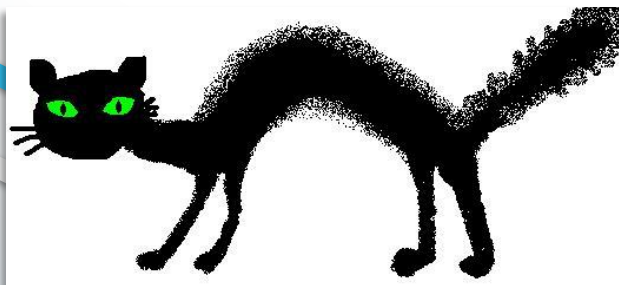




Государственное бюджетное профессиональное образовательное
учреждение Новосибирской области
«НОВОСИБИРСКИЙ АВИАСТРОИТЕЛЬНЫЙ ЛИЦЕЙ»

Построение графиков функций при помощи геометрических преобразований



Цель занятия:

Научиться строить графики сложных функций путем геометрических преобразований графиков элементарных функций

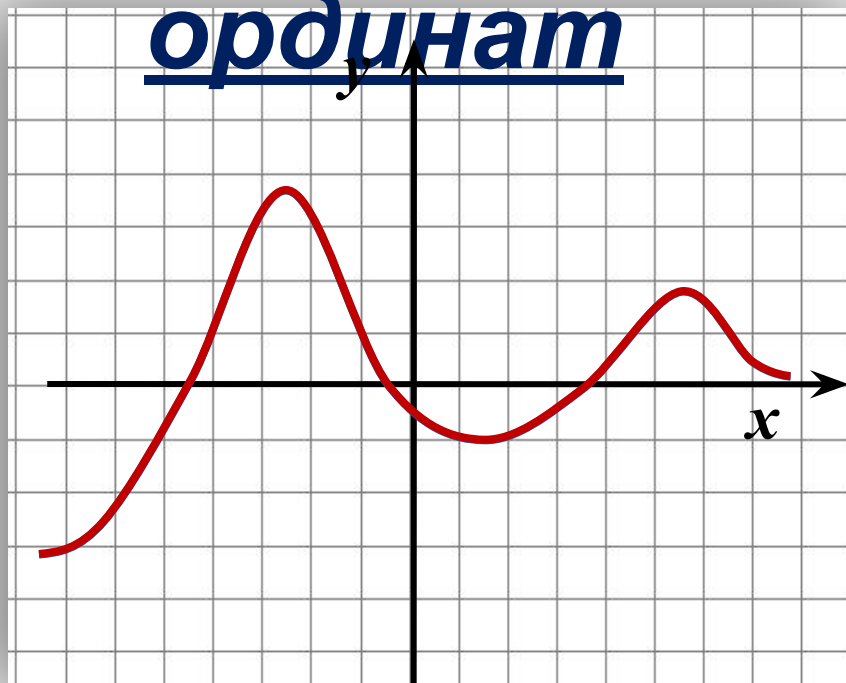
Задачи:

- 1) Рассмотреть возможные направления преобразований графиков функций.
- 2) Изучить, к каким изменениям в графиках функций приводит появление числовых слагаемых, коэффициентов, знаков модуля в записи формулы функции.
- 3) Научиться использовать теоретические сведения об изменениях формы графиков для решения практических задач.
- 4) Исследовать нетипичные способы геометрических преобразований для построения графиков функций.
- 5) Выработать критерии выбора способа построения графика функции.

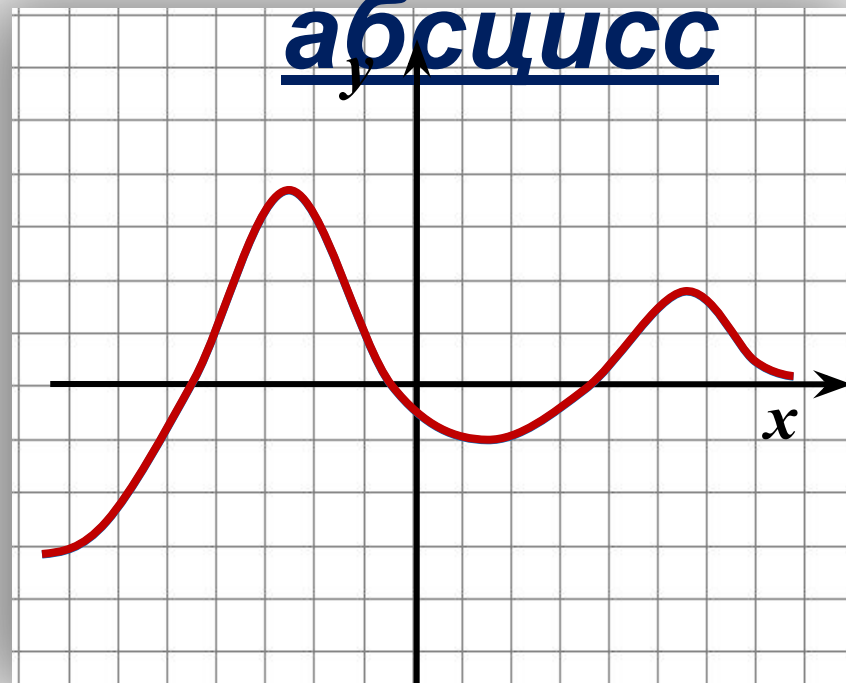
Направления

преобразований графиков

Преобразование
вдоль оси
ординат



Преобразование
вдоль оси
абсцисс



Преобразования вдоль оси ординат

$$y = f(x + b)$$

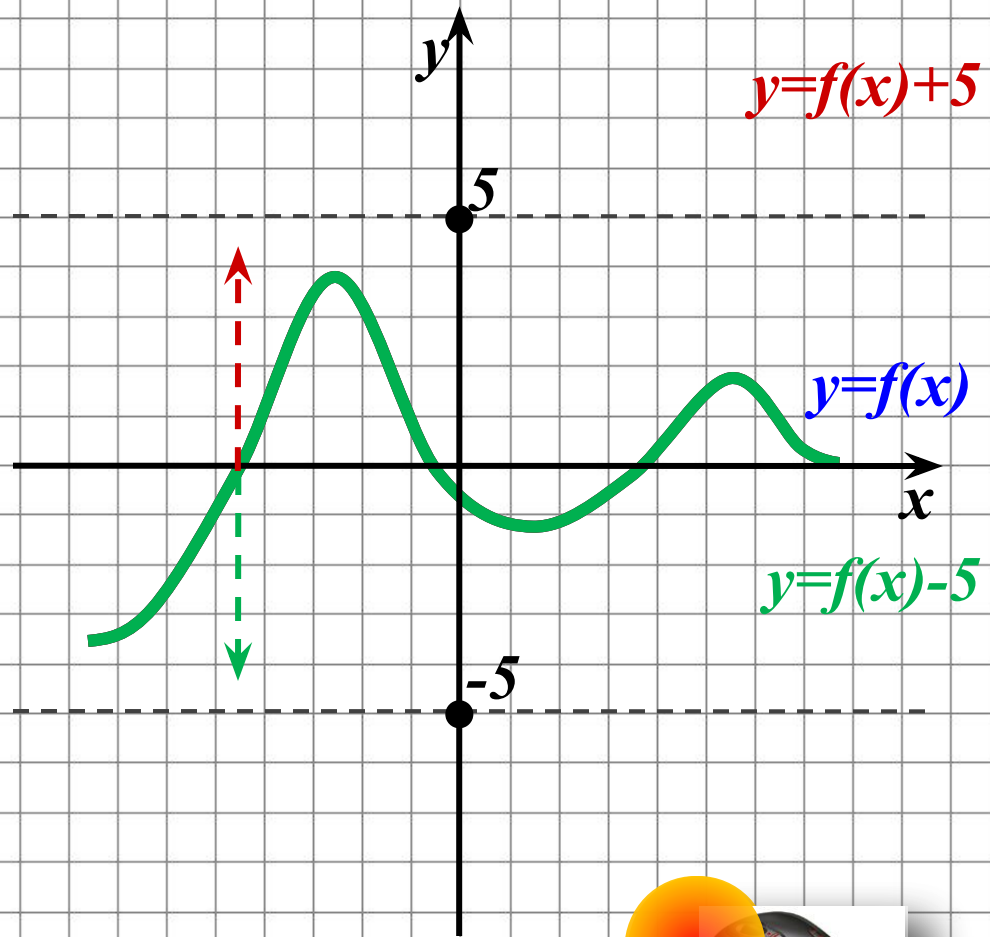
Преобразования
графика
функции $f(x)$
параллельный

