Введение в математический анализ

Тема. Функции и способы их задания

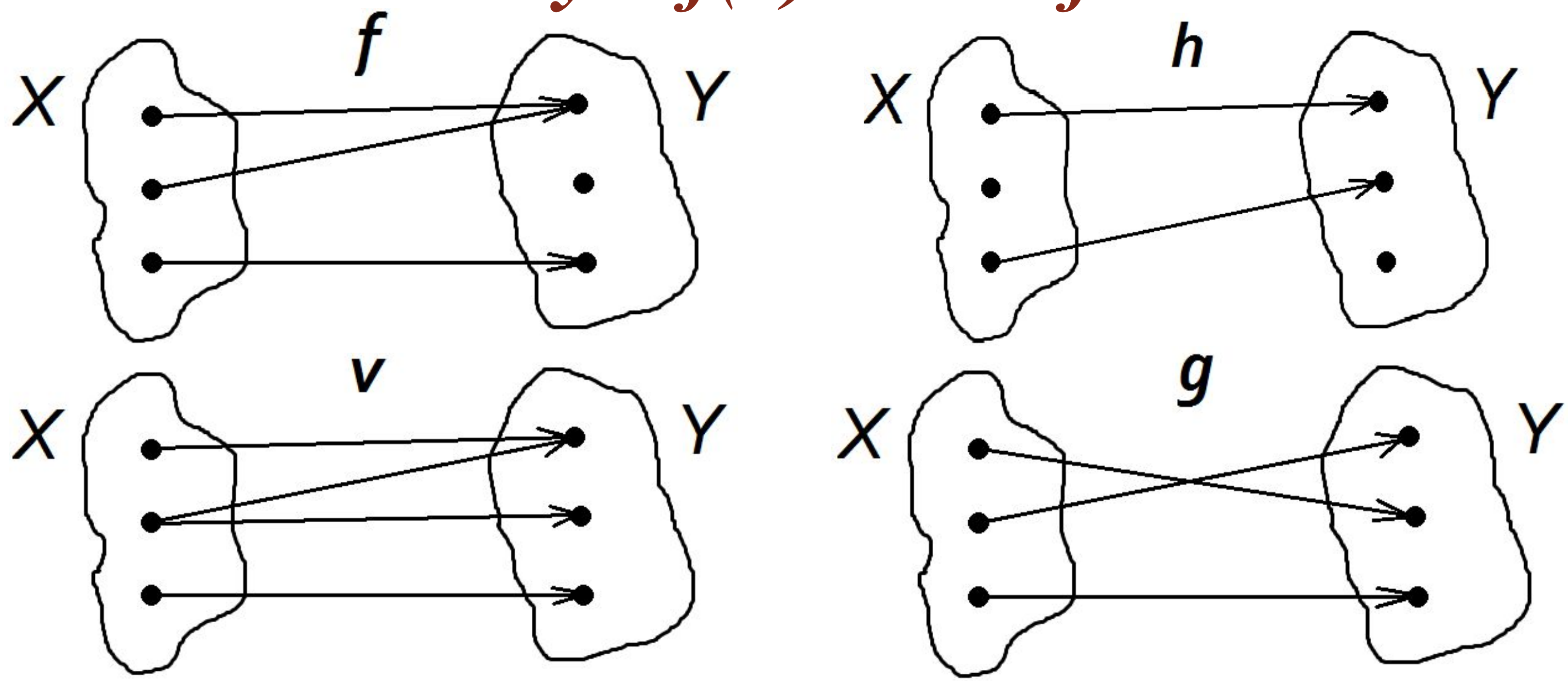
ВОПРОС 1

Функция и её свойства.

Определение

Пусть даны два непустых множества *X* и *Y*. Соответствие *f*, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется <u>*функцией*</u>.

Записывается $y = f(x)$ или $f : X \to Y$.



Определение

Множество ***X*** **называется** ***<u>областью определения</u>*** **функции и обозначается** ***D(f)*.**

Множество всех ***y*** $\in$ ***Y*** **называется** ***<u>множеством значений</u>*** **функции и обозначается** ***E(f)*.**

Переменная ***x*** **называется** ***аргументом*** **или независимой переменной, а** ***y*** **–** ***функцией*** **или зависимой переменной .**

Способы задания функции

1. **Аналитический способ:** функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Примеры: $y = x - 5$ $\quad$ $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x \geq 0 \\ x - 4, & \text{при } x < 0 \end{cases}$ $\quad$ $y^2 - 4x = 0$

2. **Графический способ:** задается график функции.

