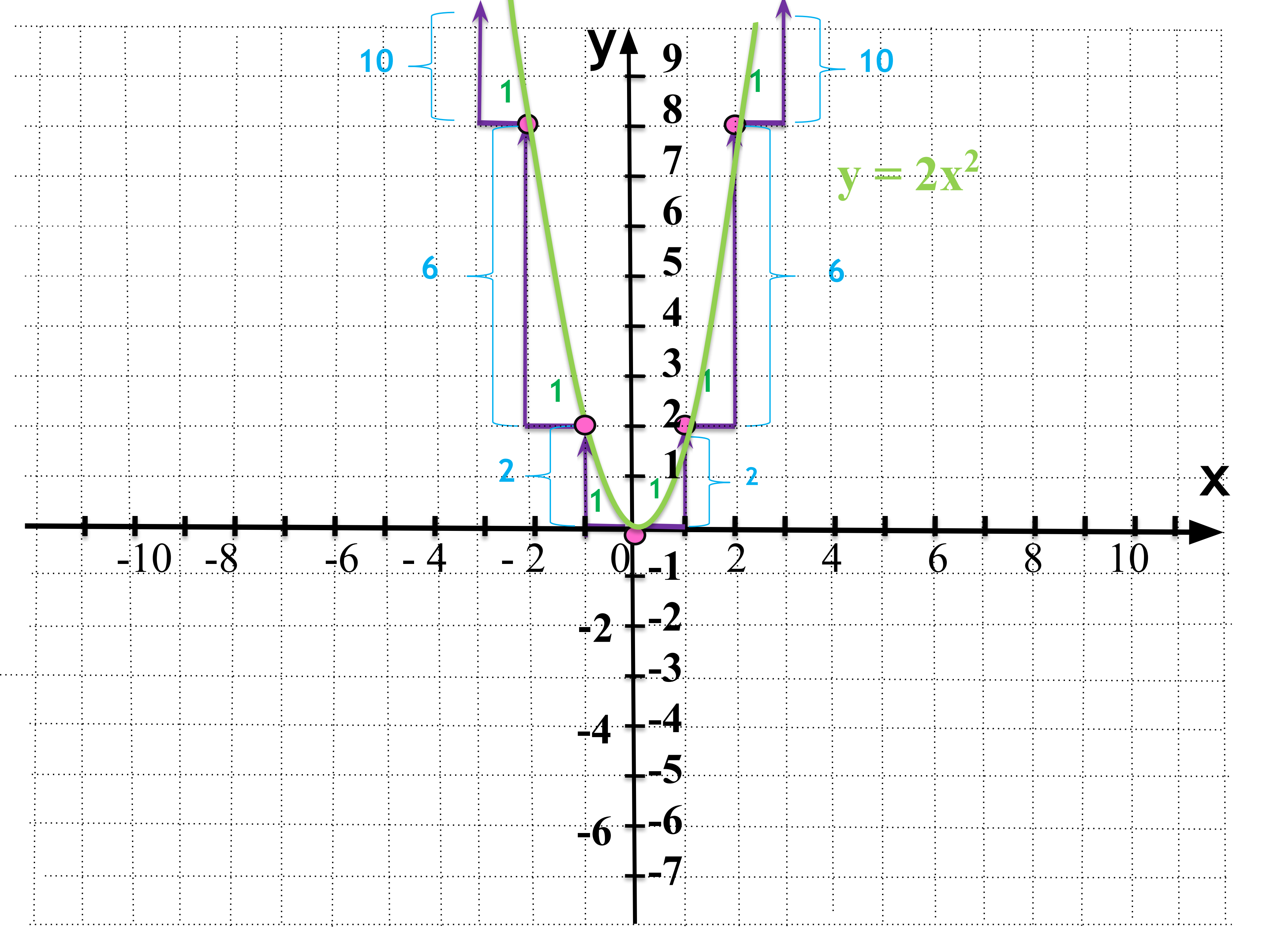


y = 0,5x²
y
x
(-4;8)
(4;8)
(-3;4,5)
(3;4,5)
(-2;2)
(2;2)
(-1;0,5)
(1;0,5)
(0;0)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10