перенос на $|b|$

- **вверх**,

если $b > 0$
вниз, если

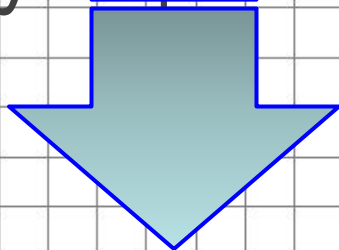
$b < 0$



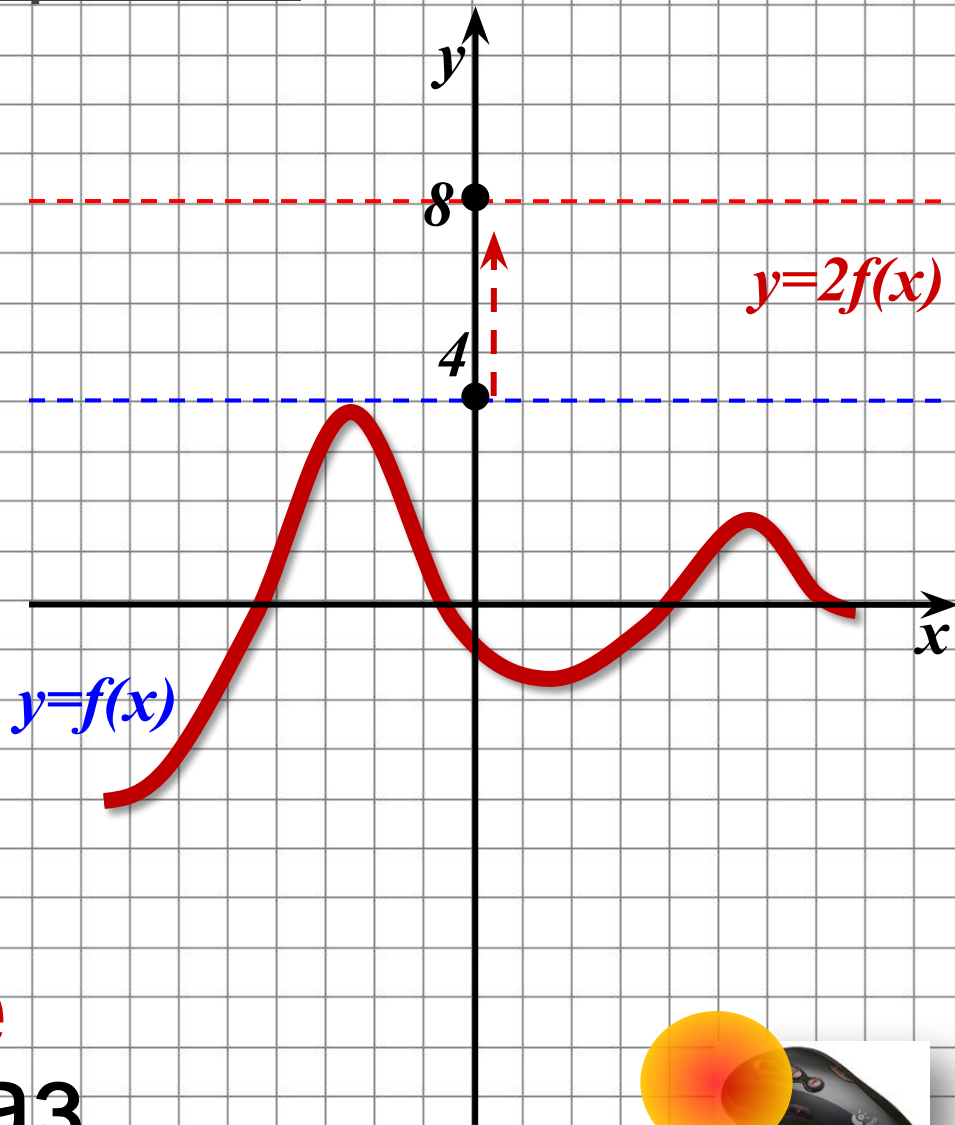
преобразования вдоль оси ординат



преобразования
графика
функции $f(x)$



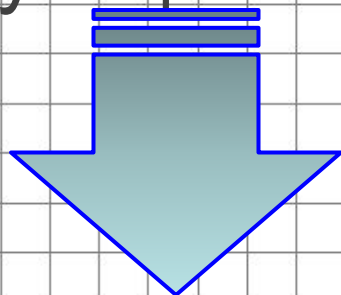
- **растяжение**
вдоль OY k раз,
если $k > 1$



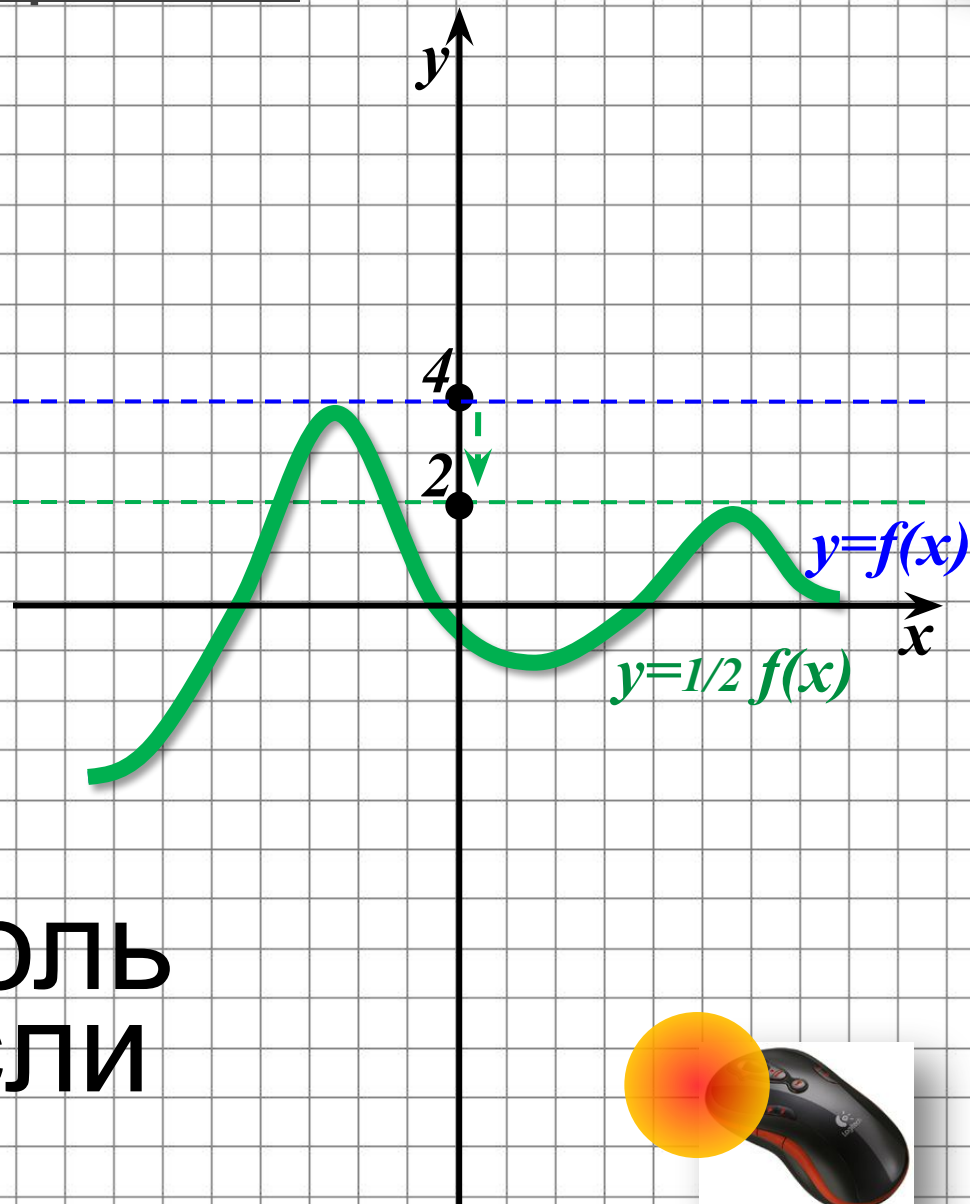
преобразования вдоль оси ординат



преобразования
графика
функции $f(x)$



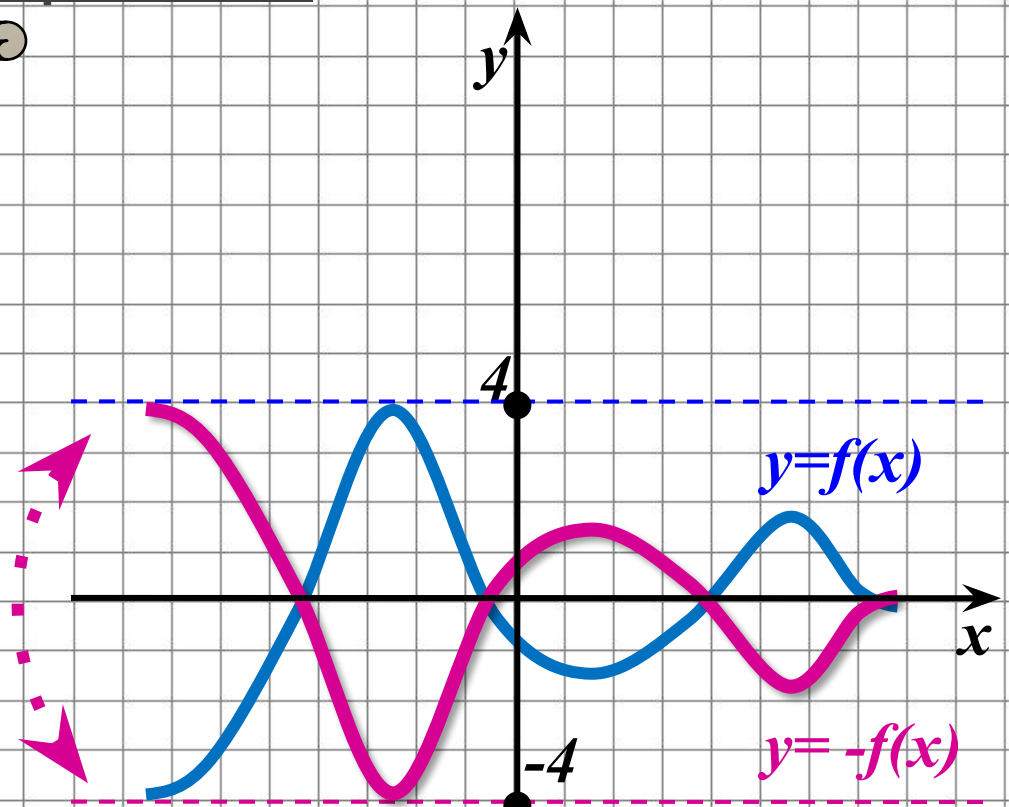
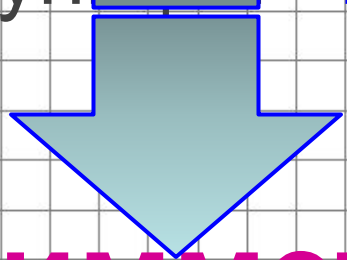
- **сжатие** вдоль
оУ в k раз, если
 $0 < k < 1$



