РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ
ЗАДАНИЕ С3

Составитель Епифанова Н.А. учитель математики МОУ «СОШ №31»

РЕШИТЬ СИСТЕМУ НЕРАВЕНСТВ

$$\begin{cases} 8^x + 8 \geq 4^{x+1} + 2^{x+1}, \\ \log_{x-1} 7 > 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Решим первое неравенство системы

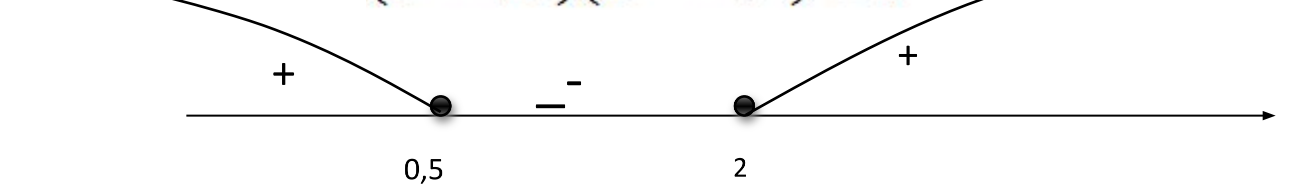
$$8^x + 8 \geq 4^{x+1} + 2^{x+1}$$

$$8^x + 8 - 4^{x+1} - 2^{x+1} \geq 0$$

$$4^x(2^x - 4) - 2(2^x - 4) \geq 0$$

$$(2^x - 4)(4^x - 2) \geq 0$$

$$(2^x - 2^2)(2^{2x} - 2^1) \geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} x \leq 0{,}5, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$