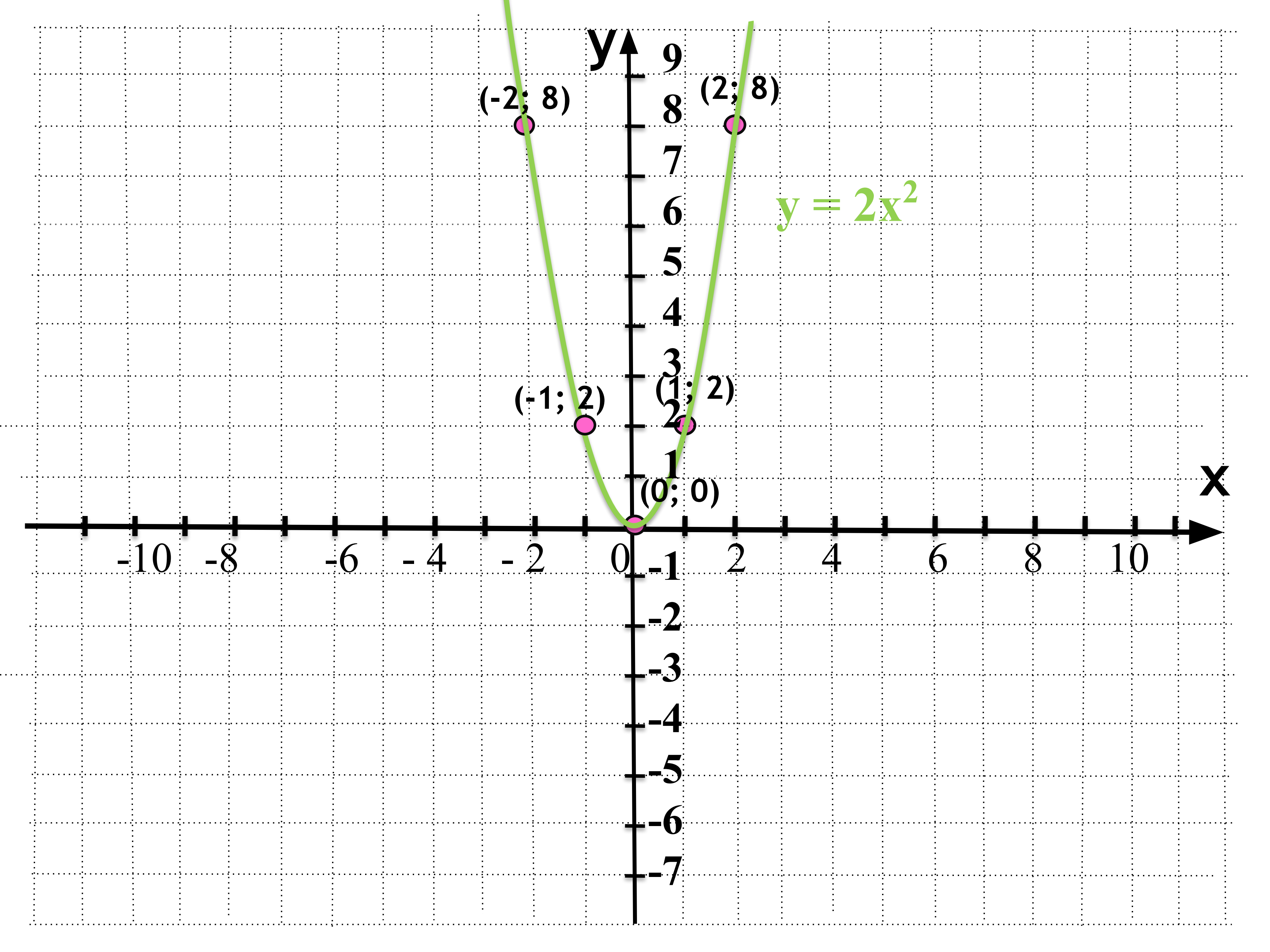
Построение графика функции $y = 2x^2$

	Координаты вершины	Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = -\frac{0}{2\cdot 2} = 0$. $y_0 = 2\cdot x_0^2 = 2\cdot 0^2 = 0$.				
Вправо по оси ОХ		**1**	**1**	**1**	**1**	
Вверх по оси ОУ		**2**	**6**	**10**	**14**	
Шаг		**2**	**4**	**4**	**4**	**Первый шаг равен а (а=2), коэффициенту перед x^2. Следующие шаги равны а ·2= 2·2 = 4**
Абсцисса точки х	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	
Ордината у	**0**	**2= 0+2**	**8=2+6**	**18=8+10**	**32=18+14**	

Если коэффициент перед x^2 отличен от 1, то первый шаг по оси ОУ равен коэффициенту а, а затем следующие шаги 2а. **Если $y = 2x^2$, то первый шаг (по оси ОУ) будет равен а = 2,** **а остальные 2а = 2·2= 4.** **По оси ОХ вправо или влево от абсциссы координаты вершины параболы на 1 единичный отрезок.**		
$y = 2x^2$	**По оси ОХ (единичных отрезков)**	**По оси ОУ (единичных отрезков)**
1 шаг	**1 вправо**	**Вверх 2**
2 шаг	**1 вправо**	**Вверх 2 + 4 = 6**
3 шаг	**1 вправо**	**Вверх 6 + 4 = 10**
4 шаг и т. д.	**1 вправо (аналогично влево)**	**Вверх 10 + 4 = 14 и т. д.**

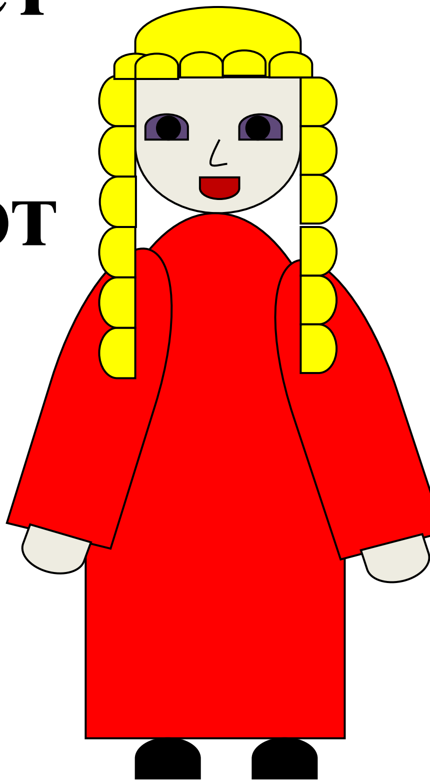


y
x
$y = 2x^2$
10
10
6
6
2
2
1
1
1
1
1
1