преобразования вдоль оси ординат



преобразования
графика
функции $f(x)$



- симметричное
отображение
относительно оси
абсцисс, если



преобразования вдоль оси ординат



преобразования
графика

1) функции $f(x)$

сохранен

ие частей,

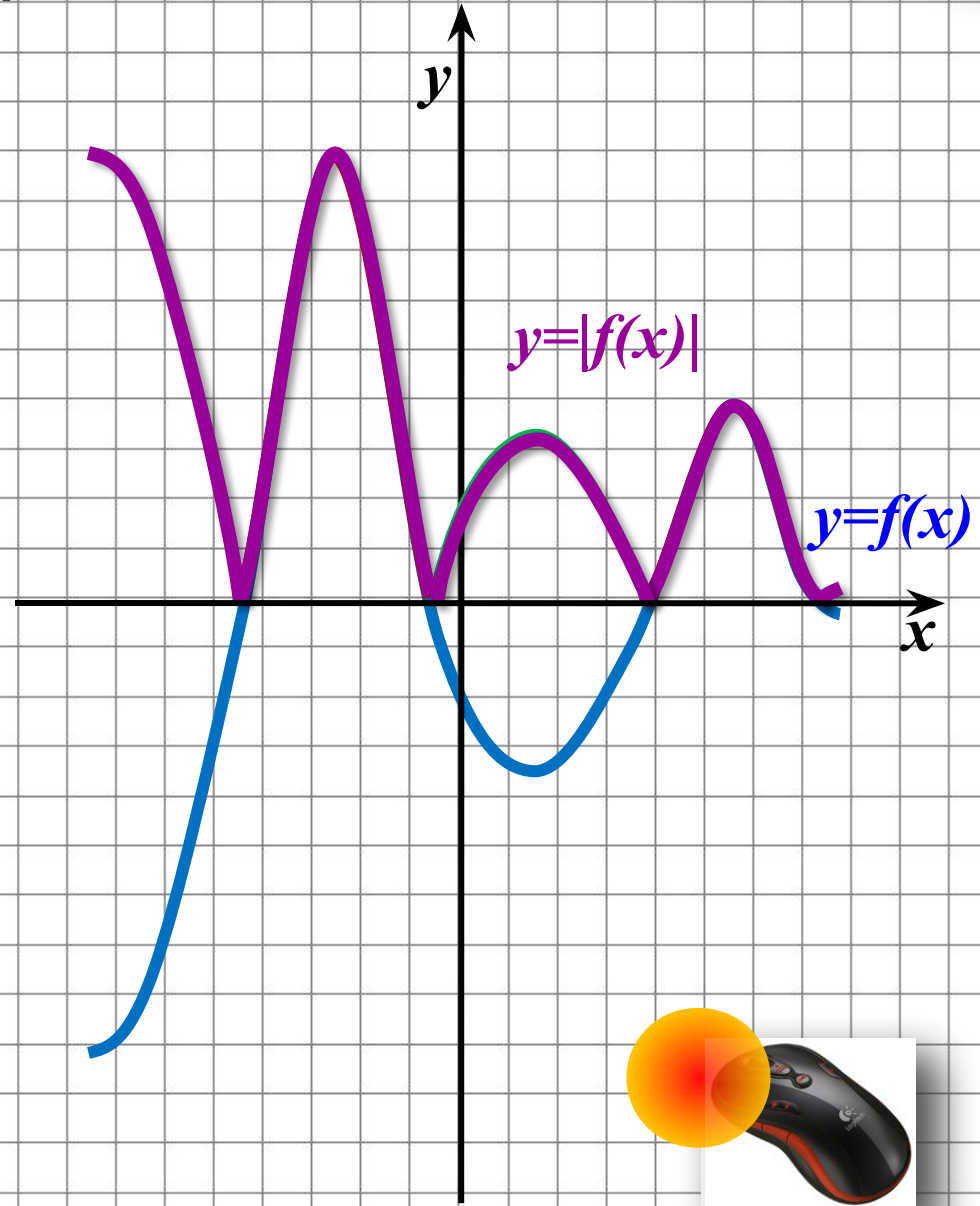
которые лежат

симметричное
над осью OX

отображение

частей, которые

лежат ниже оси



преобразования вдоль оси абсцис

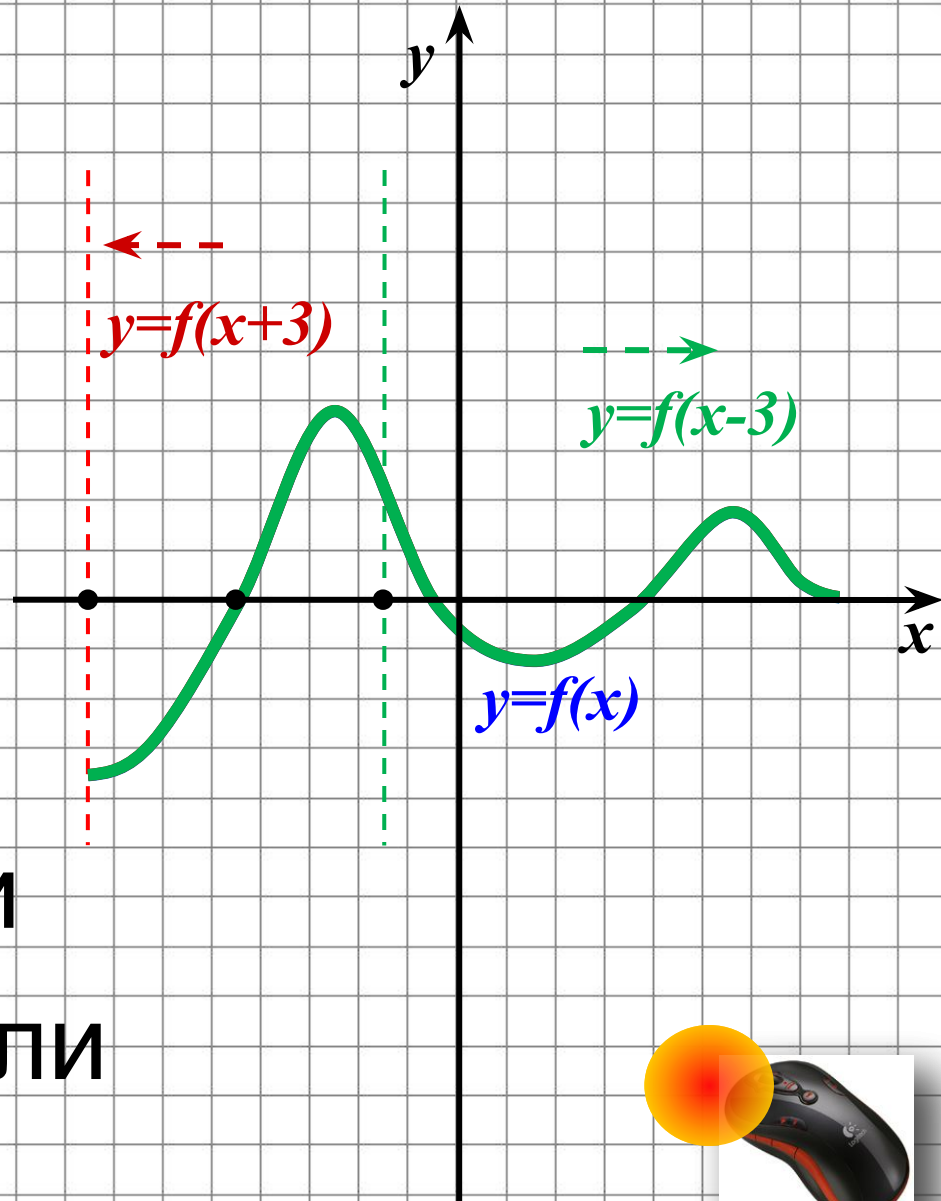
$$y = f(x + a)$$

преобразования
графика
функции $f(x)$
параллельный
перенос на $|a|$
единиц:

- **влево**, если

$a > 0$ **вправо**, если

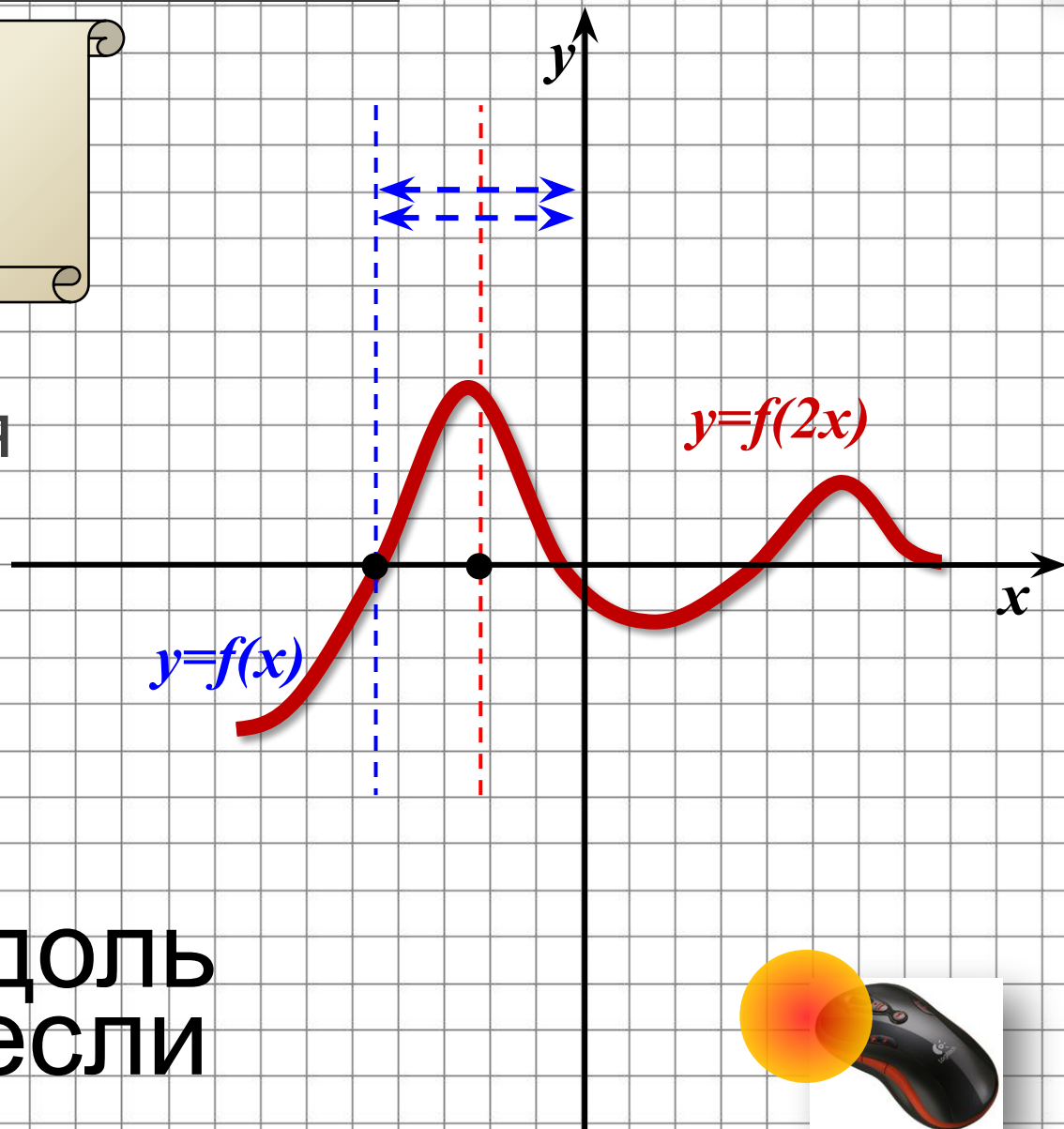
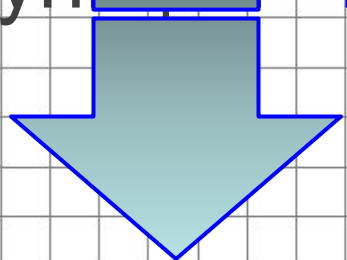
$a < 0$