Графиком функции y(x) называется множество всех точек *Oxy*, абсциссами которых являются аргументы ($x \in X$), а ординатами – соответствующие им значения функции.

3. **Табличный способ:** функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функции, полученных опытным путём или в результате наблюдений.

Свойства функций

1. Функция $y(x)$ называется ***чётной***, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = y(x)$ ($-x \in D$). График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y(x)$ называется ***нечётной***, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = -y(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

$y=x^2$ – чётная функция, т.к. $y(-x)=(-x)^2 = x^2 = y(x)$

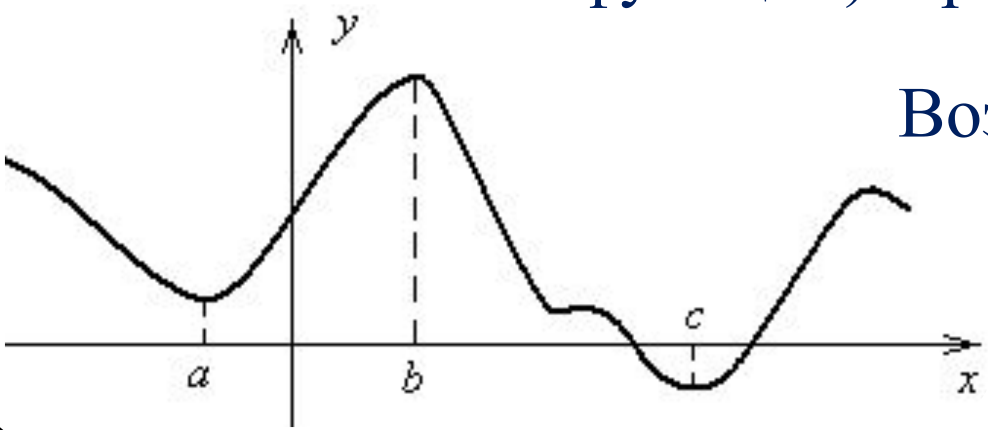
$y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $y(-x)=(-x)^3 = -x^3 = -y(x)$

$y=x-1$ – функция общего вида, т.к. $y(-x) \neq y(x) \neq -y(x)$

Свойства функций

2. Функция $y(x)$ называется ***возрастающей***, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) > y(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции). График идёт снизу вверх.

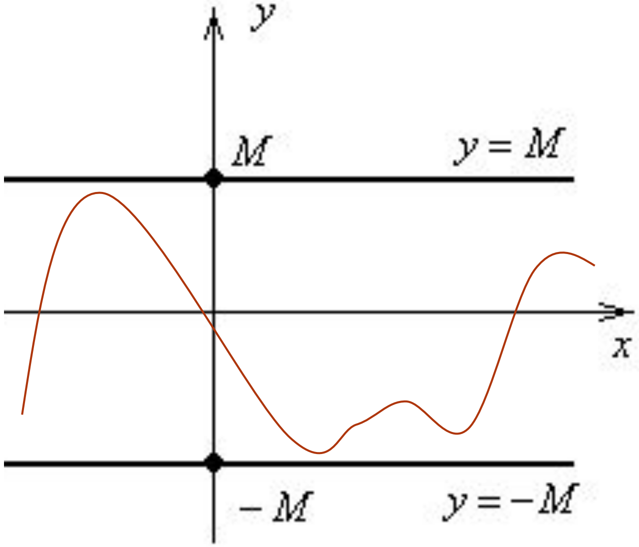
Функция $y(x)$ называется ***убывающей***, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции). График идёт сверху вниз.



Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***.

Свойства функций

3. Функция $y(x)$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M>0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|y(x)| \le M$.



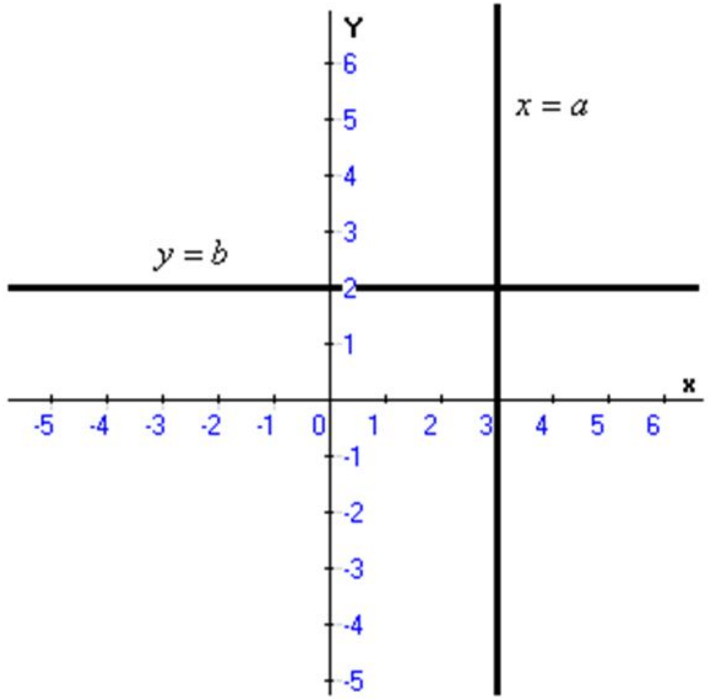
Следовательно, график функции лежит между прямыми $y = M$ и $y = -M$.

