

# Метод рационализации и статистика сдачи ЕГЭ по математике

МОАУ “Лицей №6” г. Оренбург

Кузнецова С.Д.

## Статистика результатов ЕГЭ по математике в России за 2011-2014 годы.

Год	Число сдававших	Минимальные баллы	Число 100-балльников	Средний балл	Не преодолели порог
2011	738 746	24 балла	205	47,49	4,9%
2012	831 068	24 балла	56	45,2	5,89%
2013	803 741	24 балла	538	48,7	6,2%
2014	708 668	20 баллов	64	39,63	

## Число участников ЕГЭ по математике в 2015-2016 годах.

Год	Вид экзамена		Число участников, Не преодолевших минимальный балл на профильном экзамене
	Базовый	Профильный	
2015	396 000	521 000	21,1%
2016	561 000	439 000	15,3%

## Базовый уровень

Год	2	3	4	5	Средний балл
2015	7,4%	21,4%	40%	31,2%	3,95
2016	4,7%	16,4%	39,5%	39,4%	4,14

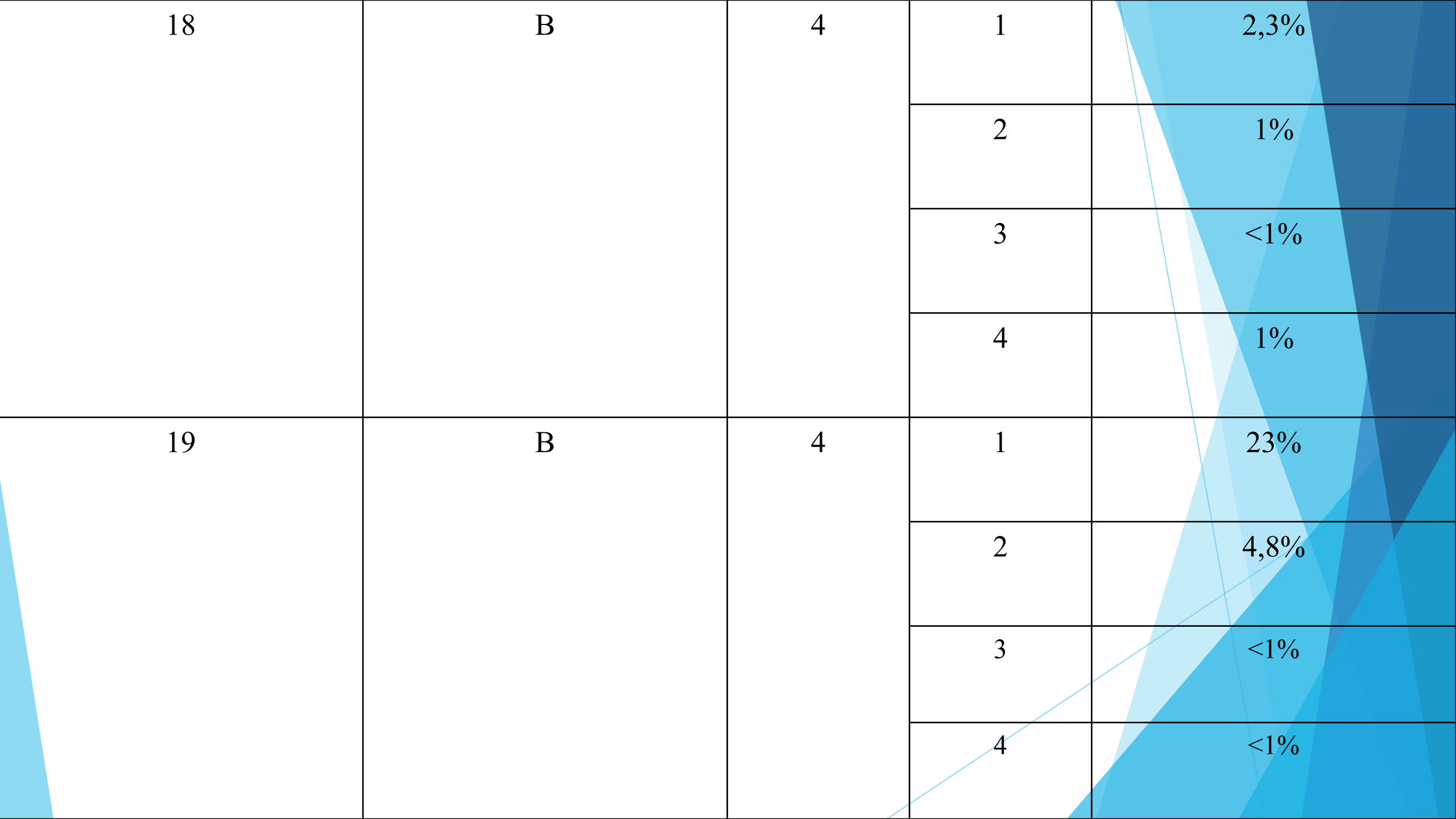
## Профильный уровень

Год	Ниже 27 баллов	27-40	40-80	80-100	Средний балл
2015	21,1%	26,6%	50,8%	1,5%	45,6
2016	15,3%	29,4%	52,7%	2,9%	51,9

Анализ результатов решения задания на ЕГЭ  
выпускниками РФ на основе материалов ФИПИ за 2016  
год

Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл	Процент выполнения
1	Б	1	91,4%
2	Б	1	94,2%
3	Б	1	89,6%
4	Б	1	75,6%
5	Б	1	90,7%
6	Б	1	78,8%
7	Б	1	50,7%
8	Б	1	51,5%
9	П	1	59,1%
10	П	1	38,5%
11	П	1	38,4%
12	П	1	44,9%

Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл	Набранный балл	Процент выполнения
13	П	2	1	11,1%
			2	40,8%
14	П	2	1	4,6%
			2	1,2%
15	П	2	1	4,6%
			2	10,5%
16	П	3	1	1,6%
			2	0,31%
			3	0,85%
17	П	3	1	2,7%
			2	2,4%
			3	7,8%