преобразования вдоль оси абсцис


$$y=f(x)$$

преобразования
графика
функции $f(x)$

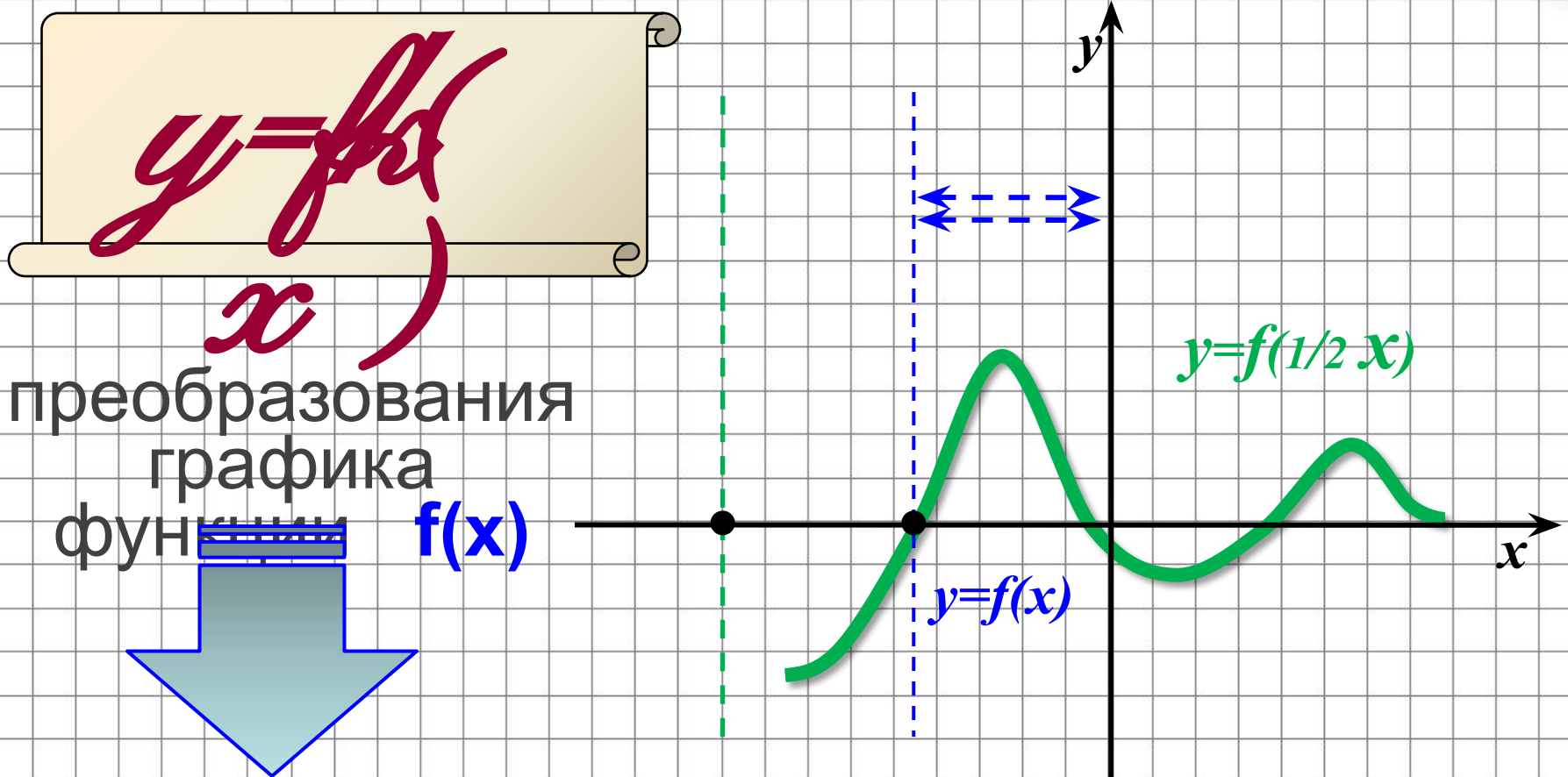


- **сжатие** вдоль
оХ в k раз, если

$k > 1$



преобразования вдоль оси абсцис



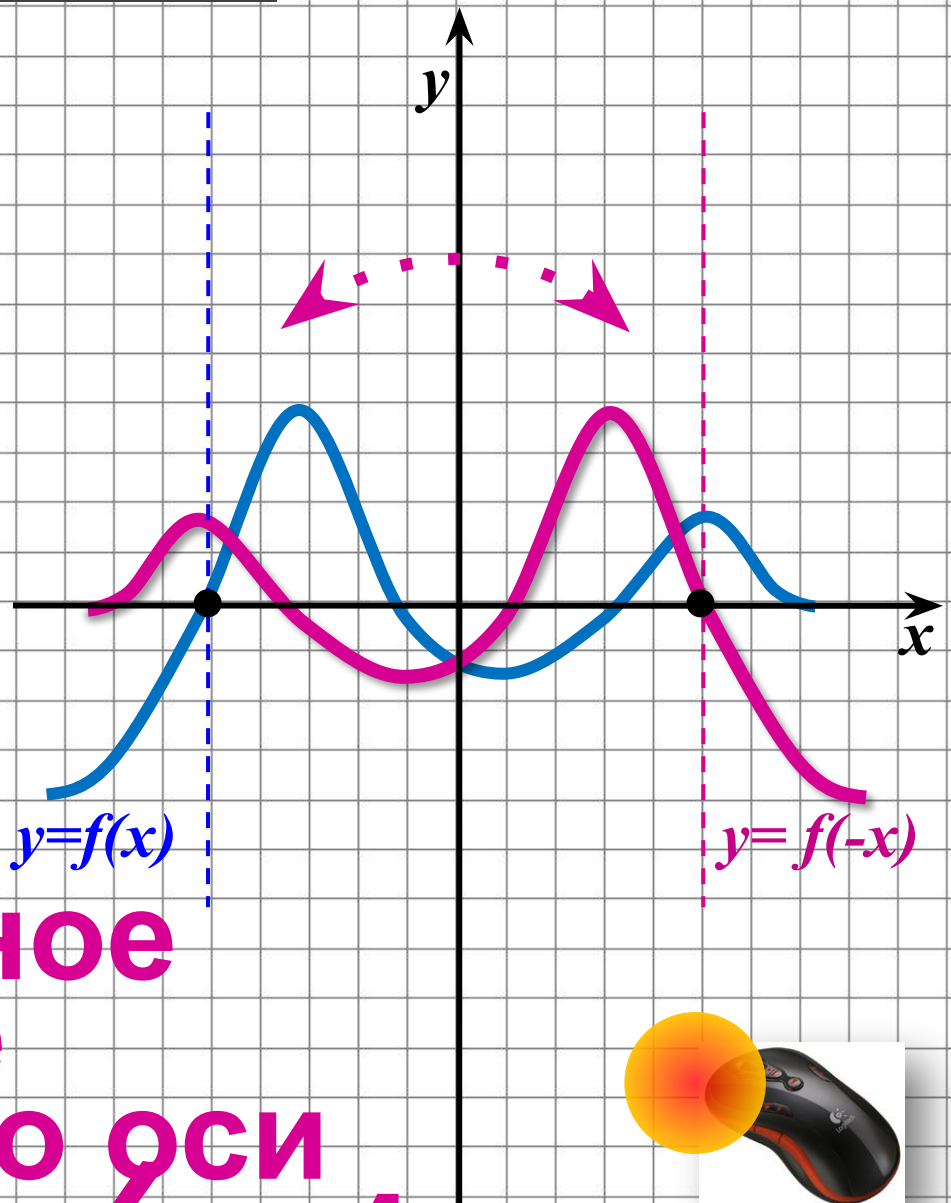
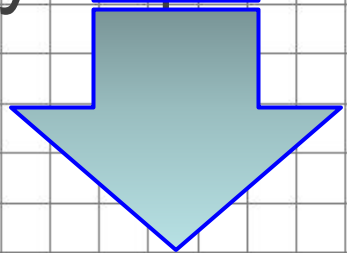
- **растяжение**
вдоль Ox в k раз,
если $0 < k < 1$



