



Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

11 класс

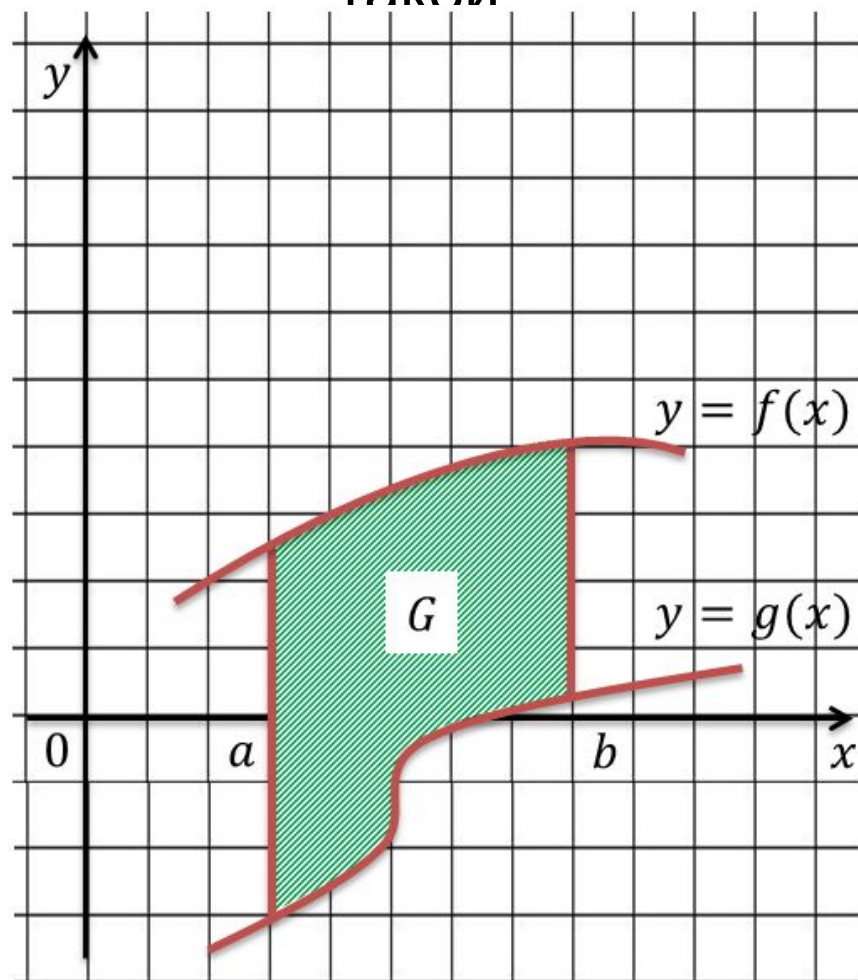
МАОУ СОШ № 13 города Тюмени

$$S = \int_a^b f(x) dx - \text{геометрический смысл определенного интеграла}$$

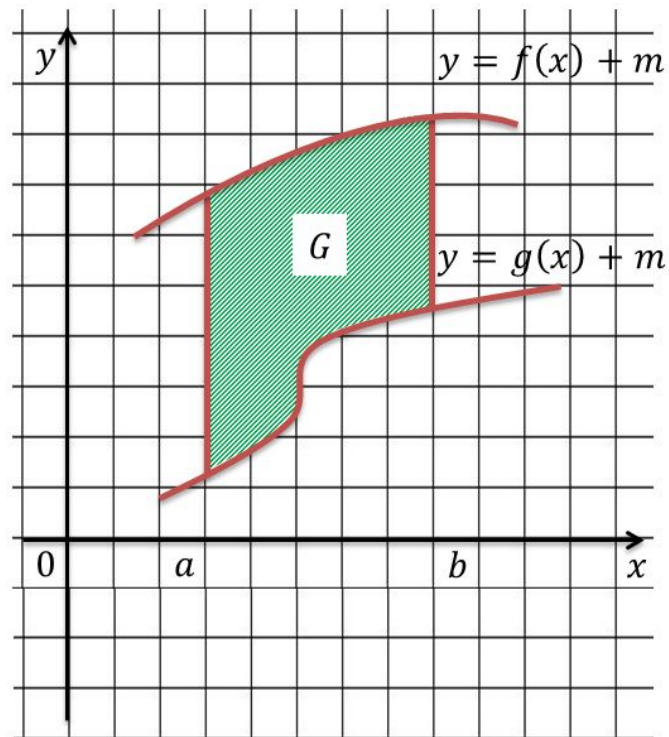
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) - \text{формула Ньютона-Лейбница}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Но с помощью определенного интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций, но и плоских фигур более сложного вида, например, такой