18

B

4

1

2,3%

2

1%

3

<1%

4

1%

19

B

4

1

23%

2

4,8%

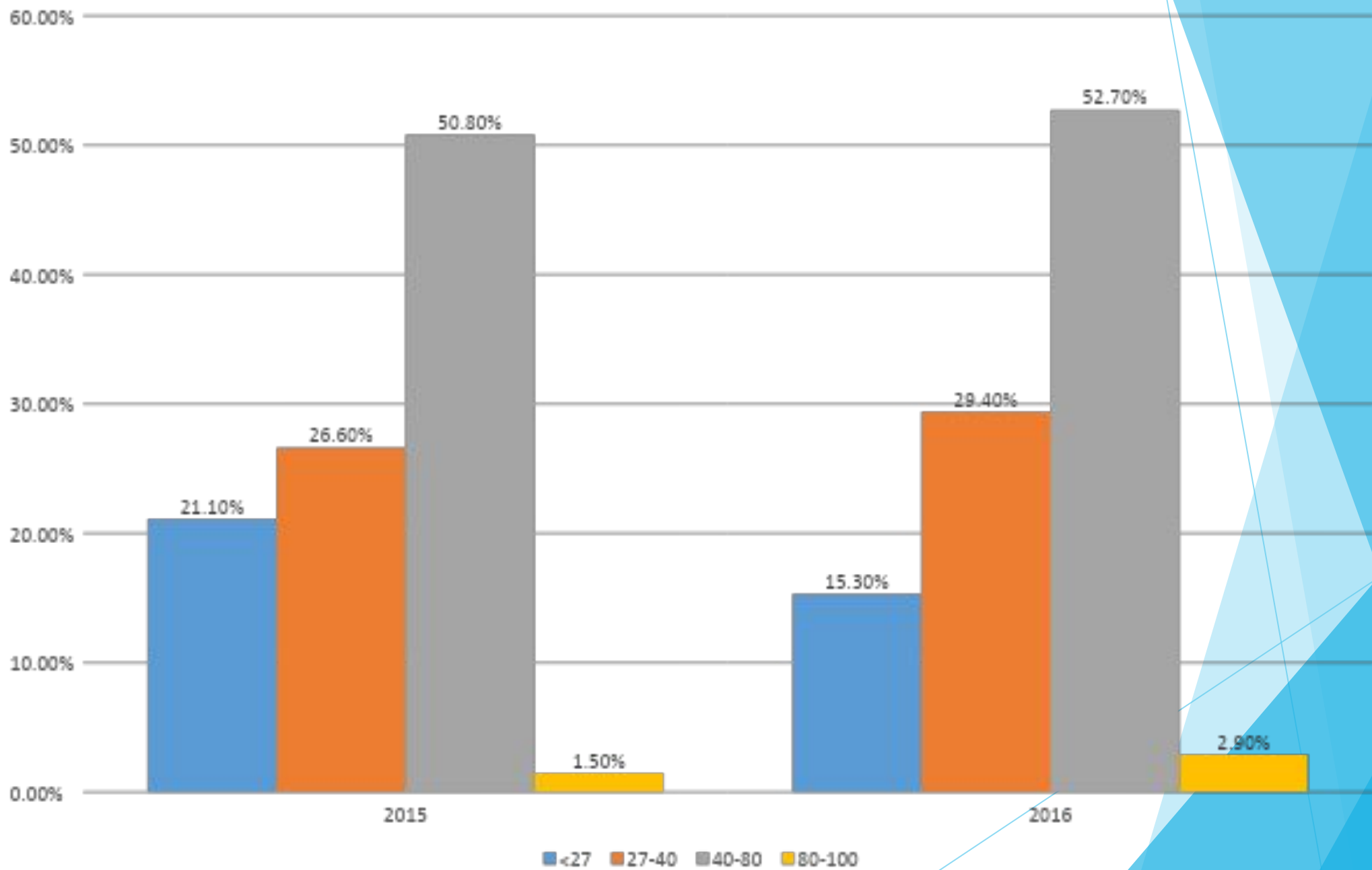
3

<1%

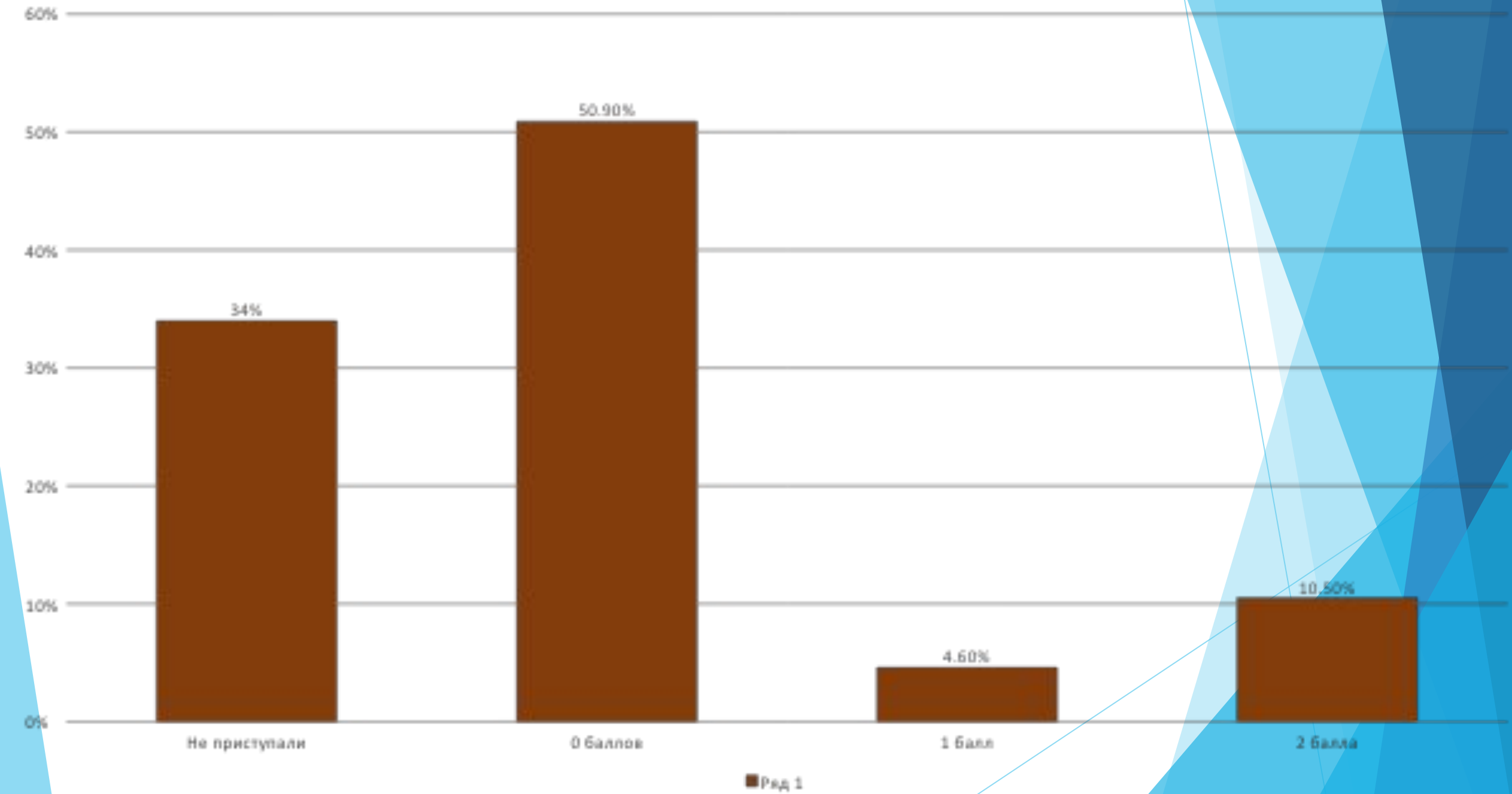
4

<1%

Гистограмма сдачи профильного уровня ЕГЭ по математике 2015 – 2016 годы.



# Выполнение 15 задания.





# Метод рационализации

Данный метод встречается под названиями:

- ▶ метод декомпозиции
- ▶ метод замены множителей
- ▶ обобщение метода интервалов

# Теоретическая основа

- ▶ Два неравенства  $F$  и  $G$  называют равносильными, если множества их решений совпадают.
- ▶ Если функция  $f(x)$  строго возрастает, то знак выражения  $f(x_1) - f(x_2)$  совпадает со знаком выражения  $x_1 - x_2$ .
- ▶ Если функция  $f(x)$  строго убывает, то знак выражения  $f(x_1) - f(x_2)$  совпадает со знаком выражения  $x_2 - x_1$ .

	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
1б	$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2a	$\log_h - 1$	$(h - 1)(f - h)$
2б	$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
3	$\log_f h - \log_a h$ ( $g \neq 1, f \neq 1$ )	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
4	$h^f - h^g$ ( $h > 0$ )	$(h - 1)(f - g)$
4a	$h^f - 1$	$(h - 1)f$
5	$f^h - g^h$ ( $f > 0, g > 0$ )	$(f - g)h$
6	$ f  -  g $	$(f - g)(f + g)$
7	$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$	$f - g$

№	Выражение	Рационализирующее выражение
1.	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2.	$\log_f h - \log_g h$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
3.	$\log_h f \times \log_p q$	$(h - 1)(f - 1)(p - 1)(q - 1)$
4.	$\log_h f + \log_h g$	$((f \times g) - 1)(h - 1)$
5.	$f^h - g^h$	$(f - g)h$
6.	$h^f - h^g$	$(h - 1)(f - g)$
7.	$ f  -  g $	$(f - g)(f + g)$
8.	$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$	$f - g$