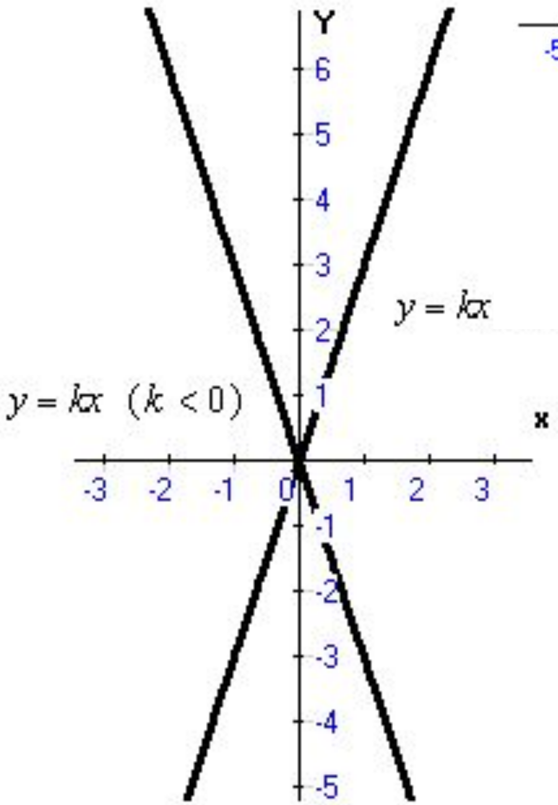
4. Функция $y(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число T, что для всех $x \in D$ выполняется равенство $y(x+T)=y(x)$ (если $x+T \in D$). При этом число T называется *периодом* функции. График повторяет сам себя.

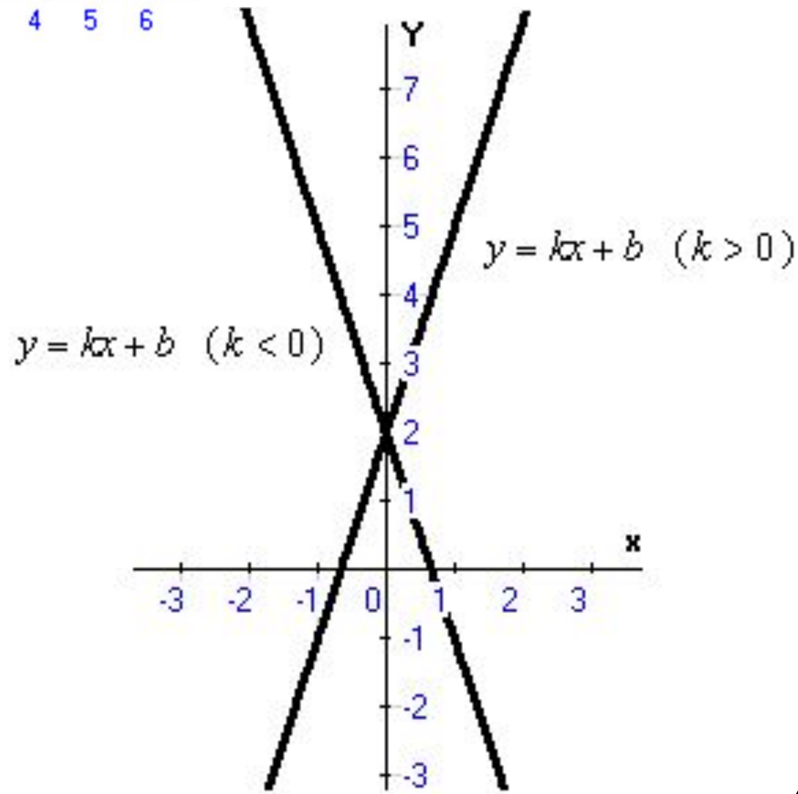
ВОПРОС 2

Основные виды функций и их графики.