преобразования вдоль оси абсцис


$$y=f(x)$$

преобразования
графика
функции $f(x)$



- симметричное
отображение
относительно оси



ординат $x \rightarrow -x$

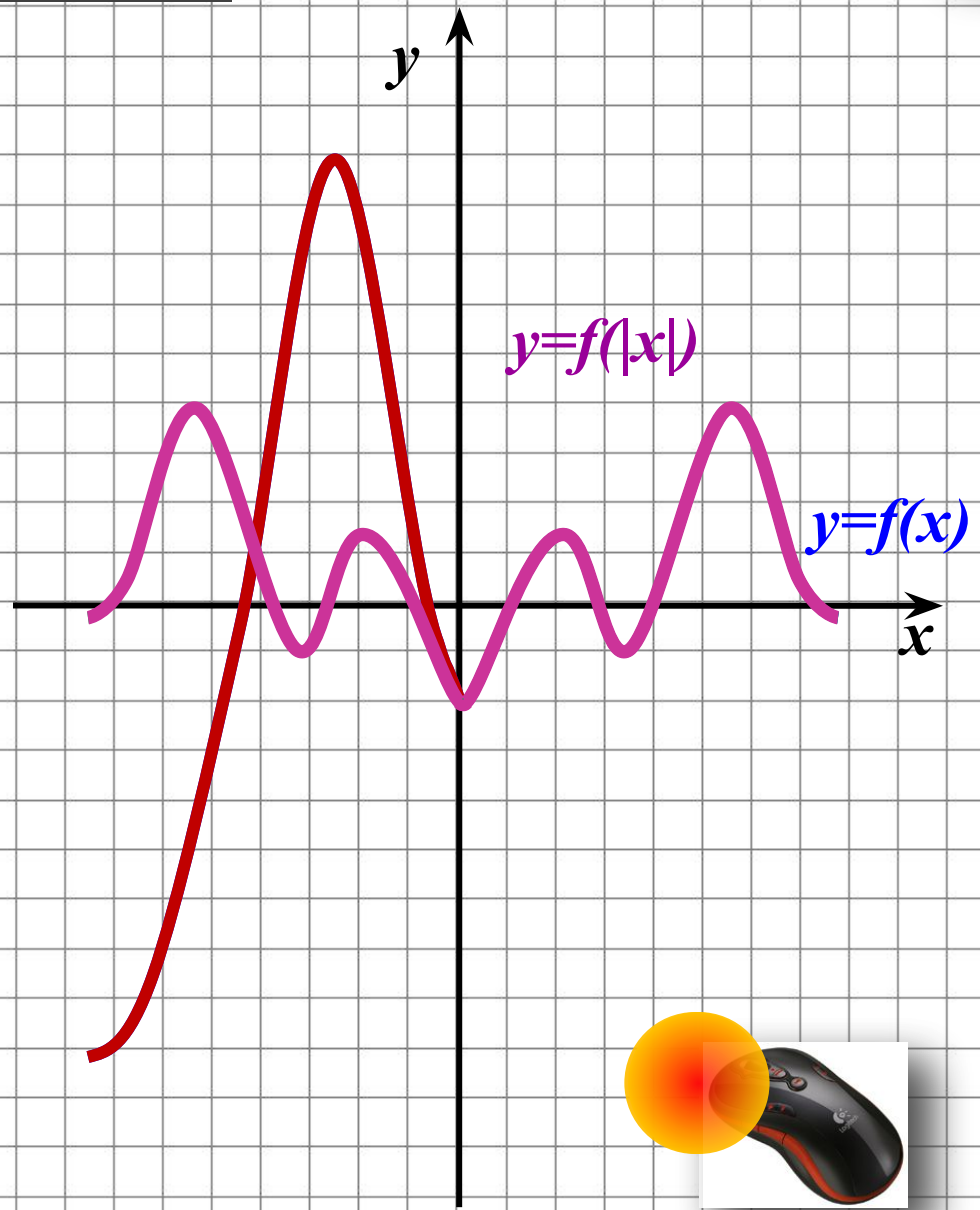
преобразования вдоль оси абсцис



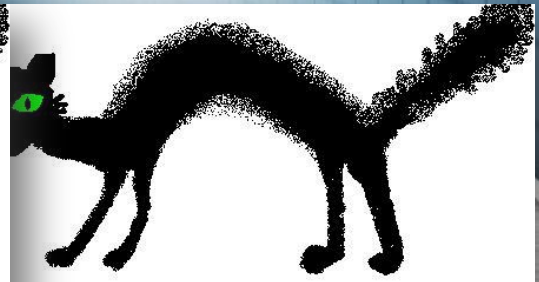
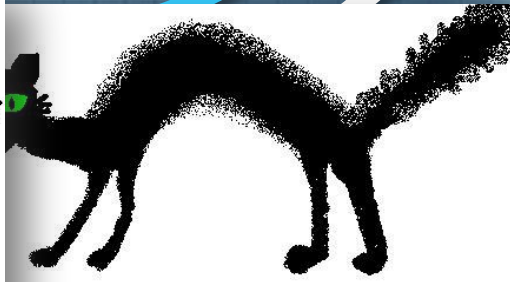
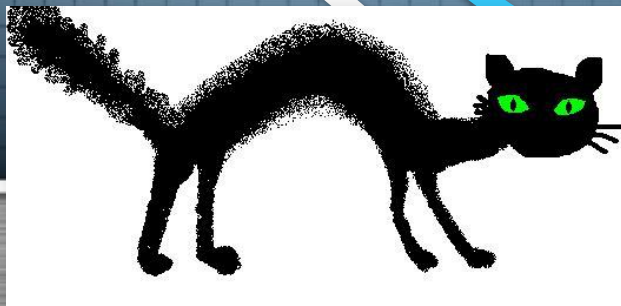
преобразования
графика
функции $f(x)$

1) отбрасывание
части, которая
лежит левее OY

2) сохранение и
симметричное
отображение
части, которая



Примеры построения графиков функций при помощи геометрических преобразований



Пример 1

При помощи геометрических преобразований графика функции

$$y=x^2$$

ПОСТ

$$y=-2(x-3)^2+7$$

ФУНКЦИИ

1 шаг

параллельный перенос на **3** единицы

2 шаг

симметричное отображение

относительно OX

растяжение в **2** раза вдоль OY

4 шаг

параллельный перенос на **7** единиц

вверх



Пример 1

$$y = -2(x-3)^2 + 7$$

$$y = x^2$$

1 шаг: $y = (x-3)^2$

параллельный перенос
вправо на 3 единицы

2 шаг: $y = -(x-3)^2$

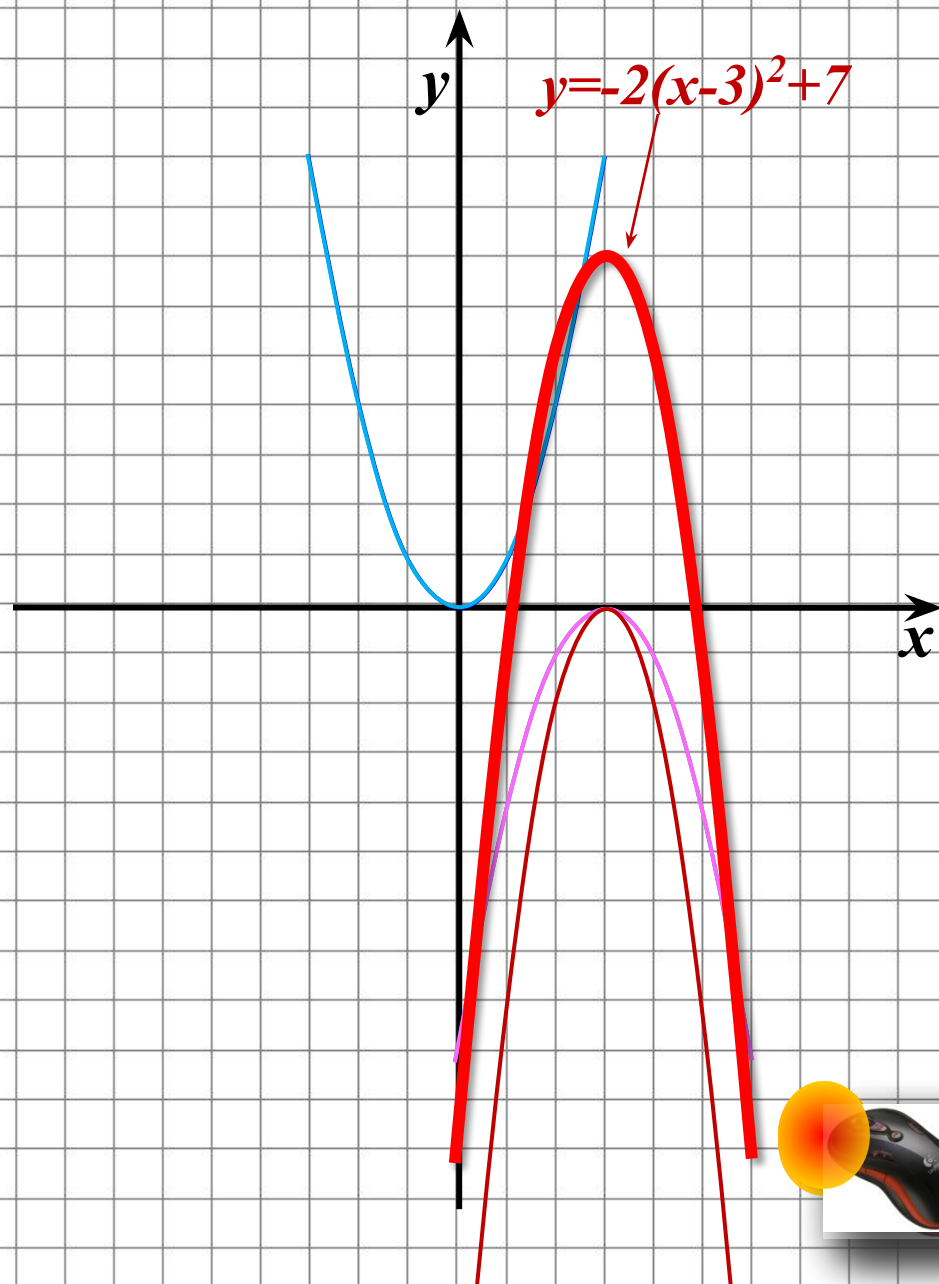
симметричное отображение
относительно OX

3 шаг: $y = -2(x-3)^2$

растяжение в 2 раза вдоль OY

4 шаг: $y = -2(x-3)^2 + 7$

параллельный перенос
вверх на 7 единиц



Пример 2

При помощи геометрических преобразований графика функции $y=x^2$

построить график функции

$$y = |x^2 - 6x + 4|$$

Выделим полный квадрат из

$$|x^2 - 6x + 4| = |(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 4| = |(x-3)^2 - 5|$$

Следовательно необходимо построить график функции

$$y = |(x-3)^2 - 5|$$

$$y = x^2$$

1 шаг: $y = (x-3)^2$

параллельный перенос
вправо на 3 единицы

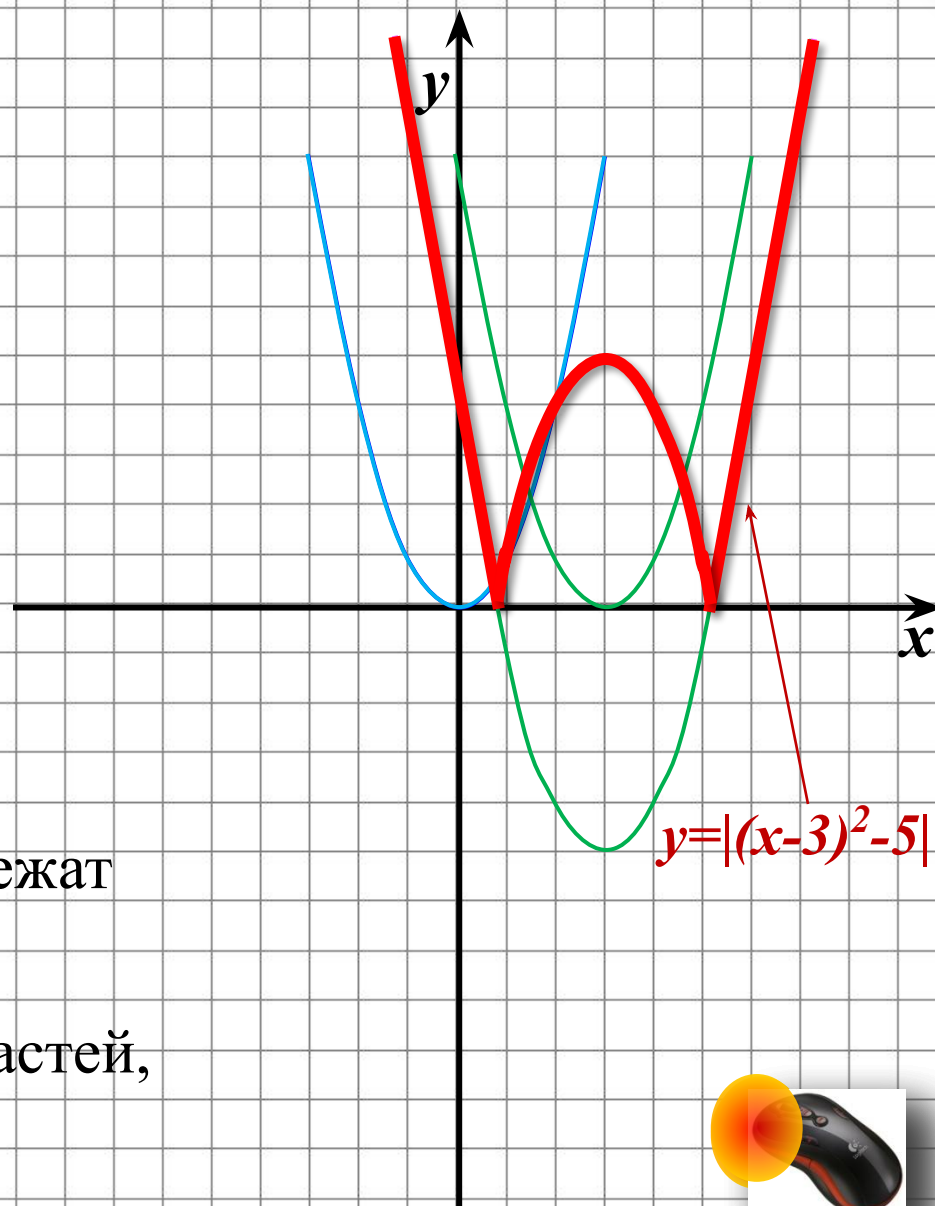
2 шаг: $y = (x-3)^2 - 5$

параллельный перенос
вниз на 5 единиц

3 шаг: $y = |(x-3)^2 - 5|$

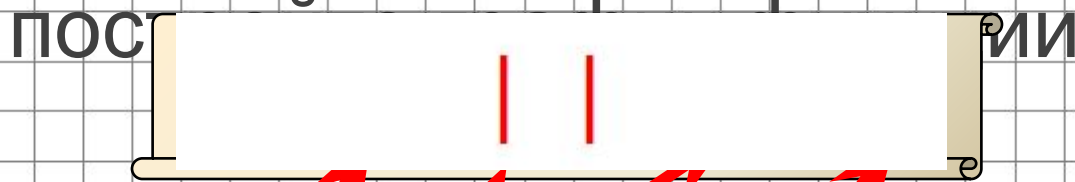
- сохранение частей, которые лежат
над осью OX ;