## Метод рационализации для логарифмических неравенств

**Правило:** Знак  $\log_a f(x)$  совпадает со знаком произведения  $(a-1)(f(x)-1)$  в ОДЗ.

**Правило:** Знак разности  $\log_a f(x) - \log_a g(x)$  совпадает со знаком произведения  $(a-1)(f(x)-g(x))$  в ОДЗ.

# Неравенства для логарифмов с переменным основанием

$$1) \log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0). \end{cases}$$

$$2) \log_{a(x)} f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - 1) \geq 0 (\leq 0). \end{cases}$$

$$3) \log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0 (< 0). \end{cases}$$

# Логарифмические неравенства

**Вывод:**  $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) < 0 \iff$

$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ 0 < a(x) \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{f(x) - g(x)}{a(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

## Метод рационализации для логарифмических неравенств

**Правило:** Решение неравенств вида

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{h(x)} \geq 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0$$

**Правило:** Решение неравенств вида

$$\frac{f(x)(\log_a g_1(x) - \log_a g_2(x))}{\log_b g_3(x)} > 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{f(x)(a - 1)(g_1(x) - g_2(x))}{(b - 1)(g_3(x) - 1)} > 0$$



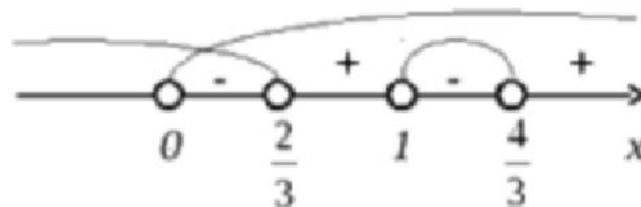
# Решите неравенство:

$$\log_{|3x-3|}(25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1} + 3^{x-1}) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_{|3x-3|}(5^x - 3^x)(5^x + 3^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x)(5^{x-1} + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0, \\ 5^x - 3^x > 0, \\ (|3x-3|-1)(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 > 0, \\ (|3x-3|-1)(4 \cdot 5^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0, \\ (3x-4)(3x-2) \left( \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^0 \right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0, \\ \left(x - \frac{4}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) (x-1) < 0 \end{cases}$$



Ответ:  $(0; 2/3) \cup (1; 4/3)$ .

Решите неравенство: 1.  $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0$

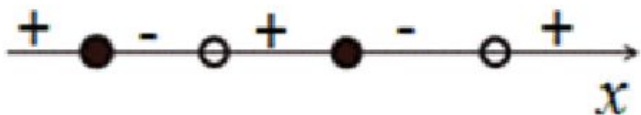
Решение

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) - \log_{\frac{2x+2}{5x-1}} 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 + x - 2 > 0, \frac{2x+2}{5x-1} > 0, \\ \frac{2x+2}{5x-1} \neq 1, \\ \left(\frac{2x+2}{5x-1} - 1\right)(10x^2 + x - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x < -0,5) \text{ или } (x > 0,4), \\ (x < -1) \text{ или } (x > 0,2), \\ \frac{2x+2-5x+1}{5x-1} \neq 0, \\ \frac{(2x+2-5x+1)(10x^2 + x - 2)}{5x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x < -1) \text{ или } (x > 0,4), \\ \frac{-3x+3}{5x-1} \neq 0, \\ \frac{(x-1)(x+0,6)(x-0,5)}{5x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x < -1) \text{ или } (x > 0,4), \\ x \neq 1, x \neq 0,2, \\ (x \leq -0,6) \text{ или } (0,2 < x < 0,5) \text{ или } (x > 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < -1) \text{ или } (0,4 < x \leq 0,5) \text{ или } (x > 1)$$