Линейные функции





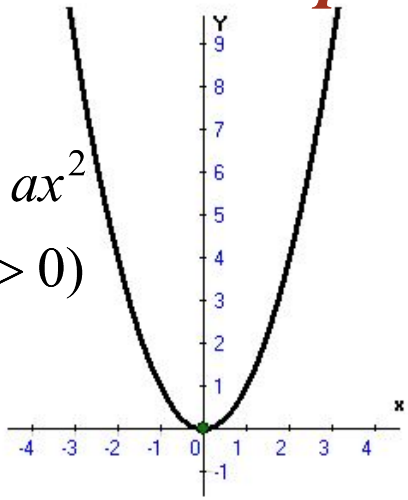


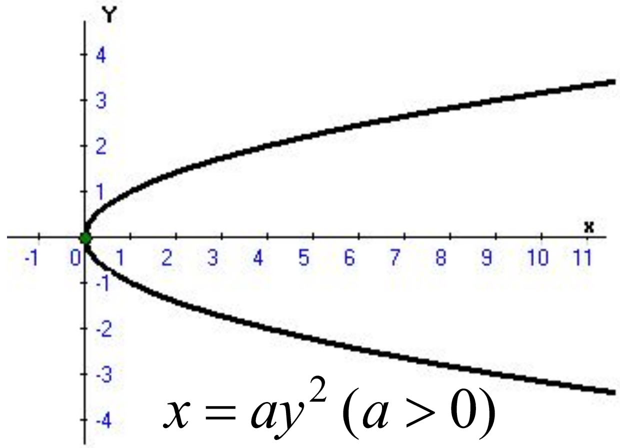
Степенные функции

Парабола

$y = ax^2$

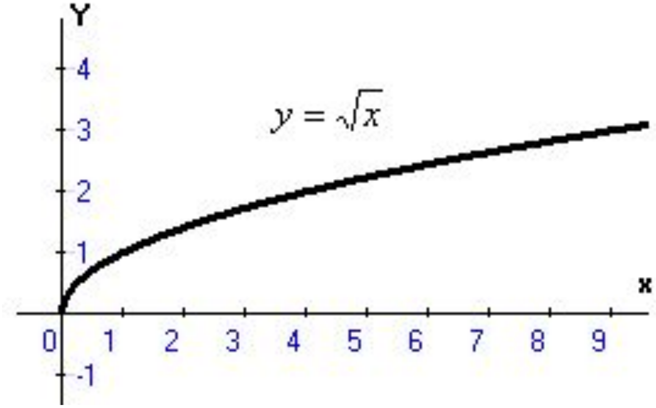
$(a > 0)$





$x = ay^2 \ (a > 0)$

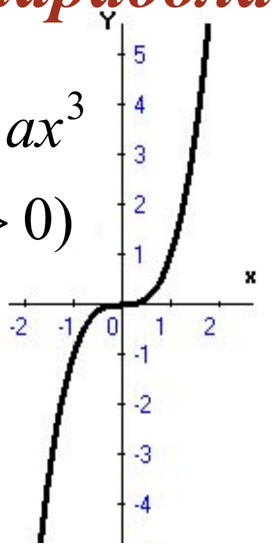