- симметричное отображение частей,
которые лежат ниже оси OX



Пример 3

При помощи геометрических преобразований графика функции $y = \sqrt{x}$



1 шаг

параллельный перенос на **1** единицу

2 шаг

растяжение в **3** раза вдоль оУ

3 шаг

параллельный перенос на **4**

единицы вниз

- 1) отбрасывание части, которая лежит левее оУ
- 2) сохранение и симметричное отображение части, которая



$$y = \sqrt{x}$$

1 шаг:

$$y = \sqrt{x + 1}$$

параллельный перенос влево на 1 единицу

2 шаг:

$$y = 3\sqrt{x + 1}$$

растяжение в 3 раза вдоль oY

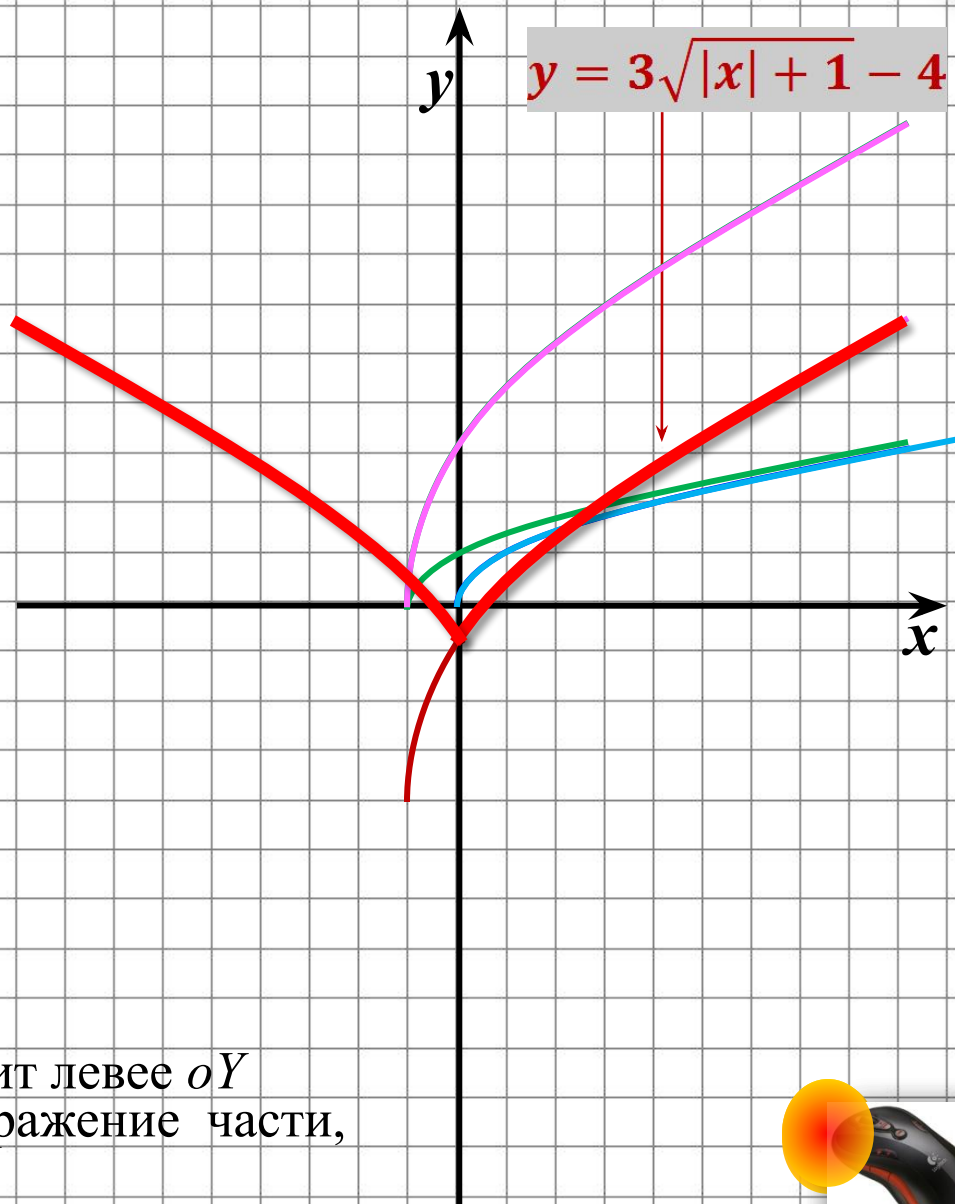
3 шаг:

$$y = 3\sqrt{x + 1} - 4$$

параллельный перенос вниз на 4 единицы

4 шаг:

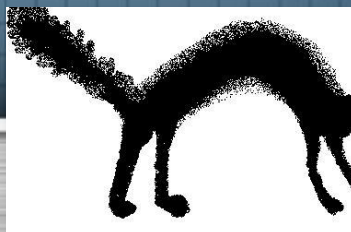
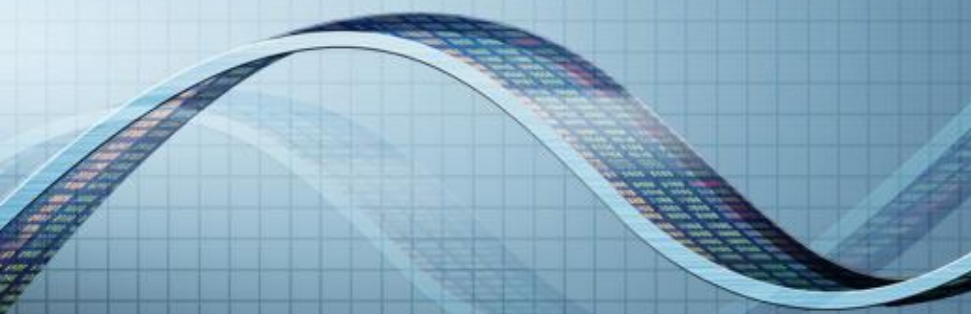
$$y = 3\sqrt{|x| + 1} - 4$$



- 1) отбрасывание части, которая лежит левее oY
- 2) сохранение и симметричное отображение части, которая лежит правее oY



