Исследовательская практическая работа по математике на тему: «Алгебраические уравнения четвёртой степени»

Подготовила:
Ученица 10 касса «А»
МБОУ СОШ №52
г.Воронежа
Гошкова Валерия

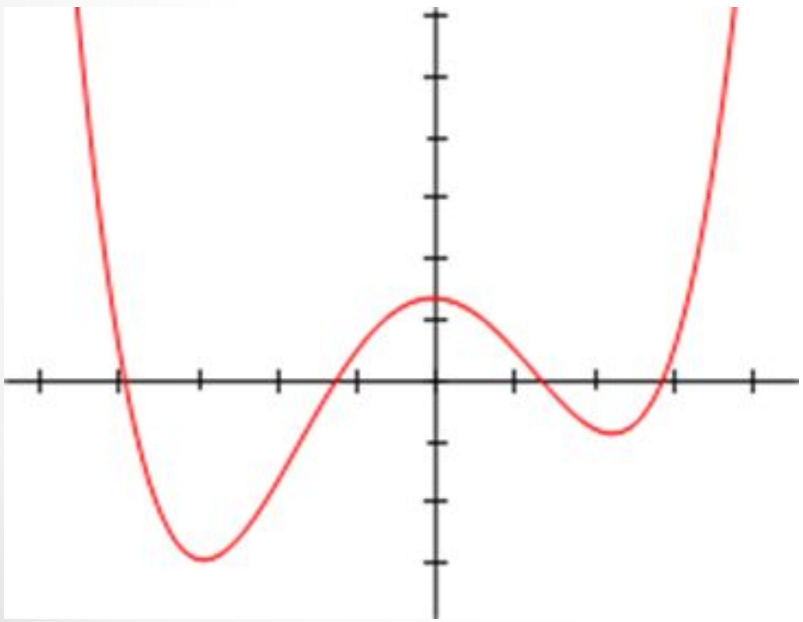
Уравнение четвёртой степени — в математике алгебраическое уравнение вида:

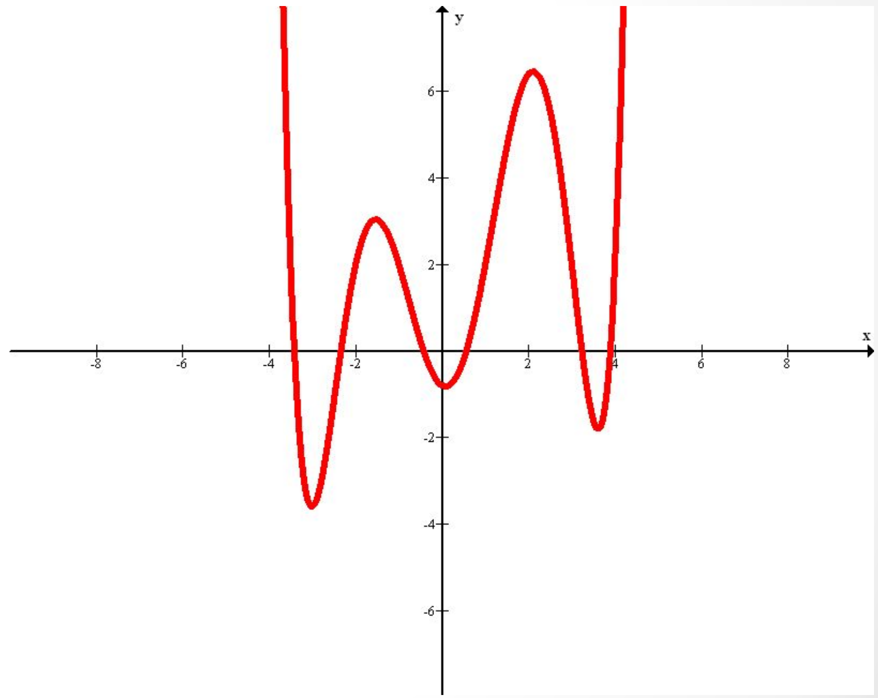
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Четвёртая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует аналитическое решение в радикалах в общем виде (то есть при любом значении коэффициентов).