Квадратный корень



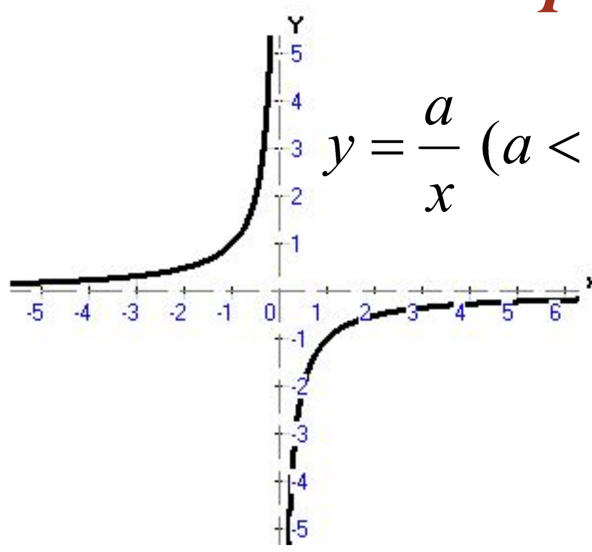
Кубическая парабола

$y = ax^3$

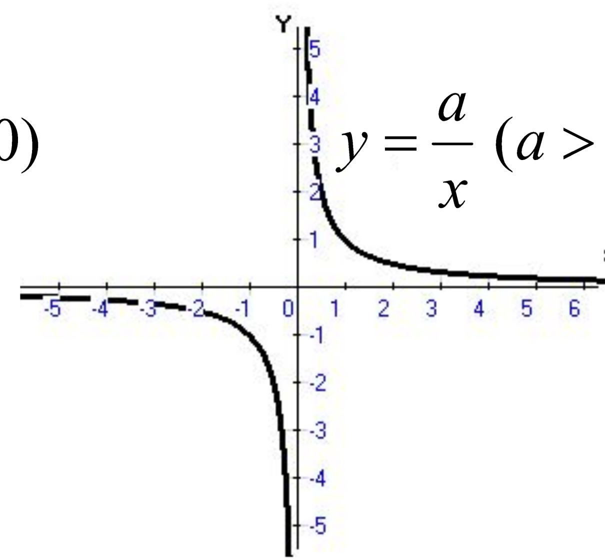
$(a > 0)$



Гипербола



$y = \dfrac{a}{x} \ (a < 0)$

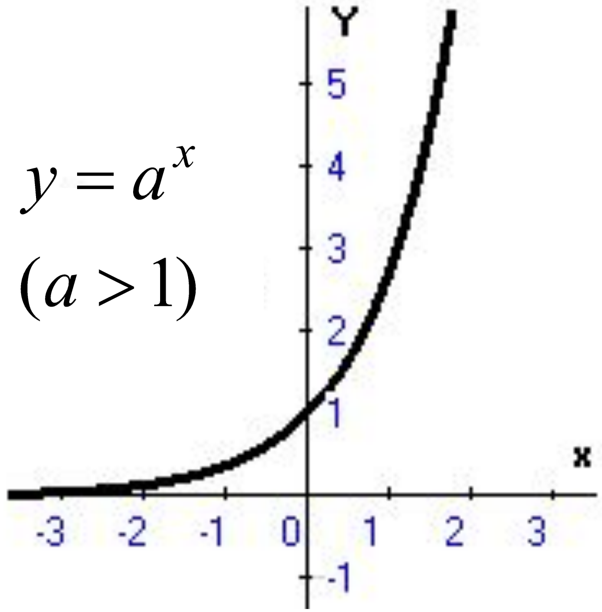


$y = \dfrac{a}{x} \ (a > 0)$

