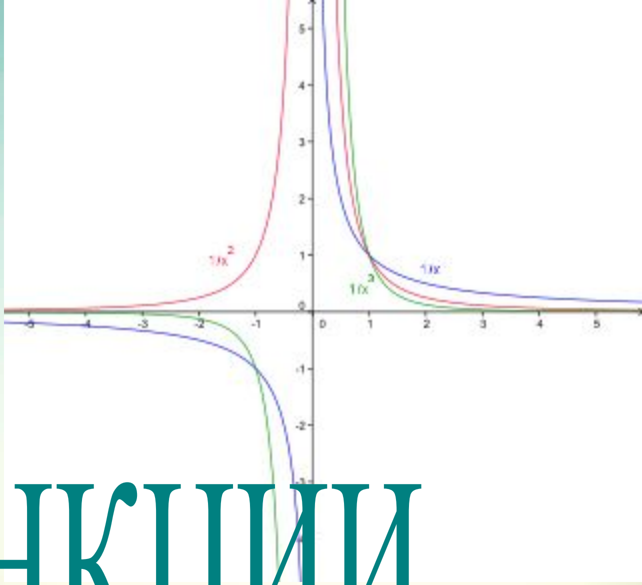
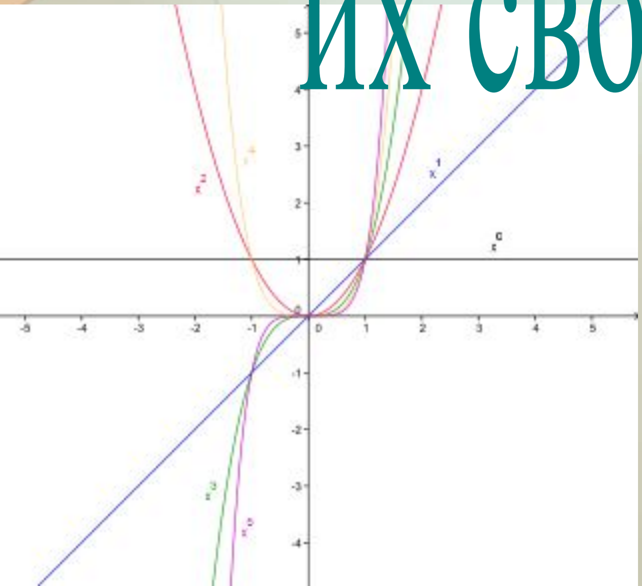
МОУ «ЛИЦЕЙ № 12»



"СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ, их свойства и графики"



Выполнили учащиеся 11 класса

Руководитель: Каримова Елена Викторовна

г. Железногорск

Цели и задачи:

- Изучить свойства и особенности
- графиков степенных функций $f(x) = x^r$, где r – рациональное число.
- Рассмотреть примеры практического применения изученных свойств функций.
- Показать использование степенных функций в окружающей жизни.

Степенными функциями называют функции вида

$$y = x^r,$$

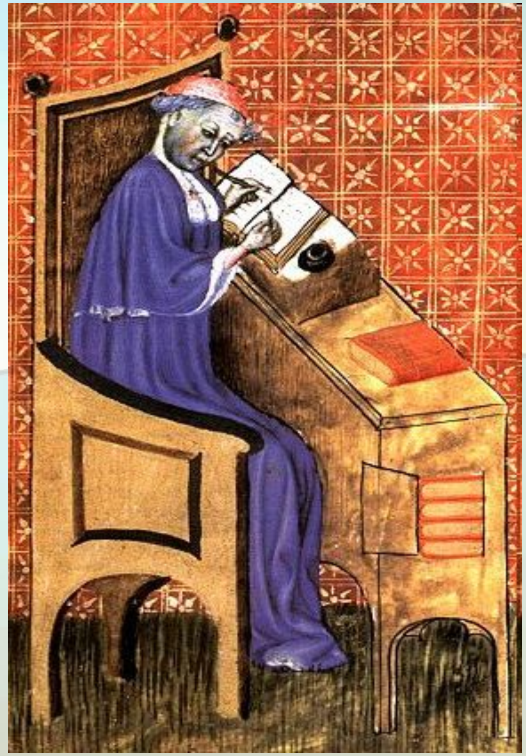
где r - любое рациональное число

О происхождении терминов и обозначений

- К умножению равных сомножителей приводит решение многих задач. Понятие степени с натуральным показателем возникло уже в Древней Греции (выражение *квадрат числа* возникло при вычислении площади квадрата, а *куб числа* – при нахождении объема куба). Но современные обозначения (типа a^4, a^5) в XVII в. ввел Декарт.
- Дробные показатели степени и наиболее простые правила действий над степенями с дробным показателем встречаются в XIV в. у французского математика Н. Орема (1323 -1382). Известно, что Шюке (ок. 1445 - ок. 1500) рассматривал степени с отрицательным и нулевым показателем.
- С.Стевин предложил подразумевать под $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$.
- Немецкий математик М. Штифель (1487-1567) дал определение $a^0 = 1$ при $a \neq 1$ и ввел название *показатель* (это буквенный перевод с немецкого Exponent). Немецкое potenzieren означает *возведение в степень*.
- Но систематически рациональные показатели первым стал употреблять Ньютон (1643 -1727).