Отдельные случаи построения графиков при помощи геометрических преобразований



Постройте график
функции

$$y = |x+1| + |x-1|$$

1 шаг: построим график функции

$$y = |x+1|$$

2 шаг: построим график функции

$$y = |x-1|$$

3 шаг: $y = |x+1| + |x-1|$

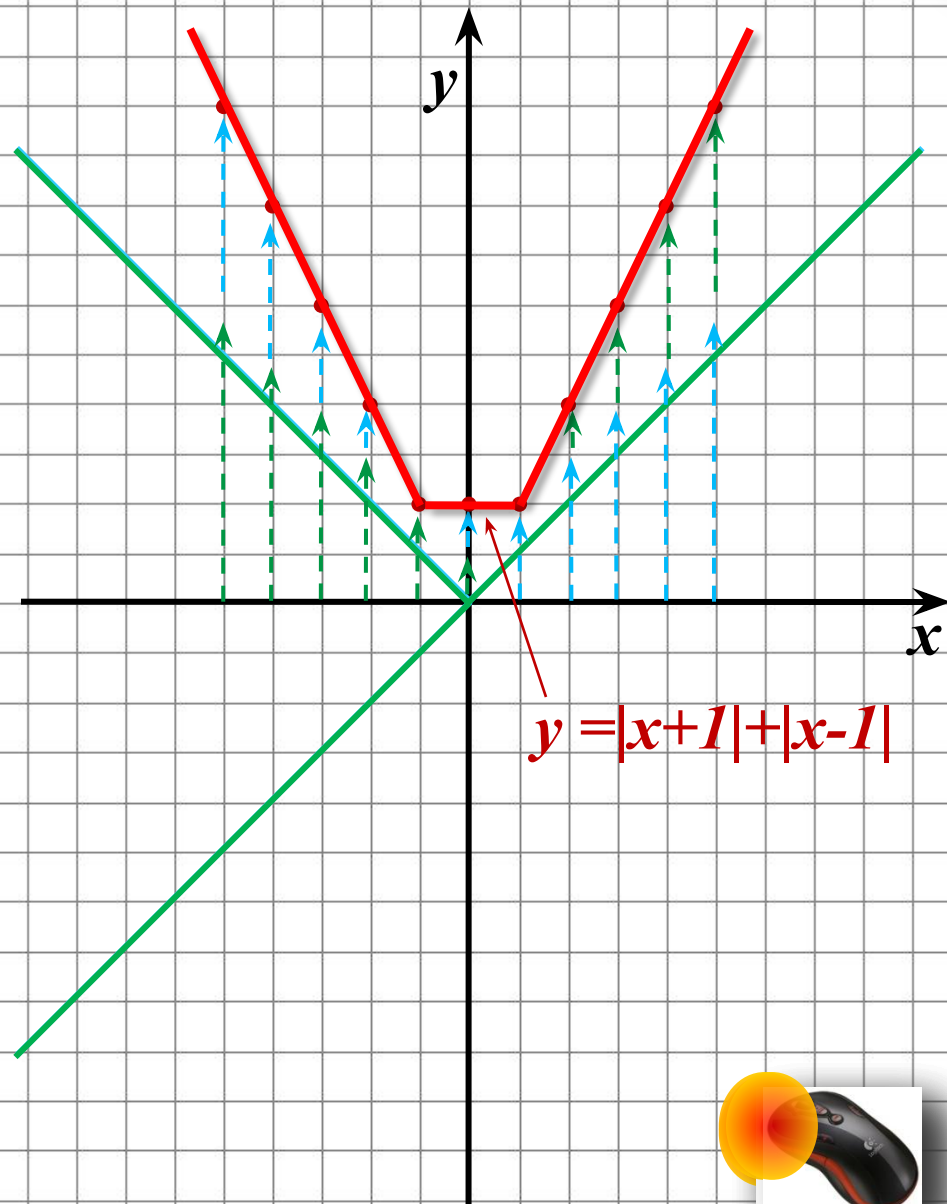
Ординату искомого

графика получаем

сложением ординат двух

построенных графиков в

той самой точке



Постройте
схематически график
функции $y=1/f(x)$, если

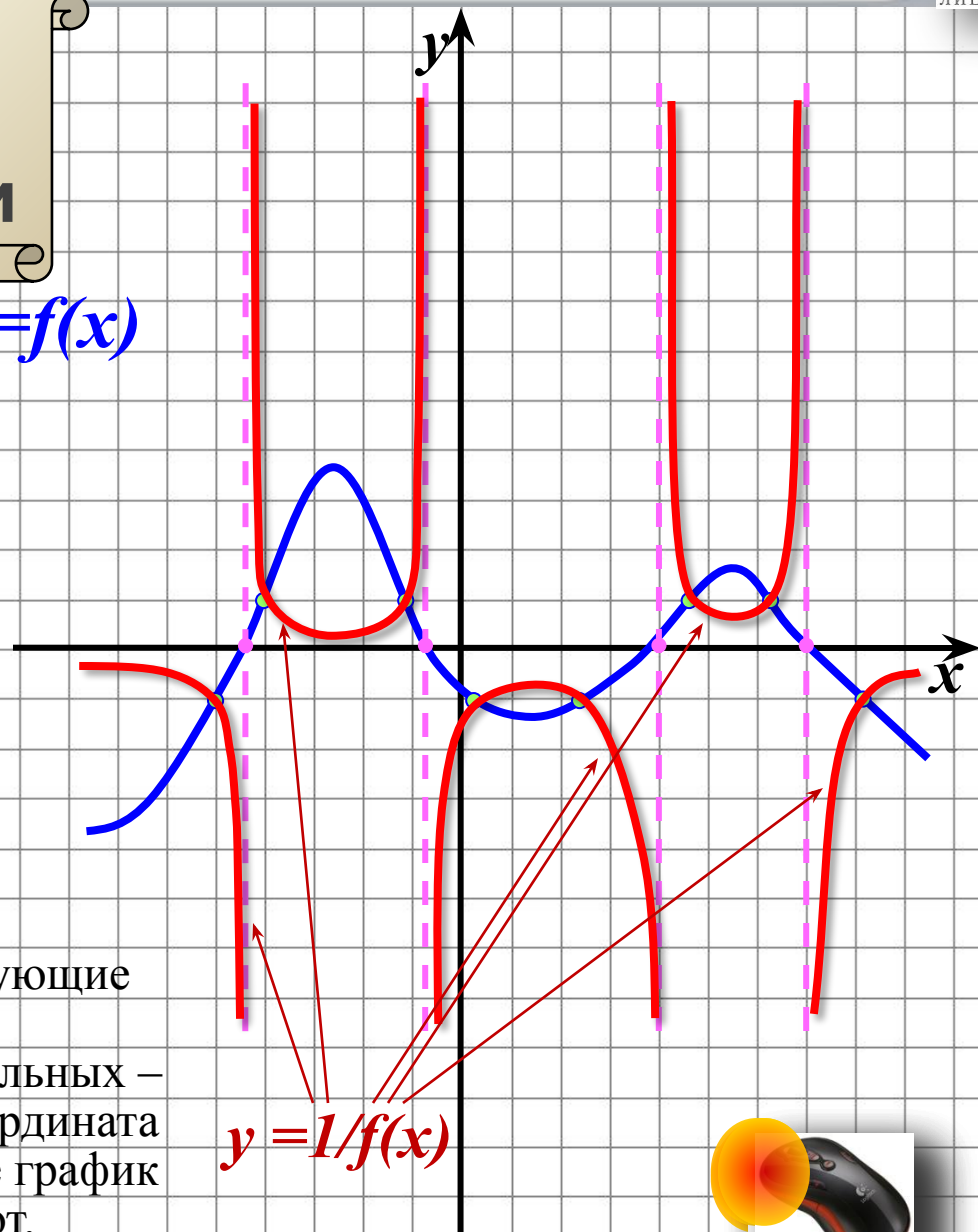
известен график

1 шаг: Предположим, график функции $y=f(x)$ имеет такой вид

2 шаг: Построим вертикальные асимптоты для графика $y=1/f(x)$. Они будут проходить через точки пересечения графика $y=f(x)$ и оси OX .

3 шаг: Точки графика $y=f(x)$ с ординатами $y=1$ и $y=-1$ будут общими для обоих графиков.

4 шаг: Для точек графика $y=f(x)$ с положительными ординатами соответствующие точки графика $y=1/f(x)$ будут иметь также положительные ординаты, а для отрицательных – отрицательные. Чем больше по модулю ордината точки графика $y=f(x)$, тем в большей мере график $y=1/f(x)$ приближается к оси OX и наоборот.



Сравнение методов сложения и деления графиков

построим методом сложения и методом деления график и сравним результаты

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Выполним преобразования выражения

для **сложения**

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$y = y_1 + y_2$$

для **деления**

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x^2 + 1}}$$

$$y = 1/y_3$$

Сложение графиков

построим график

$$y = x + \frac{1}{x}$$

1 шаг: построим график функции

$$y = x$$

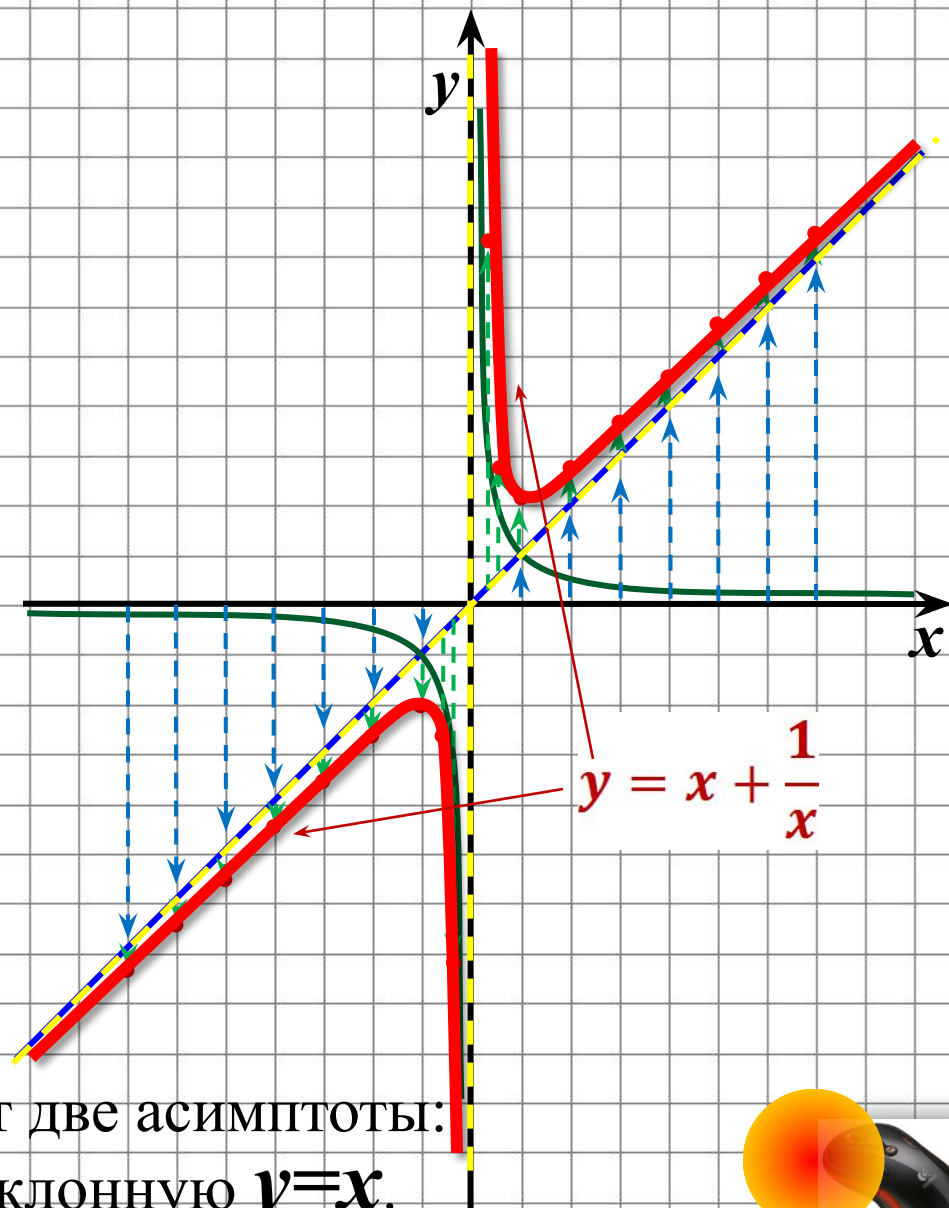
2 шаг: построим график функции

$$y = 1/x$$

3 шаг:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Ординату искомого графика получим сложением ординат построенных графиков в той самой точке



Построенный график имеет две асимптоты:
- вертикальную $x=0$; - наклонную $y=x$.