Показательные функции

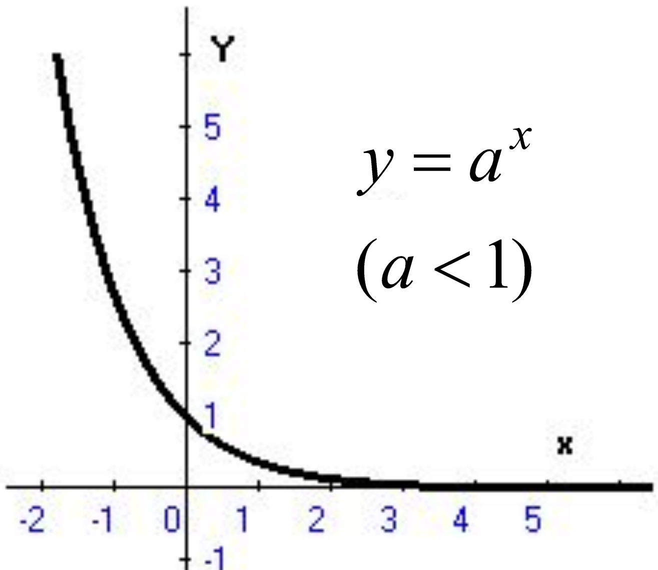
$$y = a^x$$

$$(a > 1)$$



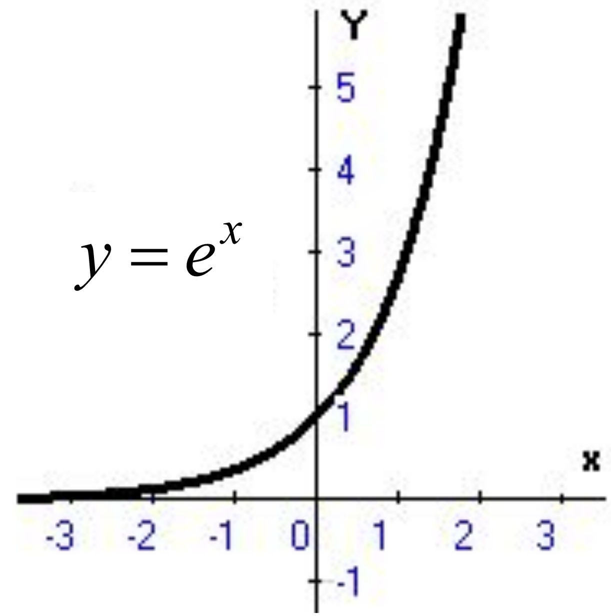
$$y = a^x$$

$$(a < 1)$$

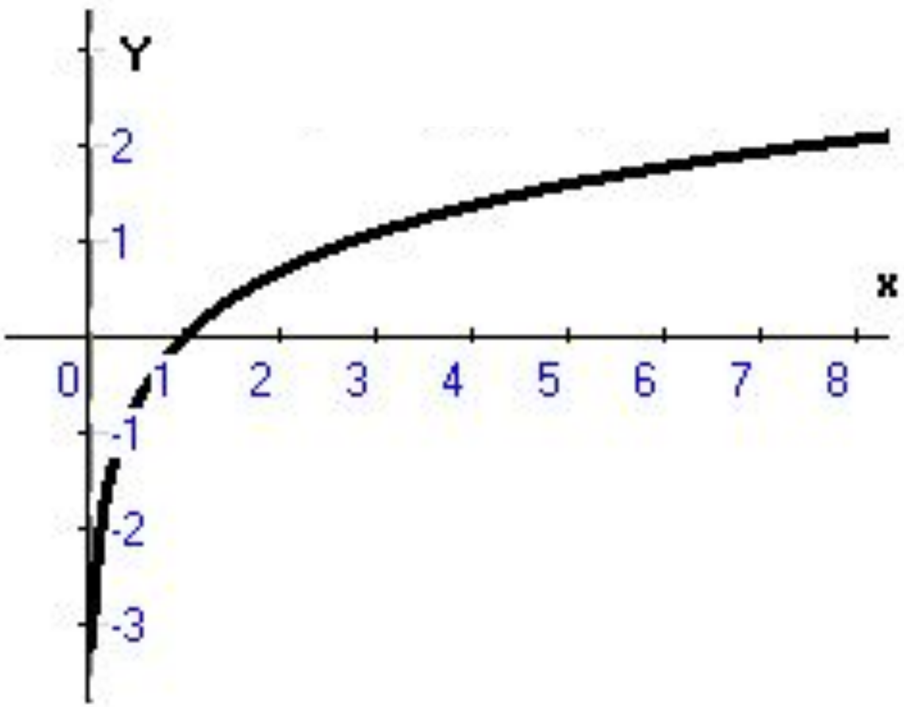


Экспонента

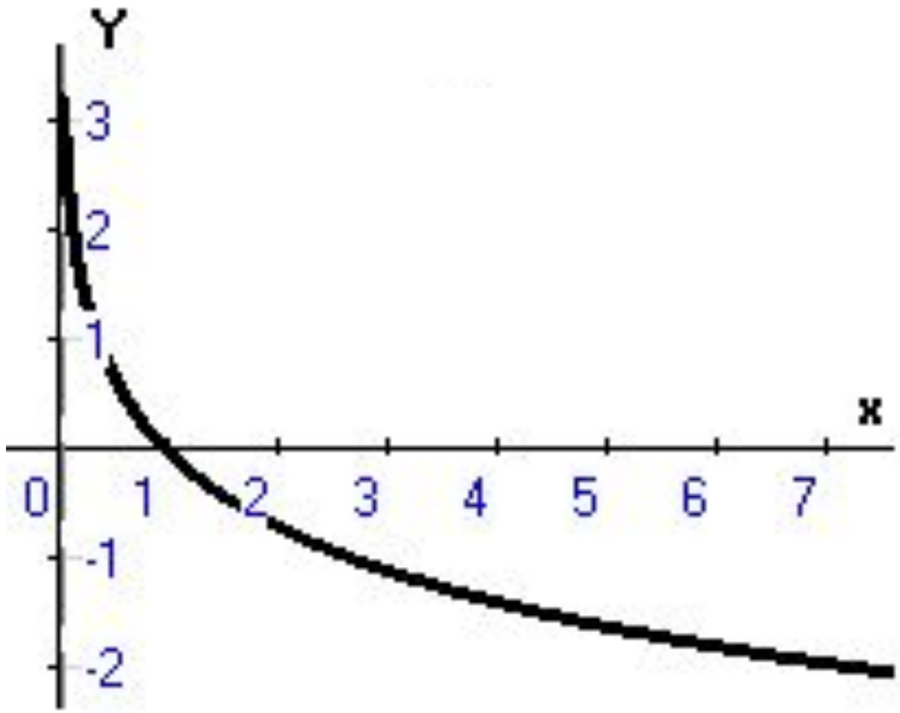
$$y = e^x$$