Решите неравенство:

$$\frac{\log_5(6x+4)}{\log_{0,7}(8x+9)} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{(5-1) \cdot (6x+4-1)}{(0,7-1) \cdot (8x+9-1)} \geq 0, \\ 8x+9 \neq 1, \\ 6x+4 > 0, \\ 8x+9 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x+3}{8x+8} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{9}{8}; \end{cases}$$

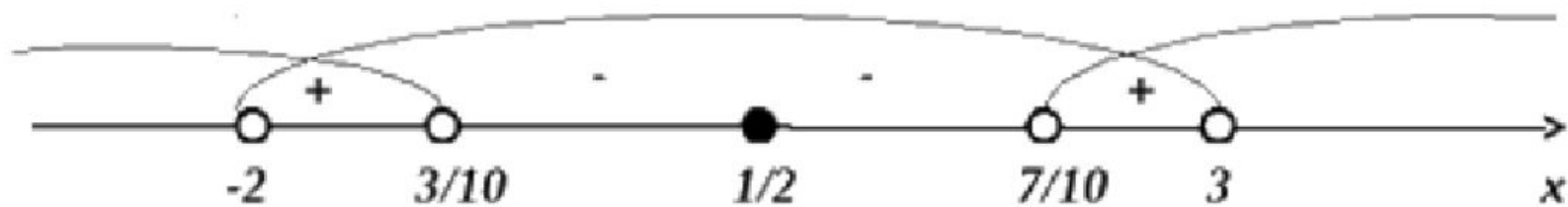
Ответ :  $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$

Решите неравенство:

$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0 \quad (1)$$

Решение: а) ОДЗ:  $\begin{cases} 3x^2 - 3x + 7 > 0, \\ -x^2 + x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R, \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 3.$

б) (1)  $\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x + 7 - 6 - x + x^2}{(x - \frac{7}{10})(x - \frac{3}{10})} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x - \frac{7}{10})(x - \frac{3}{10})} \geq 0$



Ответ:  $(-2; \frac{3}{10}) \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup (\frac{7}{10}; 3).$

# Решите неравенство:

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Запишем неравенство в виде  $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$  и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x + 2)(x^2 - 2x - 3) < 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2(x - 3) < 0 \\ x > -1,5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

*Ответ:*  $(-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$ .



# Логарифмическое неравенство

Решить неравенство  $\frac{\log_2(4x+3) \cdot \log_5(2x+5)}{(\log_3 6x) \cdot \log_4 x} \geq 0$ .

*Решение.* Представим каждый из логарифмов в виде разности двух логарифмов, воспользуемся равносильными преобразованиями.

$$\frac{\log_2(4x+3) \cdot \log_5(2x+5)}{(\log_3 6x) \cdot \log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_2(4x+3) - \log_2 1)(\log_5(2x+5) - \log_5 1)}{(\log_3 6x - \log_3 1)(\log_4 x - \log_4 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(4x+3-1)(2x+5-1)}{(6x-1)(x-1)} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4x+2)(2x+4)}{(6x-1)(x-1)} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup (1; +\infty).$$

*Ответ:*  $x \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup (1; +\infty)$ .

Решить неравенство:

$$\frac{\log_3(x + \frac{4}{5})}{\log_7(x^2 + 2x + \frac{7}{16})} < 0$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x + \frac{4}{5} > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} \neq 1; \end{cases}$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{(3-1)(x + \frac{4}{5} - 1)}{(7-1)(x^2 - 2x + \frac{7}{16} - 1)} < 0, \quad \frac{x - \frac{1}{5}}{(x + \frac{1}{14})(x - \frac{9}{4})} < 0,$$

Ответ  
:

$$\left(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$$

Решить неравенство:

$$\log_{x+\frac{5}{2}} \left( \frac{x-5}{2x-3} \right)^2 > 0$$

Решение.

Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} x + \frac{5}{2} > 0, \\ x + \frac{5}{2} \neq 1, \\ \frac{x-5}{2x-3} \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq 5, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 5\right); (5; +\infty)$$

Применим метод рационализации



$$\left(x + \frac{5}{2} - 1\right) \left(\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 - 1\right) > 0$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)(3x^2 - 2x - 16)}{(2x - 3)^2} < 0,$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 2)(3x - 8)}{(2x - 3)^2} < 0$$

$$\left[-\frac{5}{2}; -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{9}{8}; \frac{8}{3}\right]$$

С учетом области определения

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 5\right); (5; +\infty)$$

Ответ:  $\left(-\frac{5}{2}; -2\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$

Решить неравенство:

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} \leq 4 \log_x 3 - 1$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_9 x \neq -1. \end{cases}$$

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} - \frac{2}{\log_9 x} + 1 \leq 0, \quad \log_9 x = t,$$

$$\frac{t+4}{1+t} - \frac{2}{t} + 1 \leq 0,$$

$$\frac{t^2 + 4t - 2 - 2t + t^2 + t}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{2(t+2)(t - \frac{1}{2})}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{2t^2 + 3t - 2}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81})(x - 3)}{(\log_9 x - \log_9 1)(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9})} \leq 0,$$

Применим метод рационализации

$$\frac{(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81})(x - 3)}{(\log_9 x - \log_9 1)(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9})} \leq 0,$$

$$\frac{(x - \frac{1}{81})(x - 3)}{(x - 1)(x - \frac{1}{9})} \leq 0$$

Ответ:  $[\frac{1}{81}; \frac{1}{9}) \cup (1; 3]$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(2x^2 + x - 1) - \log_2(11x - 6 - 3x^2)}{\log_2 \frac{3x-1}{x+2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x^2 + x - 1) - (11x - 6 - 3x^2)}{\frac{3x-1}{x+2} - 1} \geq 0, \\ 2x^2 + x - 1 > 0, \\ 11x - 6 - 3x^2 > 0, \\ \frac{3x-1}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3} \geq 0, \\ \frac{2}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1,5 < x < 3. \end{cases}$$

## Метод рационализации для показательных неравенств

**Правило:** Знак разности  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  совпадает со знаком произведения

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

**Правило:** Для любой функции  $h(x)$  имеет место условие равносильности

$$\frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \quad \text{ОДЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0$$

Решите неравенство:

$$\frac{3^{x+1} - 1}{\log_3 x - 2} \leq 0$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$\frac{3^{x+1} - 3^0}{\log_3 x - \log_3 9} \leq 0$$

$$\frac{(3-1)(x+1-0)}{(3-1)(x-9)} \leq 0 \quad \frac{x+1}{x-9} \leq 0$$

Ответ:  $x \in (0; 9)$

Решите неравенство:

$$21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0,$$

$$3^x \cdot 7^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0,$$

$$3^x(7^x - 1) - 9(7^x - 1) \leq 0,$$

$$(7^x - 1)(3^x - 9) \leq 0,$$

$$(7^x - 7^0)(3^x - 3^2) \leq 0,$$

$$(x - 0)(x - 2) \leq 0,$$

$$x(x - 2) \leq 0,$$



Решить неравенство:

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 2^4)} \geq 0$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3 - 1)(x - 0)(2 - 1)(x^2 - 4)} \geq 0,$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x^2 - 4)} \geq 0$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 2)(x + 2)} \geq 0$$

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)} \geq 0$$

Ответ:  $(0; 1]; (2; +\infty)$

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0 \\ \frac{25 \cdot 0,5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \geq 0,5^{x+2}, \end{cases}$$

Решим первое неравенство

ОДЗ:  $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 6)$ .

$$\frac{\lg x^4 - \lg(x^2 - 12x + 36)}{\lg(6-x) - \lg 1} \leq 0, \quad \frac{x^4 - (x^2 - 12x + 36)}{(6-x) - 1} \leq 0, \quad \frac{x^4 - (x-6)^2}{5-x} \leq 0,$$

$[-3; 2] \cup (5; +\infty)$ .