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

Так как f(x) является многочленом чётной степени, она имеет один и тот же предел при стремлении к плюс и к минус бесконечности. Если a>0, то функция возрастает до плюс бесконечности с обеих сторон, таким образом, функция имеет глобальный минимум. Аналогично, если a<0, то функция убывает до минус бесконечности с обеих сторон, таким образом, функция имеет глобальный максимум





Решение уравнений четвертой степени можно проводить по общей схеме решения уравнений высших степеней. Однако, есть несколько специфических видов таких уравнений – двучленное, биквадратное и возвратное. На них подробно остановимся. Метод Феррари позволяет свести решение к кубическому уравнению. Иногда применение искусственных приемов разложения многочлена на множители быстро приводит к результату.

Уравнение n-ой степени можно привести к общему виду:

Степень уравнения	**Общий вид**
Уравнение первой степени	$ax + b = 0$
Уравнение второй степени	$ax^2 + bx + c = 0$
Уравнение третьей степени	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
Уравнение четвёртой степени	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
И.т.д	

Комплексные числа

Рассматривать будем на таком примере:

$$z = \sqrt{-4}$$

Если говорить о действительных числах, то, вы знаете, что корень из отрицательного числа нельзя извлекать. Однако в комплексных числах можно. Если конкретнее, 2 корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{-4} = 2\text{i}$$

Выполним проверку того, что эти корни и права оказываются решением уравнения:

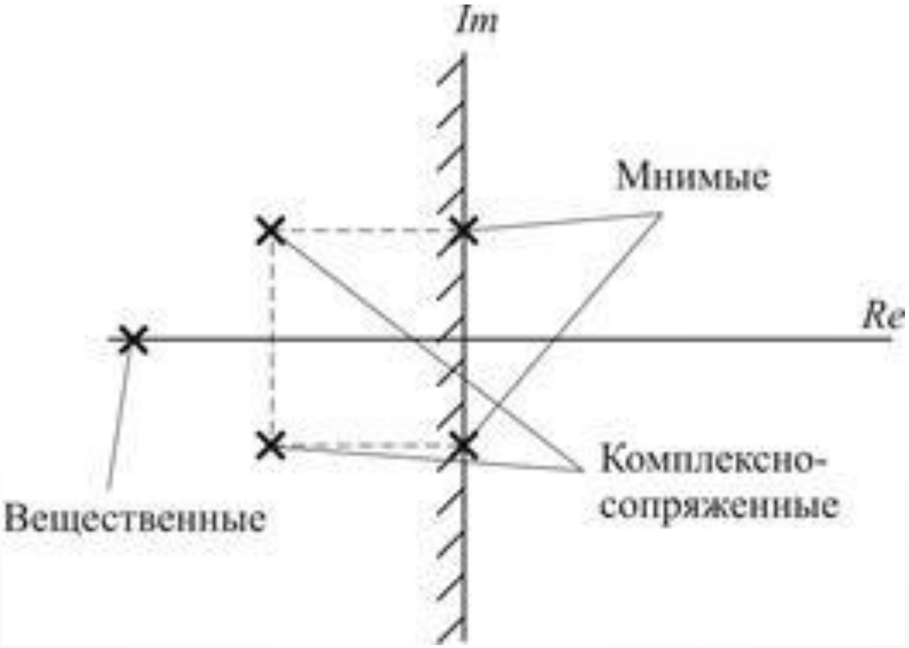
$(-2i)^2 = (-2)^2 * i^2 = 4 * (-1) = -4$

$(2i)^2 = 2^2 * i^2 = 4 * (-1) = -4$

Что и требовалось доказать.

Зачастую используют сокращенную запись, корни записывают в одну строчку в таком виде: $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни являются **сопряженными комплексными корнями**.



Решение двучленного уравнения четвертой степени

Этот тип уравнений четвертой степени является простейшим, само уравнение имеет вид формула. Решается с использованием формул сокращенного умножения.

$$Ax^4 + B = 0$$

$$x^4 + \frac{B}{A} = 0$$

$$x^4 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 + \frac{B}{A} - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right) = 0$$

- Пример: решить уравнение $4x^4 + 1 = 0$
- Сначала разложим на множители:

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 1 = \left(2x^2 + 1\right)^2 - 4x^2 =$$
$$= \left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(2x^2 + 2x + 1\right)$$

- Находим корни первого и второго квадратного уравнения:

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$
$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} + i$$
$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} - i$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$
$$x_3 = \frac{-2 + \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} + i$$
$$x_4 = \frac{-2 - \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} - i$$

- Таким образом мы нашли 4 комплексных корня, которых имеет данное уравнение

Решение возвратного уравнения четвертой степени

1. Уравнение вида
$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$
формула называют возвратным уравнением четвертого порядка.
Легко проверить, что x=0 не является корнем этого уравнения. Поэтому можно разделить на x^2 обе части уравнения

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0$$

$$Ax^2+Bx+C+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}=0$$

$$Ax^2+\frac{A}{x^2}+Bx+\frac{B}{x}+C=0$$

$$A\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{1}{x}\right)+C=0$$

2. Проведем замену переменных :

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$A\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{1}{x}\right)+C=0$$

$$A\left(y^2-2\right)+By+C=0$$

$$Ay^2+By+C-2A=0$$

Таким образом, возвратное уравнение четвертой степени сводится к квадратному уравнению.