Рене Декарт

(1596-1650)



Николай Оре́м,

или Николай Орезмский

(1323-1382)

Симон Стевин

(1548-1620)

«Как алгебраисты вместо АА, ААА, … пишут A^2, A^3, …,

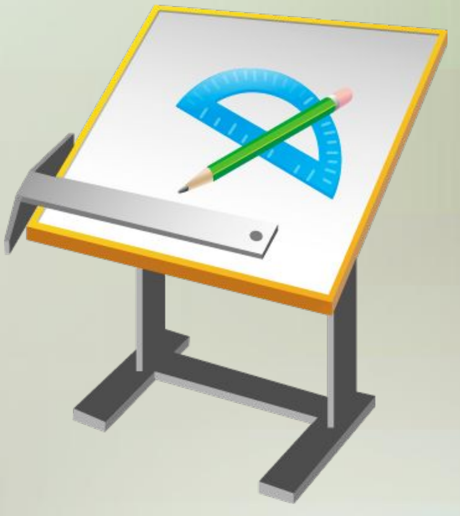
так я вместо $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, … »

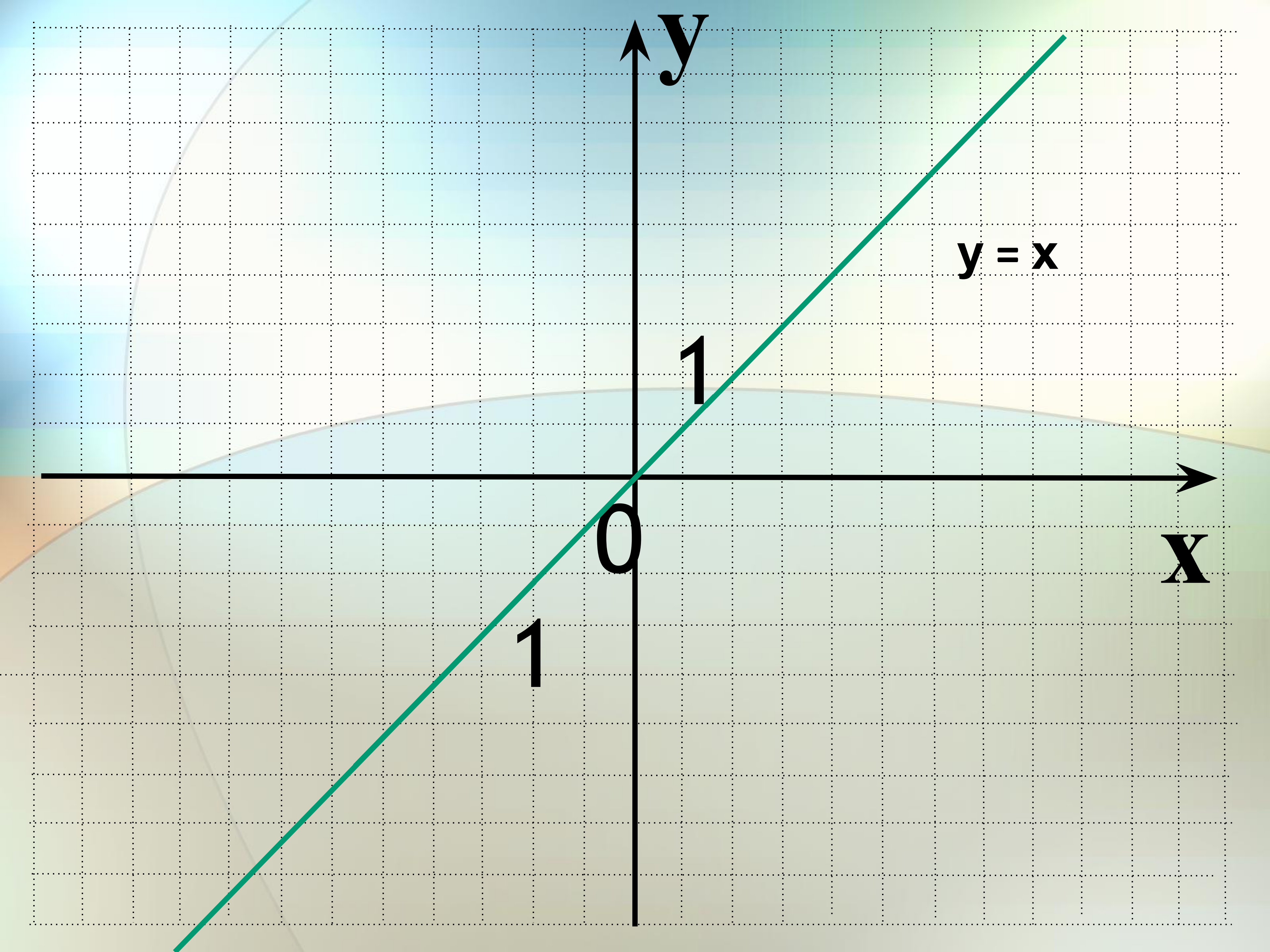
Ньютон И.