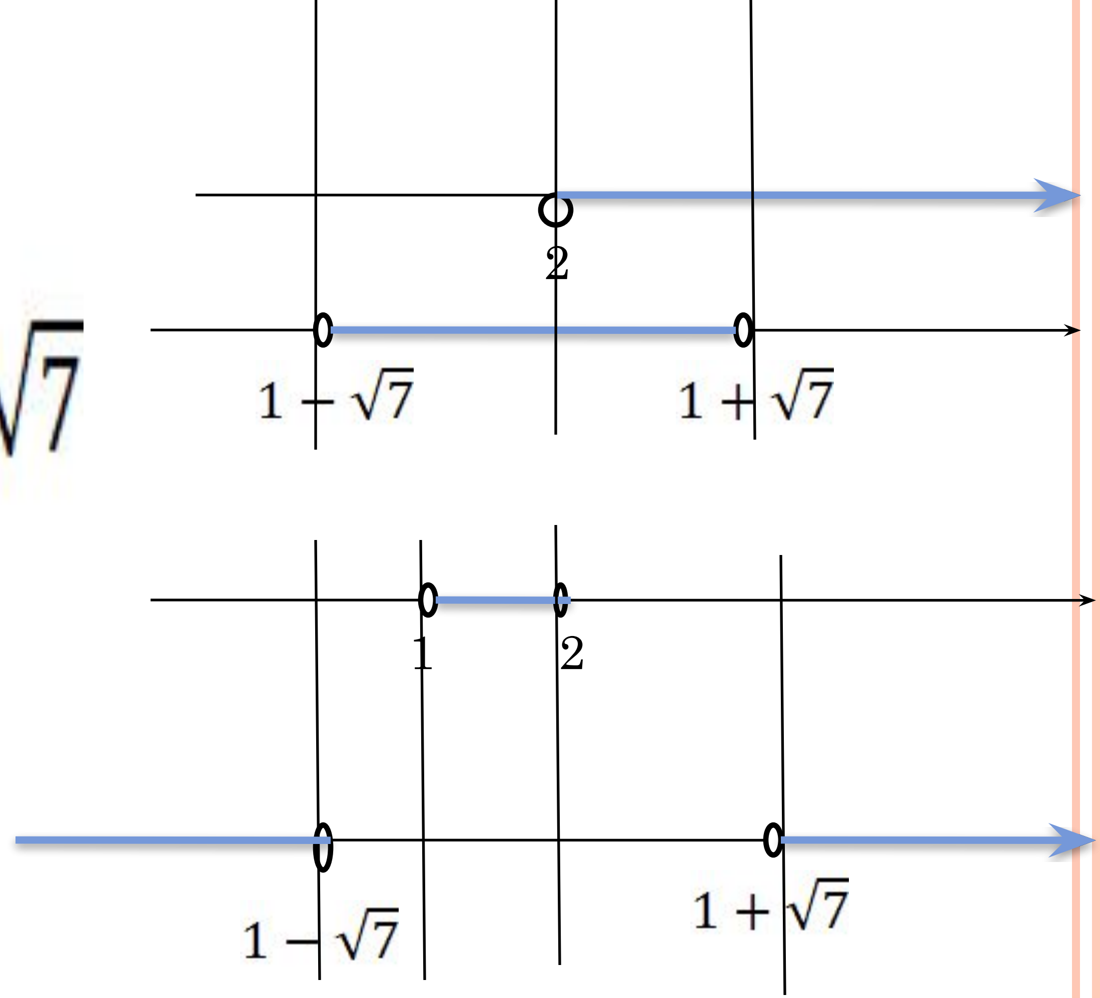
Рассмотрим решение второго неравенства

$$\log_{x-1} 7 > 2.$$

Второе неравенство системы равносильно совокупности двух систем неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ (x-1)^2<7 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1 \\ (x-1)^2>7 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 2 \\ 1-\sqrt{7} < x < 1+\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x < 1-\sqrt{7} \\ x > 1+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$



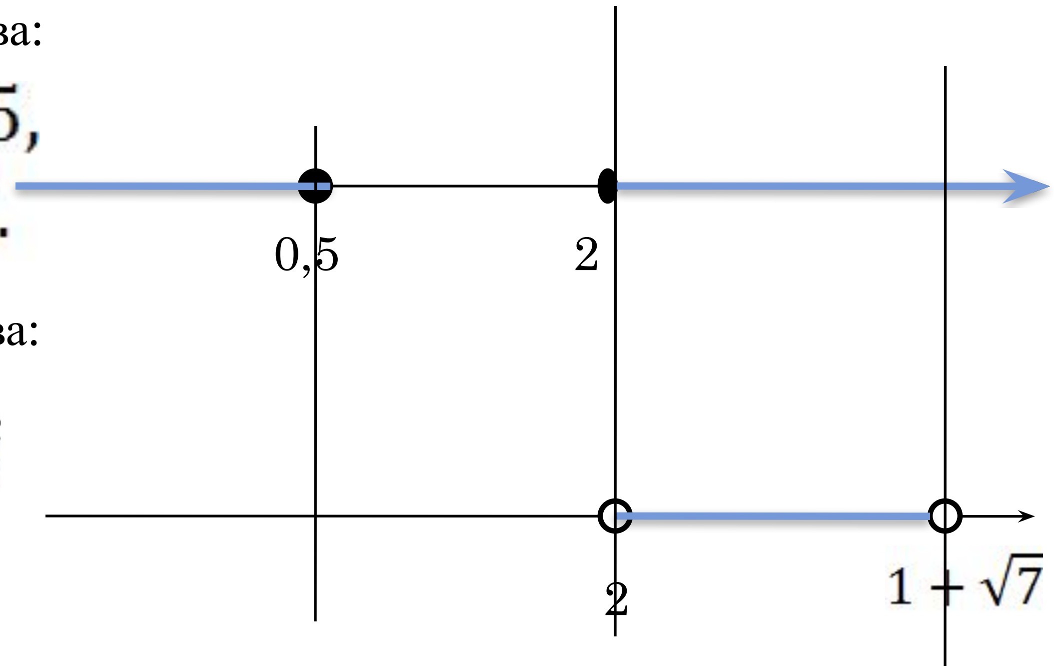
Решение второго неравенства: $2 < x < 1+\sqrt{7}$

Была дана система

$$\begin{cases} 8^x + 8 \geq 4^{x+1} + 2^{x+1}, \\ \log_{x-1} 7 > 2. \end{cases}$$

Решение первого неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} x \leq 0{,}5, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$



Решение второго неравенства:

$$2 < x < 1 + \sqrt{7}$$

Решение системы:

Ответ: $(2{:}1 + \sqrt{7})$.

$$\begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0, \\ \log_3^2 x + 4\log_3 x + 3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 \cdot 4^x - 65 \cdot 2^x + 8 \le 0, \\ \log_{|x|}^2 (x^4) + \log_3 (x^2) \le 18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{2x+4} - 245 \cdot 3^x + 3 \le 0, \\ \log_2 (x^2 + 4x + 5) > 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x + \dfrac{16}{2^x} \ge 10, \\ \log_{x+2} (x - 2) \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9^{x+1} + 3 \ge 28 \cdot 3^x, \\ \log_2 (x^2 - 2x) \le 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4^{\sqrt{x}} - 3\cdot 2^{\sqrt{x}} + 2} < \dfrac{1}{6}, \\ \log_{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{5}{2}x - 1\right) \geq -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25^x - 30\cdot 5^x + 125 \geq 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2^x + 36 \leq 78\cdot\log_3(x+3), \\ 12x + 2^x \geq 78\cdot\log_3(x+3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(5x-2) \geq 0, \\ 15^x - 9\cdot 5^x - 3^x + 9 \leq 0. \end{cases}$$