Логарифмические функции



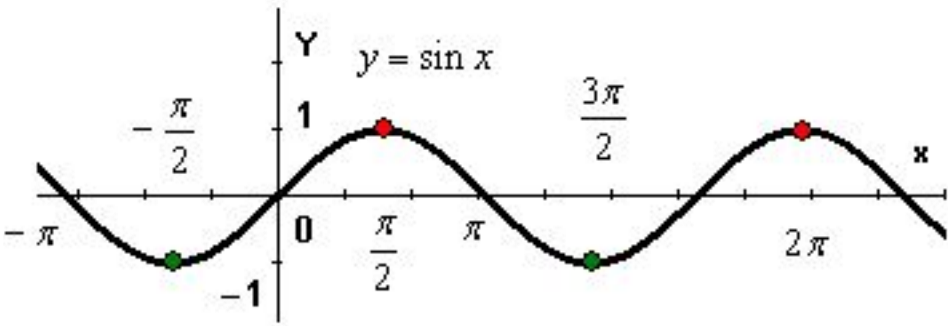
$$y = \log_a x \quad (a > 1)$$



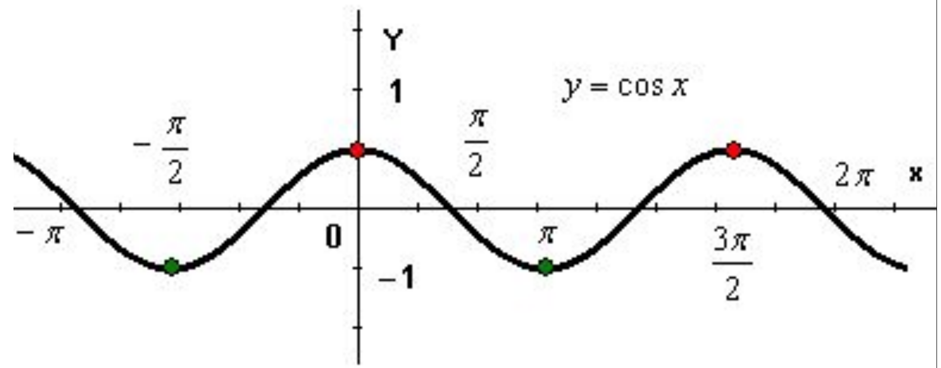
$$y = \log_a x \quad (a < 1)$$

Тригонометрические функции

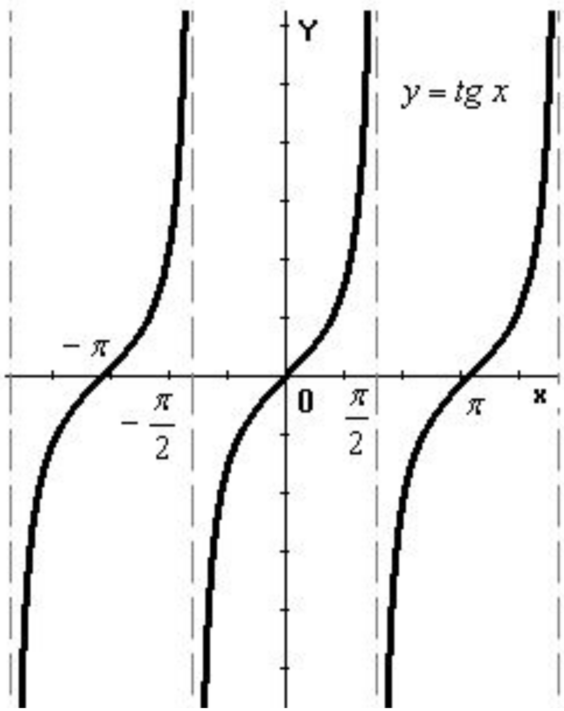
Синус