Пример: Найти все комплексные корни уравнения $2x^4+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})x^3+(4+\sqrt{6})x^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})x+2=0$

1. Это уравнение в силу симметрии коэффициентов является возвратным. Разделим на обе части уравнения (*x=0* корнем не является, поэтому деление не приведет к потере этого корня).

$$2x^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+4+\sqrt{6}+\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

2. Проведем группировку:

$$2x^2+\frac{2}{x^2}+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\frac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{x}+4+\sqrt{6}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)+4+\sqrt{6}=0$$

3. Сделаем замену переменной:

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)+4+\sqrt{6}=0$$

$$2\left(y^2-2\right)+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)y+4+\sqrt{6}=0$$

$$2y^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)y+\sqrt{6}=0$$

4. Возвращаемся к замене и решаем два квадратных уравнения

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad x^2+\sqrt{3}x+1=0$$

$$D=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\cdot1\cdot1=-1$$

$$x_3=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{D}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$$

$$x_4=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{D}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad 2x^2+\sqrt{2}x+2=0$$

$$D=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\cdot2\cdot2=-14$$

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{D}}{2\cdot2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{D}}{2\cdot2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}$$

Таким образом мы находим 4 комплексных корня возвратного уравнения четвёртой степени

Решение биквадратного уравнения

Уравнение четвертой степени вида ax^4+bx^2 + $c = 0$ называют биквадратным уравнением. Заменой $y = x^2$ биквадратное уравнение сводится к квадратному ay^2+by +c = 0, которое решается стандартным методом.

- Пример: Решите биквадратное уравнение $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$
- Проведем замену переменной $y = x^2$, тогда исходное уравнение сведется к квадратному:

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$$

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{-5 - \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

- Следовательно, $x^2 = \frac{1}{2}$или $x^2 = -3$. Из первого равенства находим $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, второе полученное уравнение действительных корней не имеет, зато имеет пару комплексно сопряженных корней $x = \pm\sqrt{3}$.

Решение уравнений четвертой степени по методу Феррари

В общем случае, приведенное уравнение четвертой степени вида $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

можно решить методом Феррари.

Находится y_0 - любой из корней кубического уравнения

$y^2 - by^2$+(ac-4d)y-$a^2d + 4bd - c^2 =$ 0.

Затем решаются два квадратных уравнения

$$x^2+\frac{A}{2}x+\frac{y_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B+y_0\right)x^2+\left(\frac{A}{2}y_0-C\right)x+\frac{y_0^{\,2}}{4}-D}=0$$

, в которых подкоренное выражение является полным квадратом.

Корни этих уравнений являются корнями исходного уравнения четвертой степени.

Пример: решите уравнение

$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$

Имеем *A*=*3*, *B*=*3*, *C*=*-1*, *D*=*-6*. Решим этот пример по методу Феррари.

1. Составляем и решаем кубическое уравнение

$$y^3-By^2+(AC-4D)y-A^2D+4BD-C^2=0$$

$$y^3-3y^2+21y-19=0$$

2. Одним из корней полученного кубического уравнения является $y_0 = 1$, так как $1^3-3\cdot 1^2+21\cdot 1-19=0$

Получаем два квадратных уравнения

$$x^2+\frac{A}{2}x+\frac{y_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B+y_0\right)x^2+\left(\frac{A}{2}y_0-C\right)x+\frac{y_0^{\,2}}{4}-D}=0$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}}=0$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)^2}=0$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=0 \quad \textit{или} \quad x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=0$$

$$x^2+2x+3=0 \quad \textit{или} \quad x^2+x-2=0$$

Корнями уравнения являются

$x_1 = -2$ и $x_2 = -1$

Метод Горнера

Рассмотрим метод Горнера на примере:

$$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$$

Для начала нужно методом подбора найти один корень. Обычно он является делителем свободного члена. В данном случае делителями числа **12** являются $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$**.** Начнем их подставлять по очереди:

1: 2 + 5 - 11 - 20 + 12 = -12 ⇒ число **1** не является корнем многочлена

-1: 2 - 5 - 11 + 20 + 12 = 18 ⇒ число **-1** не является корнем многочлена

2: 2 · 16 + 5 · 8 - 11 · 4 - 20 · 2 + 12 = 0 ⇒ число **2** является корнем многочлена

Мы нашли 1 из корней многочлена.