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-2
-4
-6
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10



y
x
(-2; 8)
(2; 8)
(-1; 2)
(1; 2)
(0; 0)
y = 2x²
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10

Если вершина параболы находится не в начале координат, то это не меняет принцип построения.
Координаты вершины принимаем как (0;0), а построение параболы идёт аналогичным образом,
т. е. построение зависит только от коэффициента перед x^2.



А давай проверим это на практике! Пусть вершина параболы находится не в начале координат, и коэффициент a отличен от 1.

Построение графика функции $y = -4x^2 + 4x - 5$

	Координаты вершины	Координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a};\ x_0 = -\frac{4}{2\cdot(-4)} = -\frac{4}{-8} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$ $y_0 = -4\cdot 0{,}5^2 + 4\cdot 0{,}5 - 5 = -4\cdot 0{,}25 + 2 - 5 = -1 + 2 - 5 = -4$				
Вправо по оси ОХ		1	1	1	1	
Вниз ($a = -4$) по оси ОУ		- 4	- 12	- 20	- 28	
шаг		- 4	- 8	- 8	- 8	Первый шаг равен a ($a = -4$), коэффициенту перед x^2. Следующие шаги равны $2a = 2\cdot(-4) = -8$.
Абсцисса точки x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	
Ордината y	- 4	- 8 = = - 4+ (- 4)	-20 = = - 8 + (-12)	- 40 = = -20+ (-20)	- 68 = = -28 + (- 40)	