Деление графиков

построим график

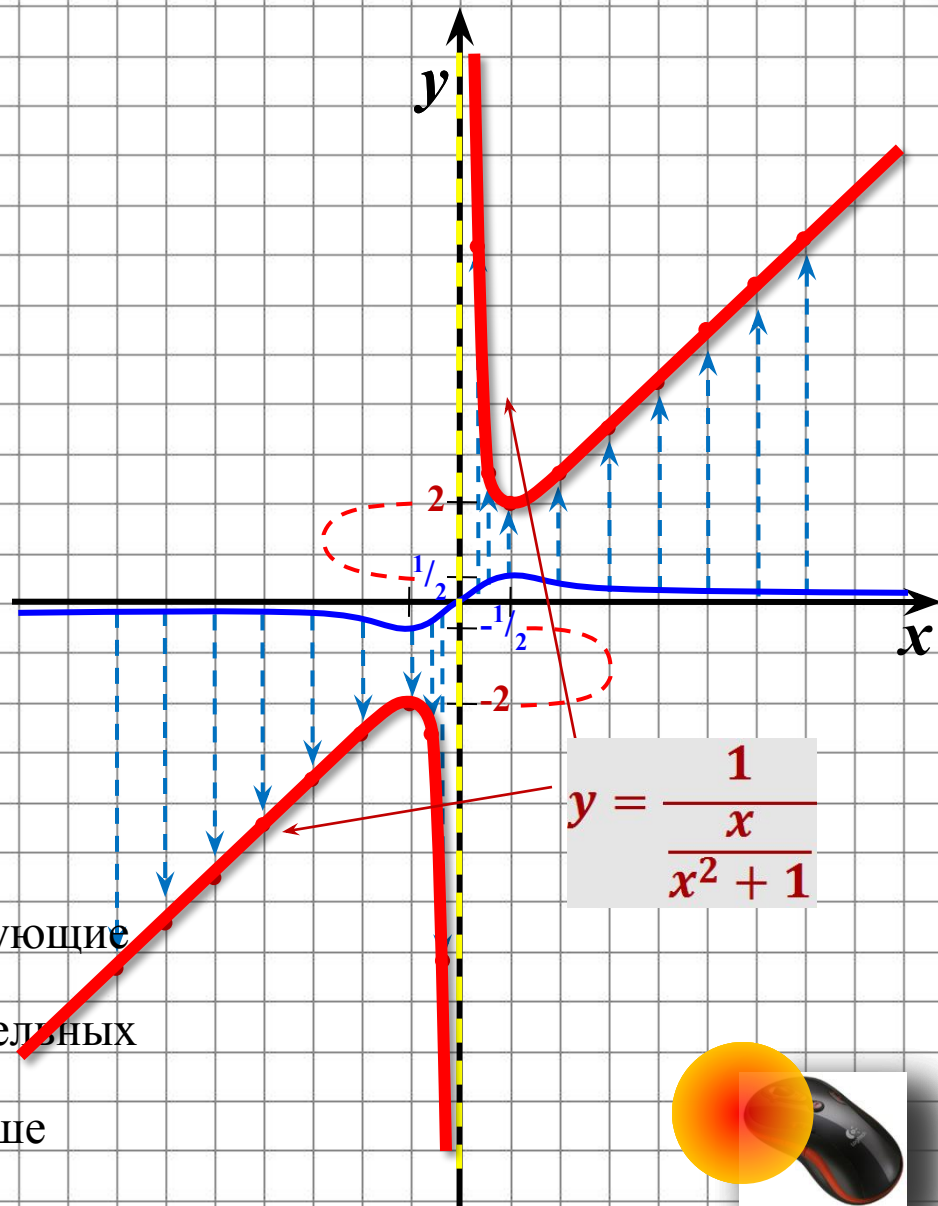
$$y = \frac{1}{\frac{x}{x^2 + 1}}$$

1 шаг: Предположим, нам известен график функции $y_3 = \frac{x}{x^2 + 1}$

2 шаг: построим вертикальную асимптоту для графика $y=1/y_3$. Она будет проходить через точку пересечения графика $y_3=f(x)$ с осью OX .

3 шаг: график $y_3=f(x)$ не имеет точек с ординатами $y=1$ и $y=-1$. Следовательно, общие точки графиков функций $y_3=f(x)$ и $y=1/y_3$ отсутствуют.

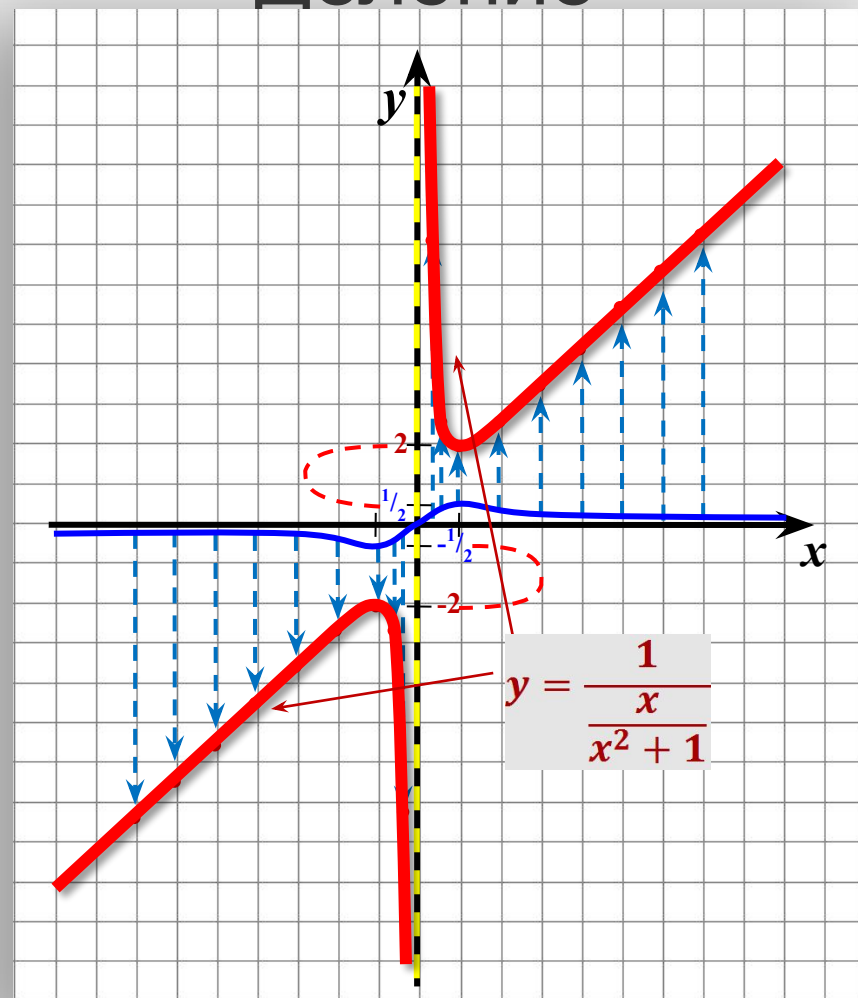
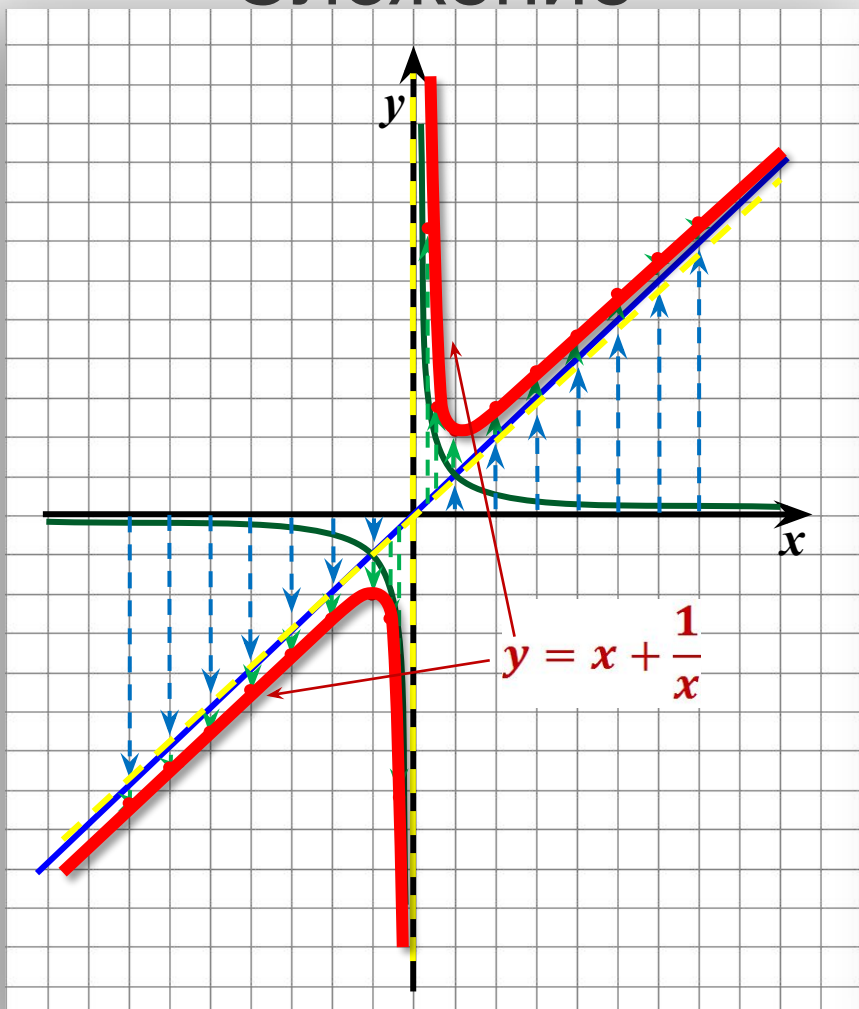
4 шаг: Для точек графика $y_3=f(x)$ с положительными ординатами соответствующие точки графика $y=1/y_3$ будут иметь также положительные ординаты, а для отрицательных – отрицательные. Чем больше по модулю ордината точки графика $y_3=f(x)$, тем больше график $y=1/y_3$ приближается к оси OX и наоборот



Сравнение результатов

Сложение

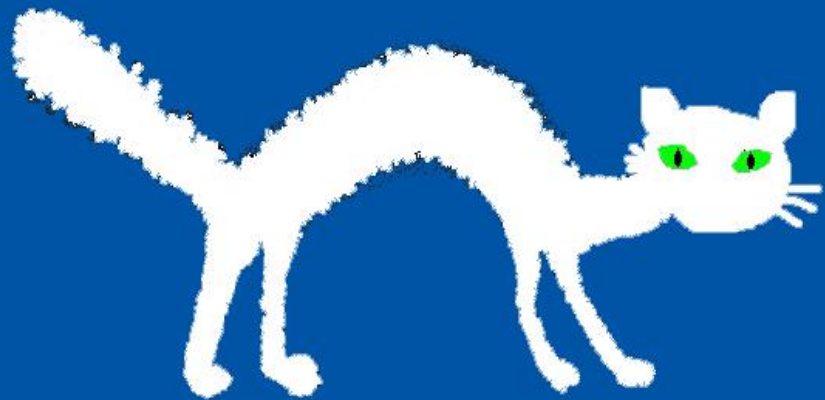
Деление



1) Графики идентичны, но график, который построен сложением, точно определяет еще и наклонную асимптоту. 2) Суммировать ординаты легче, чем оценивать пропорции их изменения.

Вывод: Для построения графика выбираем тот способ, который обеспечивает более информативный результат и является более удобным в применении.

**Успехов в изучении
математики!**



Список использованных информационных ресурсов

- 1) Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики (основные приемы) 7-е изд., стереотипное.—М.: МЦНМО, 2006. - 120 с.
- 2) Гурский И. П. Функции и построение графиков. Пособие для учителей. Изд. 3-е, испр. и доп. М., «Просвещение», 1968. - 215 с.
- 3) Дороднов А. М., Острецов И. Н., Петросов В. А., Приходов В. Ю., Сафонов И. Б.. Графики функций. Учеб. пособие для поступающих в вузы. М., «Высш. школа», 1972, - 104 с.
- 4) Ершов Л. В., Райхмист Р. Б. Построение графиков функций: Кн. для учителя М.: Просвещение, 1984, - 80 с.