Корнем многочлена является **2,** а значит исходный многочлен должен делиться на **x − 2**. Для того, чтобы выполнить деление многочленов, воспользуемся схемой Горнера:

	2	5	-11	-20	12
2					

В верхней строке выставляются коэффициенты исходного многочлена. В первой ячейке второй строки ставится найденный нами корень **2.** Во второй строке пишутся коэффициенты многочлена, который получится в результате деления. Они считаются так:

	2	5	-11	-20	12
2	2				

Во вторую ячейку второй строки запишем число **2,** просто перенеся его из соответствующей ячейки первой строки.

	2	5	-11	-20	12
2	2	9			

$$2 \times 2 + 5 = 9$$

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7		

$$2 \times 9 - 11 = 7$$

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	

$$2 \times 7 - 20 = -6$$

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0

$$2 \times (-6) + 12 = 0$$

Последнее число - это остаток от деления. Если он равен 0, значит мы все верно посчитали.

Таким образом мы исходный многочлен разложили на множители:

$$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = (x - 2)(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6)$$

Но это еще не конец. Можно попробовать разложить таким же способом многочлен **$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$.** Опять ищем корень среди делителей свободного члена. Делителями числа **-6** являются **±1, ±2, ±3, ±6.**

1: $2 + 9 + 7 - 6 = 12 \Rightarrow$ число **1** не является корнем многочлена

-1: $-2 + 9 - 7 - 6 = -6 \Rightarrow$ число **-1** не является корнем многочлена

2: $2 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 6 = 60 \Rightarrow$ число **2** не является корнем многочлена

-2: $2 \cdot (-8) + 9 \cdot 4 + 7 \cdot (-2) - 6 = 0 \Rightarrow$

число **-2** является корнем многочлена

Напишем найденный корень в нашу схему Горнера и начнем заполнять пустые ячейки:

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0
-2	2				

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0
-2	2	5			

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0
-2	2	5	-3		

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0
-2	2	5	-3	0	

Таким образом мы исходный многочлен разложили на множители:

$$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = (x-2)(x+2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Многочлен **2x² + 5x - 3** тоже можно разложить на множители. Для этого можно решить квадратное уравнение через дискриминант:

$$D = 25 + 24 = 49 > 0 \rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -3;$$

$$\text{Ответ: } \pm 2;\ \frac{1}{2};\ -3.$$

Так, шаг за шагом, мы решили уравнение четвертой степени методом(схемой) Горнера.

Повторим основные методы

1. Решение двучленного уравнения четвертой степени:

$$Ax^4 + B = 0$$

$$x^4 + \frac{B}{A} = 0$$

$$x^4 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 + \frac{B}{A} - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}x^2 = 0$$

$$\left(x^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}x + \sqrt{\frac{B}{A}}\right) = 0$$

2. Решение возвратного уравнения четвертой степени:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$

$$Ax^2 + Bx + C + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} = 0$$

$$Ax^2 + \frac{A}{x^2} + Bx + \frac{B}{x} + C = 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

Проводим замену переменных

$$x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0$$

$$A\left(y^2 - 2\right) + By + C = 0$$

$$Ay^2 + By + C - 2A = 0$$

3. Решение биквадратного уравнения:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$$

$$x^2 = t,$$

$$ax^2 + bt + c = 0$$

4. Решение уравнений четвертой степени по методу Феррари:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$y^2 = by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0$$

$$x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B + y_0\right)x^2 + \left(\frac{A}{2}y_0 - C\right)x + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0$$

5. Решение уравнений четвертой степени по методу Горнера:

Схема Горнера

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + P(\alpha)$$

	a_0	a_1	a_2		a_k		a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1$		$b_k = a_k + \alpha \cdot b_{k-1}$		$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_{n-2}$	остаток $= a_n + \alpha \cdot b_{n-1}$

Спасибо за внимание