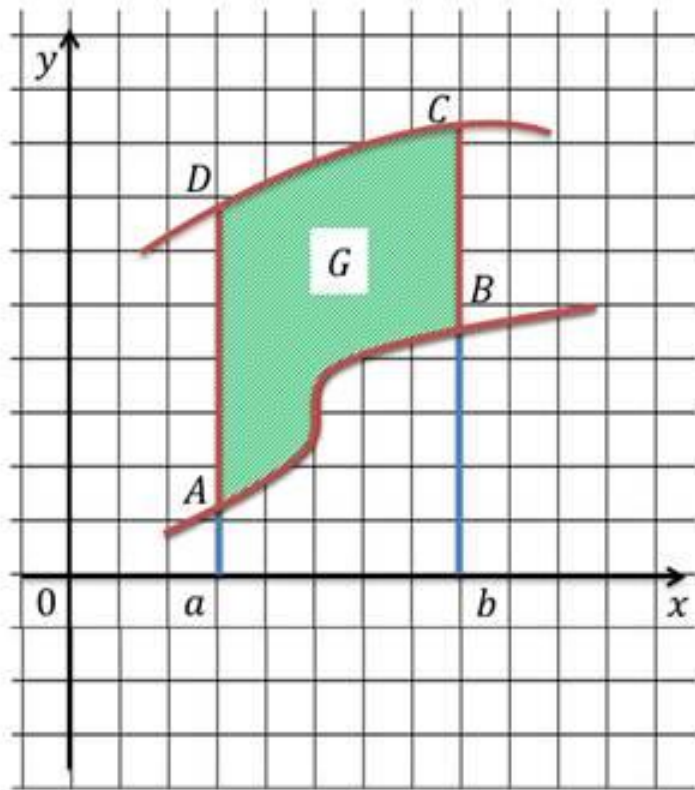


Для того, чтобы вычислить площадь данной фигуры, выполним параллельный перенос фигуры на m единиц вверх так, чтобы она полностью оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс.



Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функции $y = f(x) + m$ и $y = g(x) + m$, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$. Тогда легко заметить, что площадь нашей фигуры можно найти как разность площадей криволинейных трапеций.

Запишем это:



$$\begin{aligned}
 S &= S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \\
 &= \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \\
 &= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m)) dx = \\
 &= \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m) dx = \\
 &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx
 \end{aligned}$$

Итак, площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 1$, $x = e$, $y = \frac{1}{x}$.

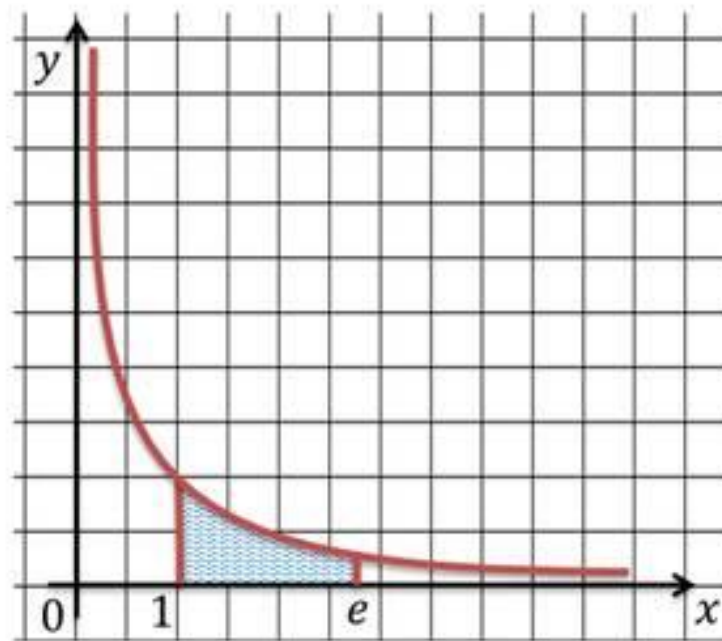
Решение:

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$$

$$S = (\ln|x|) \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ответ: $S = 1$.



Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

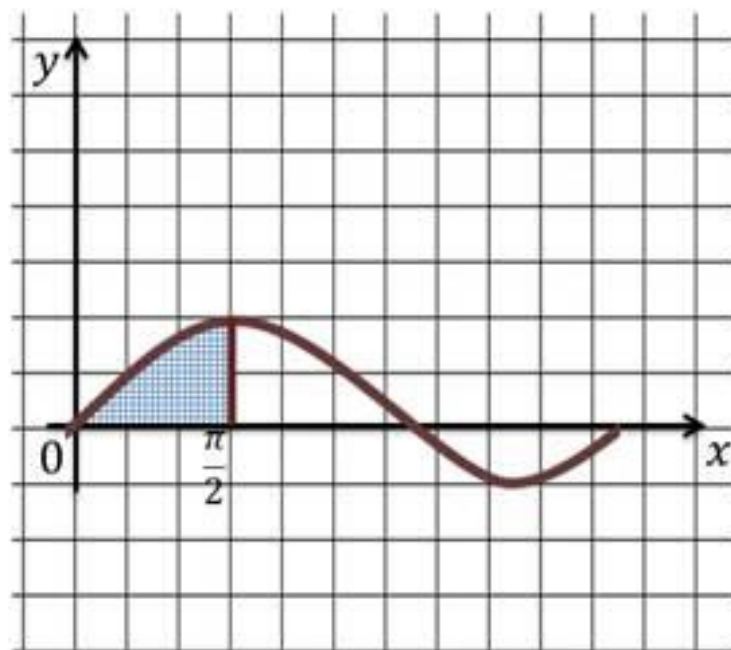
Решение:

$$S = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$(-\cos x)' = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$$

$$S = (-\cos x) \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$

Ответ: $S = 1$.



Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$, $y = -(x - 4)^2$.

Решение:

$$x^2 - 4x = -(x - 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (x - 4)^2 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & y_1 = -4 \\ x_2 = 4 & y_2 = 0 \end{cases}$$

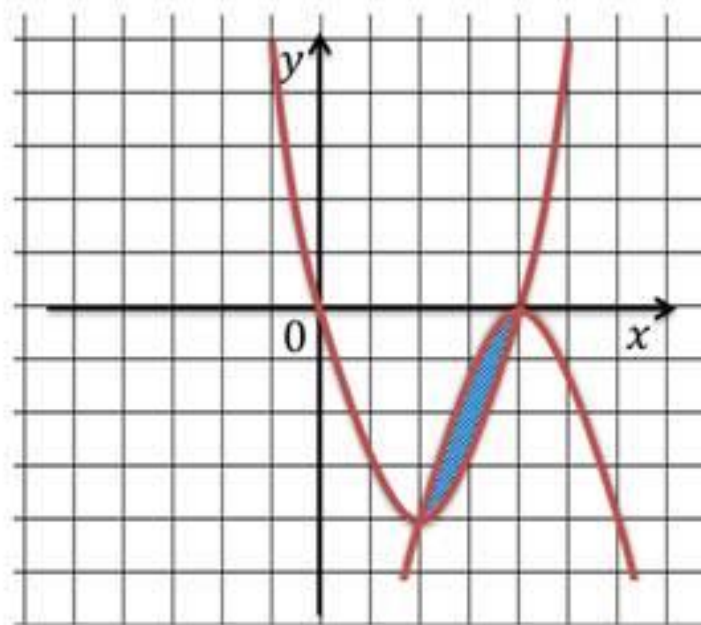
$$S = \int_2^4 (-(x - 4)^2 - (x^2 - 4x)) dx =$$

$$= \int_2^4 (-2x^2 + 12x - 16) dx = -2 \int_2^4 x^2 dx +$$

$$+ 12 \int_2^4 x dx - 16 \int_2^4 1 \cdot dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_2^4 \right) + 12 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 \right) -$$

$$- 16 \left(x \Big|_2^4 \right) = -2 \cdot \frac{56}{3} + 12 \cdot 6 - 16 \cdot 2 = 2 \frac{2}{3}$$

Ответ: $S = 2 \frac{2}{3}$.



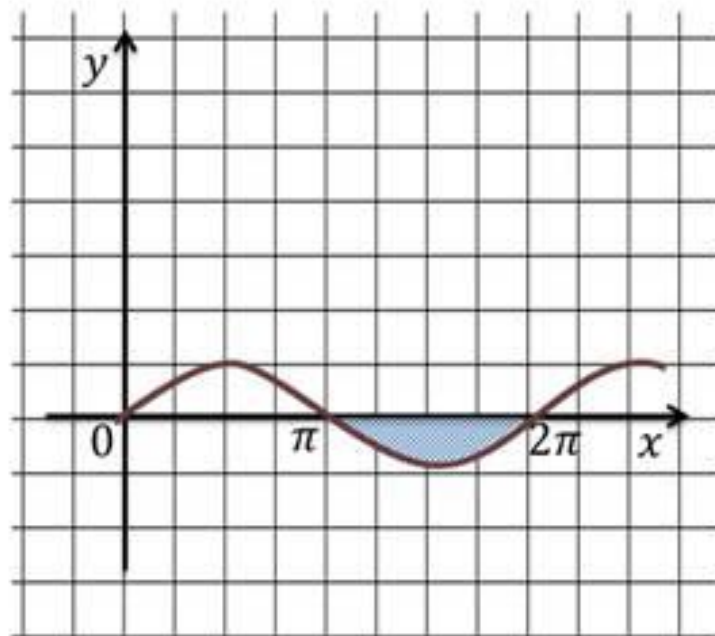
Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [\pi; 2\pi]$.

Решение:

$$S = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = \left| (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| =$$
$$= |-1 - 1| = 2$$

Ответ: $S = 2$.



Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5x^2 + 2$, $x = 0$, касательной к графику функции $y = 0,5x^2 + 2$ в точке $x = -2$.

Решение:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(a) = 0,5 \cdot (-2)^2 + 2 = 4$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(a) = -2$$

$$y = 4 - 2(x + 2) = -2x$$

$$S = \int_{-2}^0 (0,5x^2 + 2) dx - S_{\Delta} = 0,5 \int_{-2}^0 x^2 dx +$$

$$+ 2 \int_{-2}^0 dx - 4 = 0,5 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 \right) + 2 \left(x \Big|_{-2}^0 \right) - 4 =$$

$$= 0,5 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot 2 - 4 = 1\frac{1}{3}$$

Ответ: $S = 1\frac{1}{3}$.