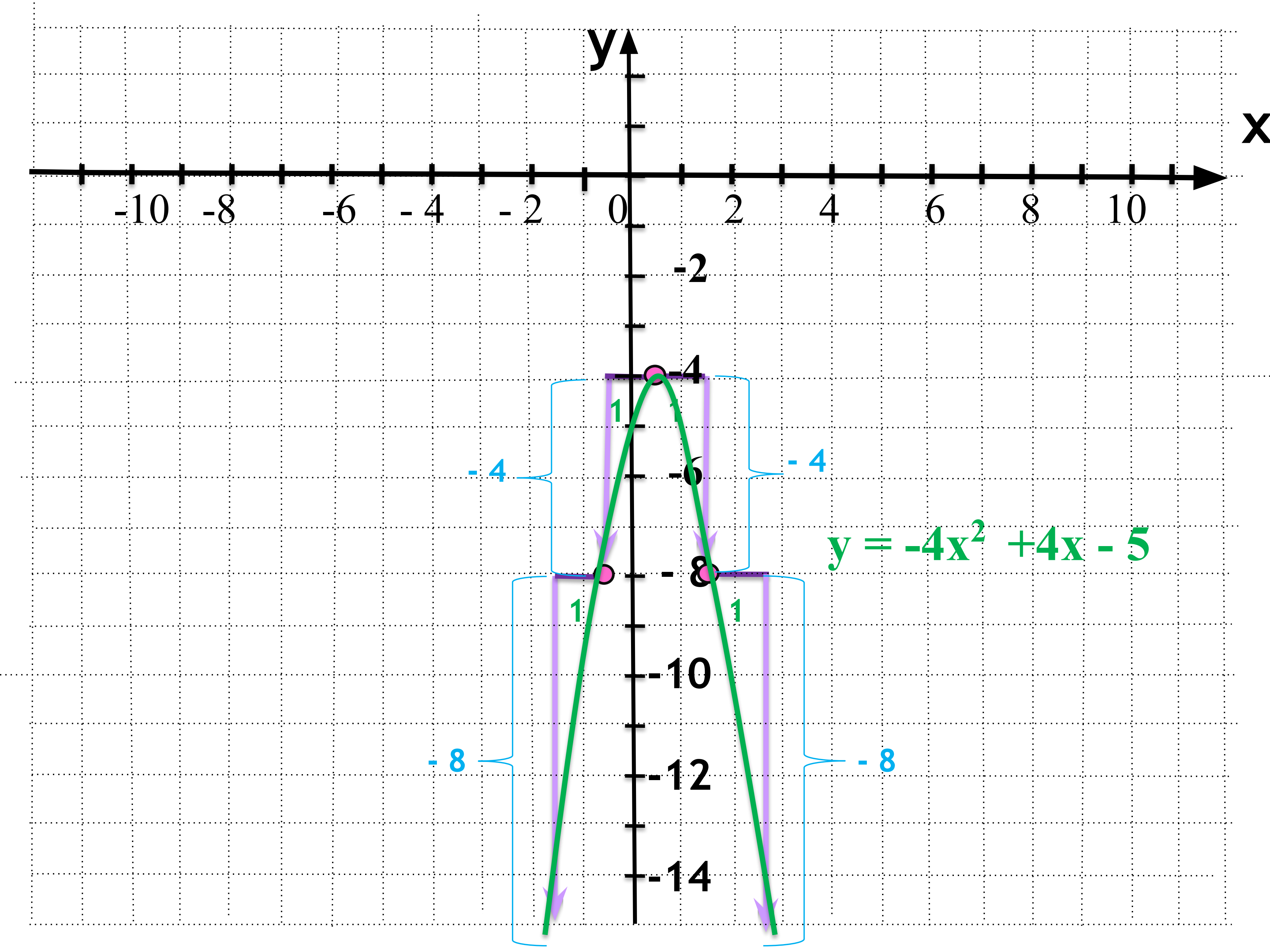
Если $y = -4x^2 + 4x - 5$,

то первый шаг (по оси ОУ) будет