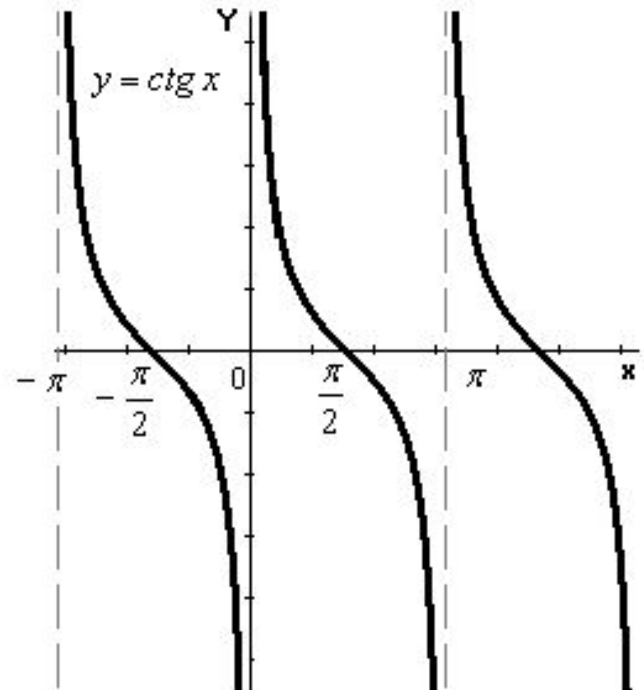
Косинус



Тангенс

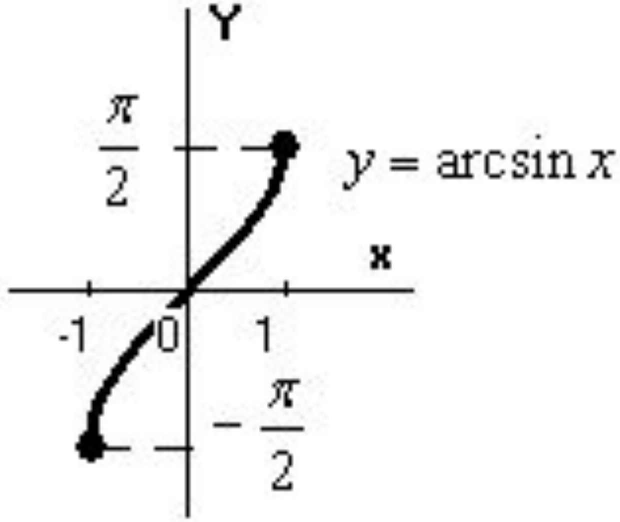


Котангенс

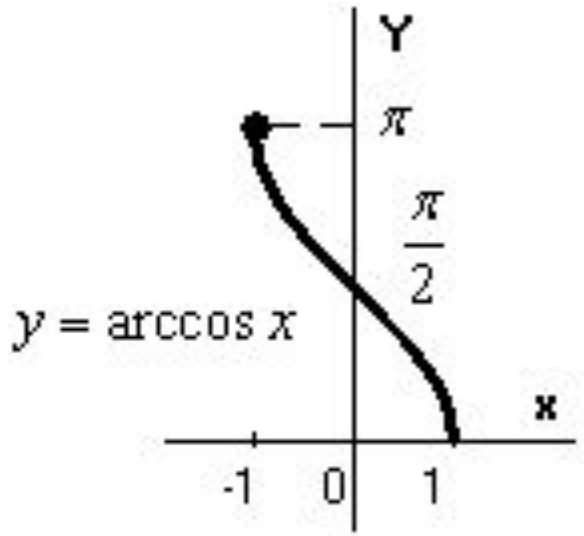


Обратные тригонометрические функции

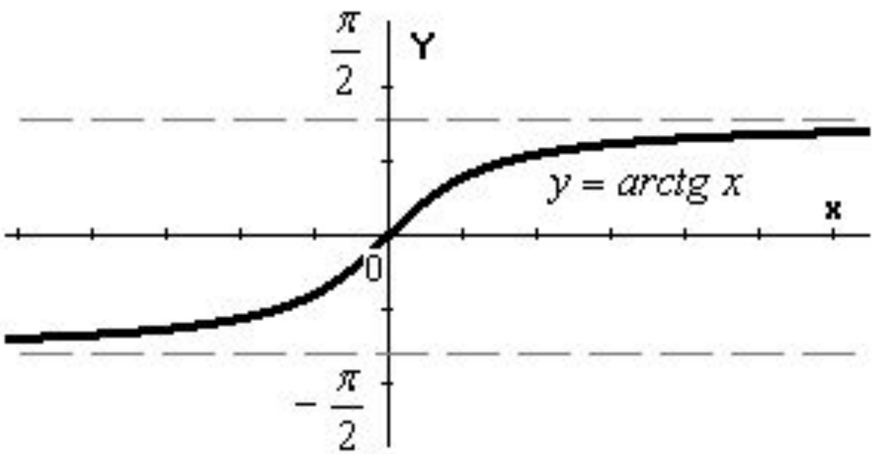
Арксинус



Арккосинус



Арктангенс



Арккотангенс