Решим второе

неравенство

$$\frac{25 \cdot 2^{-x+1} - 2^{x-2} - 2^0 + 2^{x-2}}{2^{x+2} - 2^{2x}} \geq 0. \quad \frac{25 \cdot 2^{-x+1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 2^{2x}} - 2^{-x-2} \geq 0.$$

Так как  $25 = 2^{\log_2 25}$ , то получим:

$$\frac{2^{-x+1+\log_2 25} - 2^0}{2^{x+2} - 2^{2x}} \geq 0. \quad \frac{-x+1+\log_2 25}{x+2-2x} \geq 0. \quad (-\infty; 2) \cup [\log_2 50; +\infty)$$

Решение системы с учётом ОДЗ:  $[-3; 0) \cup (0; 2) \cup (5; 6]$ .

## Иррациональные неравенства

**Правило:** Если  $g(x) \geq 0$ , то знак разности  $\sqrt{f(x)} - g(x)$  совпадает со знаком разности  $f(x) - g^2(x)$  в ОДЗ.

Решить неравенство  $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x$

Решение.

Запишем неравенство в виде  $\sqrt{x^2 - 6x} - (8 + 2x) < 0$

Заменяем неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\begin{cases} x^2 - 6x - (8 + 2x)^2 < 0, & \square \left[-\infty; -10\frac{2}{3}\right]; \square \left[-2; +\infty\right] \\ 8 + 2x > 0, & \square \left[-4; +\infty\right] \\ x^2 - 6x \geq 0; & \square \left[-\infty; 0\right] \square \left[6; +\infty\right]. \end{cases}$$

Ответ:  $(-2; 0] \cup [6; +\infty)$

## Более сложные неравенства

**Правило:** Так как при  $g(x) \geq 0$ , знак разности  $\sqrt{f(x)} - g(x)$  совпадает со знаком разности  $f(x) - g^2(x)$  в ОДЗ, то получаются условия равносильности:

1) если  $g(x) \geq 0$ , то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ОДЗ} \quad \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \leq 0$$

$$h(x) < 0$$

2) если  $g(x) < 0$ , то

**Правило:** Так как знак разности  $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$   
совпадает со знаком разности  $f(x) - g(x)$   
в ОДЗ, то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \leq 0 \quad \text{ОДЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \leq 0$$

**Правило:** Знак разности  $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$  совпадает со знаком разности  $f(x) - g(x)$  в ОДЗ.

Решить неравенство  $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$

Решение.

Запишем неравенство в виде  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5} \leq 0$ ;

Заменим неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\begin{cases} 2x+1 - (x^3 - 4x^2 + x + 5) \leq 0, \\ 2x+1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 - x + 4 \geq 0, \\ x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-1; 1] \cup [4; +\infty) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-\frac{1}{2}; +\infty) \\ \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } [-\frac{1}{2}; 1] \cup [4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} \leq 1 \quad \text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} 1-3x \geq 0, & [-2; \frac{1}{3}] \\ 2+x \geq 0, \\ \sqrt{2+x}-1 \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} - 1 \leq 0, \quad \frac{\sqrt{1-3x}-1-\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}-1} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{1}} \leq 0, \quad \frac{1-3x-2-x}{2+x-1} \leq 0, \quad (-\infty; -1) \cup [-\frac{1}{4}; +\infty).$$

С учётом ОДЗ:  $[-2; -1) \cup [-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$ .

## **Алгоритм метода рационализации**

- 1. Выписать условия, задающие ОДЗ исходного неравенства.**
- 2. Привести исходное неравенство к стандартному виду.**
- 3. Указать область допустимых значений для получившегося неравенства.**
- 4. Заменить все выражения на рациональные (используя специальную таблицу перехода к рациональным выражениям).**
- 5. Решить полученное неравенство. (Например, методом интервалов.)**
- 6. Записать ответ полученного неравенства (он же является ответом исходного неравенства).**



Спасибо за внимание