равен $a = -4$,

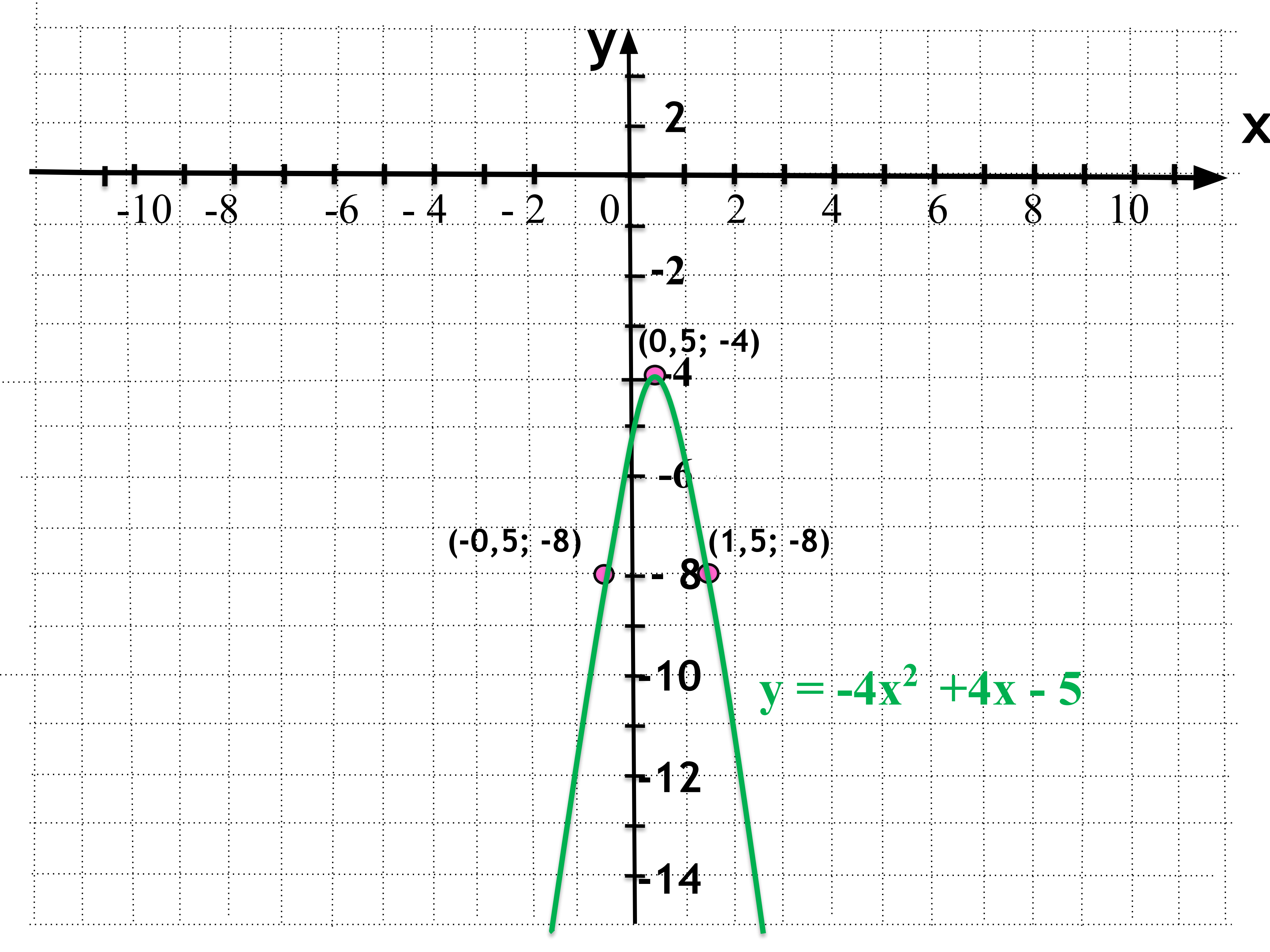
а остальные $2a = 2\cdot(-4) = -8$.