РЕШИТЬ СИСТЕМУ НЕРАВЕНСТВ:

$$\begin{cases} \left(\log_{|x|}(x^4)\right)^2 + \log_3(x^2) \le 18, \\ 8 * 4^x - 65 * 2^x + 8 \le 0. \end{cases}$$

Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

РЕШИМ ПЕРВОЕ НЕРАВЕНСТВО:

$$(\log_{|x|}(x^4))^2 + \log_3(x^2) \le 18,$$

$$(4\log_{|x|}|x|)^2 + 2\log_3(|x|) \le 18,$$

$$16(\log_{|x|}|x|)^2 + 2\log_3(|x|) \le 18,$$

$$16 + 2\log_3(|x|) \le 18,$$

$$2\log_3(|x|) \le 2$$

$$\log_3(|x|) \le 1$$

$$|x| \le 3$$

$$-3 \le x \le 3$$

РЕШИМ ВТОРОЕ НЕРАВЕНСТВО:

$$8 * 4^x - 65 * 2^x + 8 \le 0$$

Пусть $2^x = a, a > 0.$

$$8 * a^2 - 65 * a + 8 \le 0$$

$$2^{-3} \le a \le 2^3$$

$$2^{-3} \le 2^x \le 2^3$$

$$-3 \le x \le 3$$

Итак, решение первого неравенства:

$$-3 \le x \le 3$$

Решение второго неравенства:

$$-3 \le x \le 3$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Решением системы неравенства является:

$$x \in [-3; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 3]$$

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(5x-2) \geq 0 \\ 15^x - 9 * 5^x - 3^x + 9 \leq 0 \end{cases}$$

Найдём ОДЗ

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \log_x 2x > 0 \\ \log_x 2x \neq 1 \\ 5x - 2 > 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ \log_x 2x > \log_x 1 \\ \log_x 2x \neq \log_x x \\ x > 0{,}4. \end{cases}$$

данная система равносильна двум системам

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ 0 < x < 1 \\ 2x < 1 \\ 2x \neq x \\ x > 0,4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 1 \\ 2x > 1 \\ 2x \neq x \\ x > 0,4 \end{cases}$$

$0,4 < x < 0,5$ или $x > 1$

Итак, ОДЗ: $\in (0,4; 0,5) \cup (1; \infty)$

Решим первое неравенство:

$$\log_{\log_x 2x}(5x-2) \geq 0$$

Возможны два случая: основание больше 1 и основание больше 0 и меньше 1. Рассмотрим эти случаи.

1 случай:
$$\begin{cases} 0 < \log_x 2x < 1 \\ 5x - 2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_x 1 < \log_x 2x < \log_x x \\ x > 0{,}6 \end{cases}$$

данная система равносильна двум системам

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 > 2x > x \\ x \le 0{,}6 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x > 1 \\ 1 < 2x < x \\ x \le 0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < x < 0{,}5 \\ x \le 0{,}6 \end{cases}$$

Решений нет

Итак $x \in (0;\ 0{,}5)$ учитывая ОДЗ получаем $x \in (0{,}4;\ 0{,}5)$

2 случай

$$\begin{cases} \log_x 2x > 1 \\ 5x - 2 \geq 1 \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x < 1 \\ X \geq 0{,}6 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x > 1 \\ X \geq 0{,}6 \end{cases}$$

Решений нет

x > 1

учитывая ОДЗ, получаем $\in (1;\ \infty)$

Итак, решение первого неравенства: x$\in (0{,}4; 0{,}5) \cup (1; \infty)$

Решим второе неравенство

$$15^x - 9 * 5^x - 3^x + 9 \le 0$$

$$5^x(3^x - 9) - (3^x - 9) \le 0$$

$$(5^x - 1)(3^x - 9) \le 0$$

Получаем $0 \le x \le 2$

Итак, решение первого неравенства: $x \in (0,4; 0,5) \cup (1; \infty)$

Решение второго неравенства: $0 \le x \le 2$

Значит, система неравенств имеет следующее решение: $x \in (0,4; 0,5) \cup (1; 2]$

Спасибо за внимание