По оси ОХ вправо или влево от абсциссы координаты вершины параболы на 1 единичный отрезок.

$y = -4x^2 + 4x - 5$	По оси ОХ (единичных отрезков)	По оси ОУ (единичных отрезков)
1 шаг	1 вправо	Вниз -4
2 шаг	1 вправо	Вниз $-4 - 8 = -12$
3 шаг	1 вправо	Вниз $-12 - 8 = -20$
4 шаг и т. д.	1 вправо (аналогично влево)	Вниз $-20 - 8 = -28$



y
x
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10
-2
-4
-6
- 8
-10
-12
-14
1
1
1
1
- 4
- 4
- 8
- 8
$y = -4x^2 + 4x - 5$



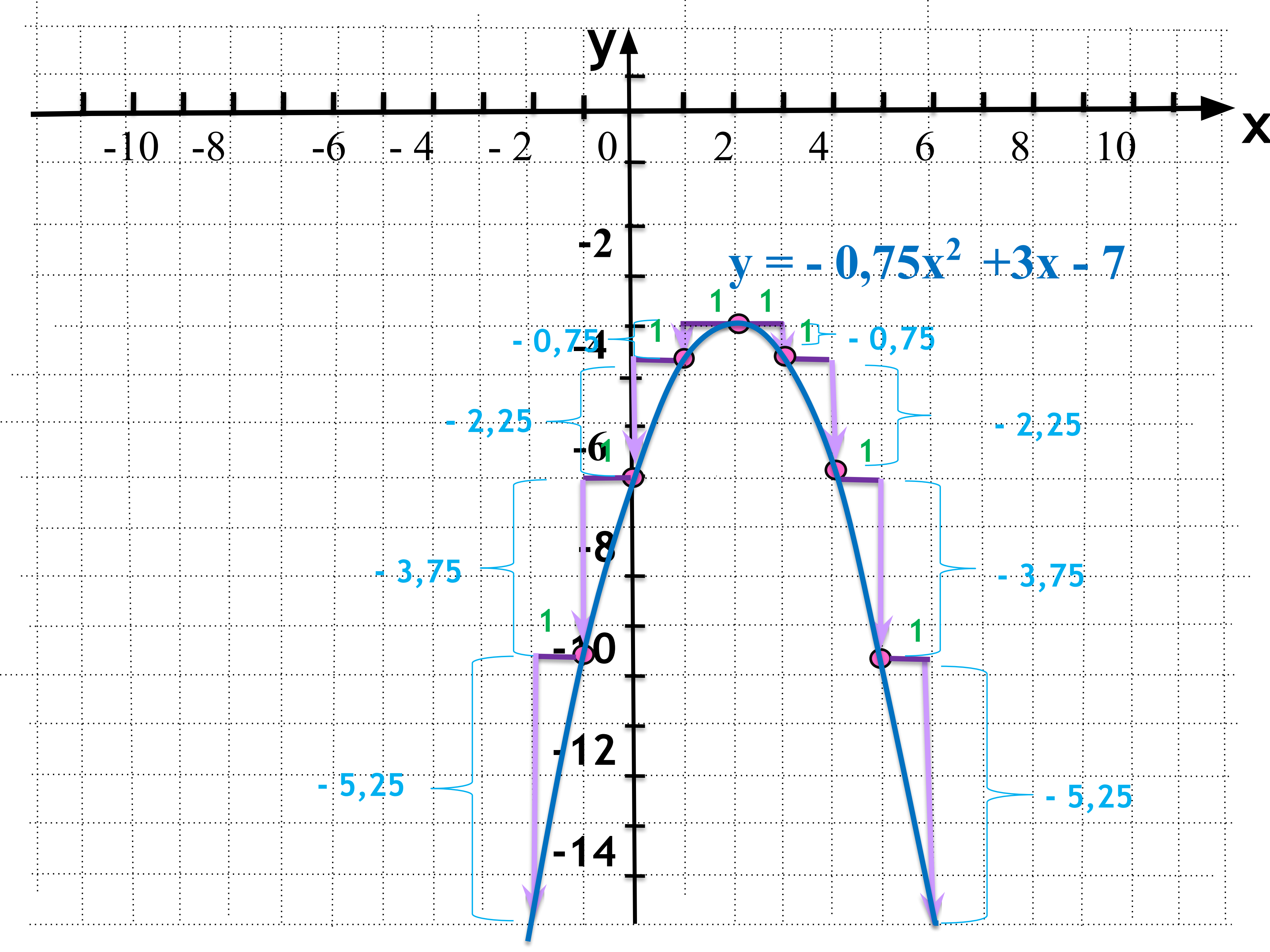
y
x
2
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10
-2
(0,5; -4)
-4
-6
(-0,5; -8)
(1,5; -8)
- 8
-10
-12
-14
$y = -4x^2 + 4x - 5$

Построение графика функции y= - 0,75x^2 + 3x -7

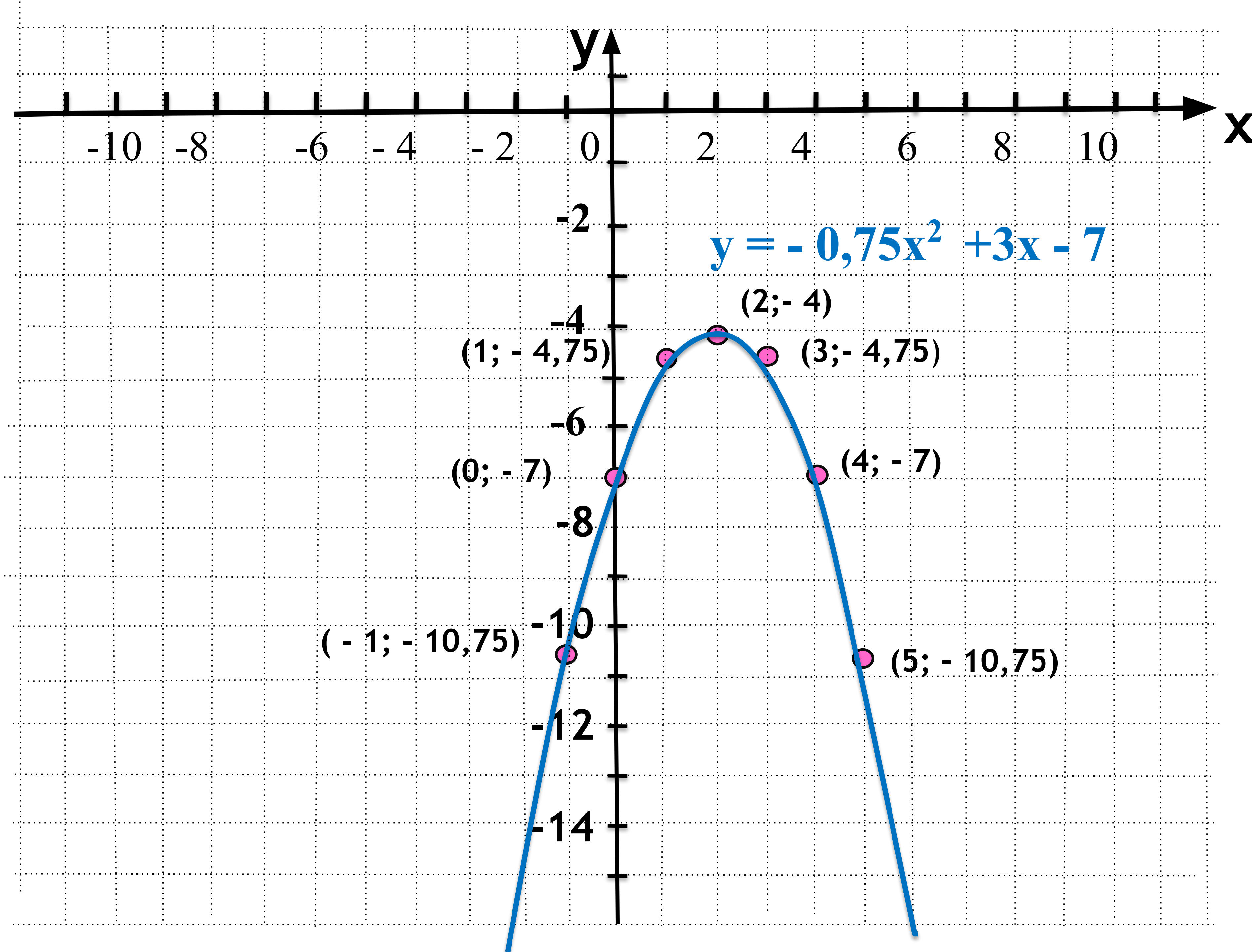
	Координаты вершины	*Координаты вершины параболы:* $x_0 = -\frac{b}{2a};\ x_0 = -\frac{3}{2\cdot(-0{,}75)} = -\frac{3}{-1{,}5} = 2.$ $y_0 = -0{,}75\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 7 = -0{,}75\cdot 4 + 6 - 7 = -3 + 6 - 7 = -4$				
Вправо по оси OX		**1**	**1**	**1**	**1**	
Вниз (a = - 0,75) по оси OУ		**-0,75**	**-2,25**	**-3,75**	**-5,25**	
Шаг		**-0,75**	**-1,5**	**-1,5**	**-1,5**	**Первый шаг равен a (a = - 0,75), коэффициенту перед x ^{2}. Следующие шаги равны 2a = 2 · (- 0,75) = - 1,5.**
Абсцисса точки x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Ордината точки	**- 4**	**-4,75 = = -4+(-0,75)**	**-7= = -4,75+(-2,25)**	**-10,75= = -7+(-3,75)**	**-16= = -10,75+(-5,25)**	

Если $y = -0{,}75x^2 + 3x - 7$,
то первый шаг (по оси ОУ) будет равен $a = -0{,}75$,
а остальные $2a = 2\cdot(-0{,}75) = -1{,}5$.
По оси ОХ вправо или влево от абсциссы координаты вершины параболы на 1 единичный отрезок.

$y = -0{,}75x^2 + 3x - 7$	По оси ОХ (единичных отрезков)	По оси ОУ (единичных отрезков)
1 шаг	1 вправо	Вниз $-0{,}75$
2 шаг	1 вправо	Вниз $-0{,}75 - 1{,}5 = -2{,}25$
3 шаг	1 вправо	Вниз $-2{,}25 - 1{,}5 = -3{,}75$
4 шаг и т. д.	1 вправо (аналогично влево)	Вниз $-3{,}75 - 1{,}5 = -5{,}25$



y
x
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
y = - 0,75x² +3x - 7
1
1
1
1
1
1
1
1
- 0,75
- 0,75
- 2,25
- 2,25
- 3,75
- 3,75
- 5,25
- 5,25



y
x
-10
-8
-6
- 4
- 2
0
2
4
6
8
10
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
y = - 0,75x² +3x - 7
(2;- 4)
(1; - 4,75)
(3;- 4,75)
(0; - 7)
(4; - 7)
(- 1; - 10,75)
(5; - 10,75)

Разнятся лики квадратичны
В единой сущности Твоей.
Ты график функции обычной,
Прекрасен в простоте своей!

Авторы раб

Ганбат Болор – Эрдэнэ,
8 «**А**» **класс**

Иванец Данил
,
11 «**А**» **класс**

Болдын Лхагвасурэн,
7 «**Б**»
сс

Дмитриев Сергей Степанович,
учитель

Иванец Ольга Николаевна,
учитель математики