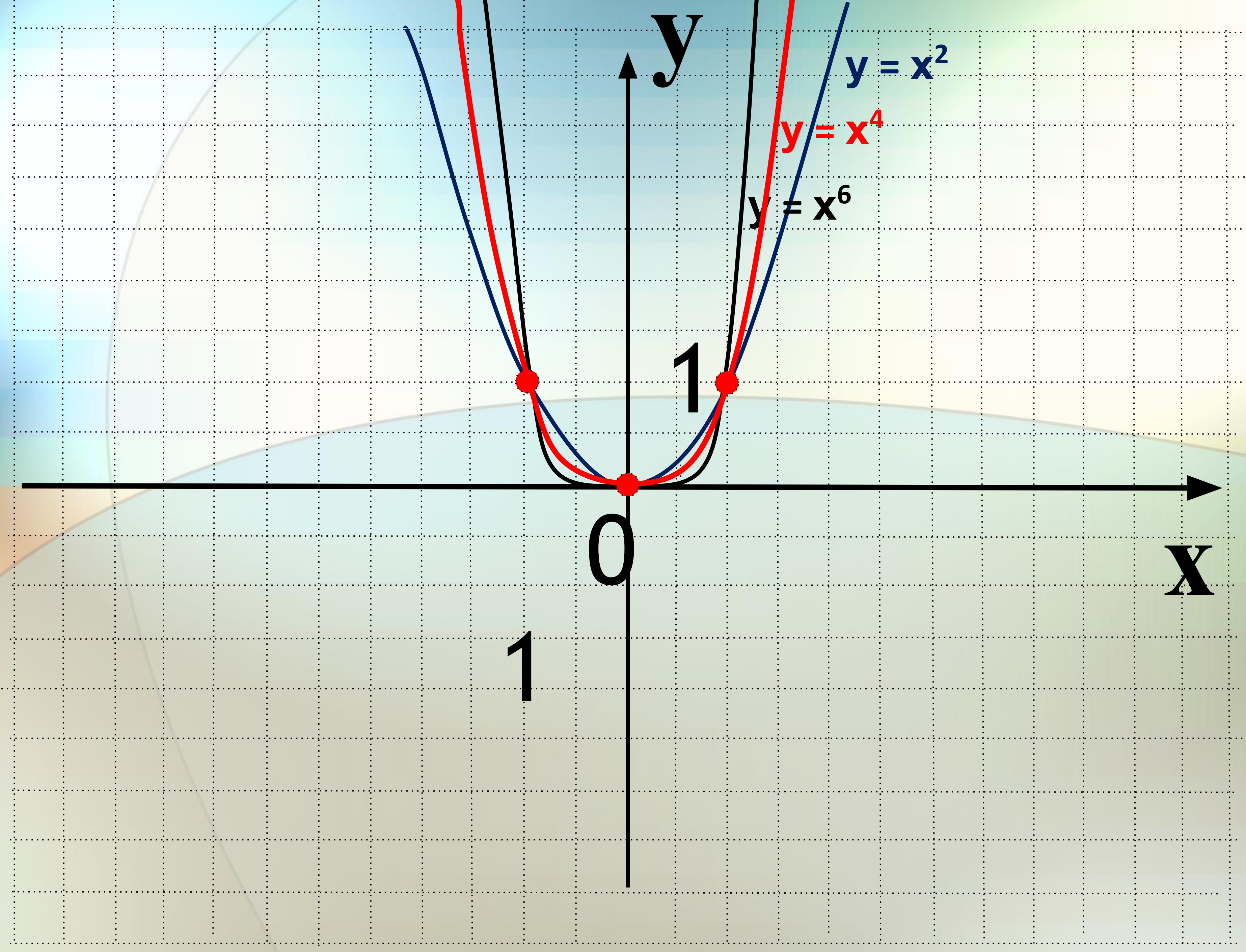
(1643 -1727)

Степенная функция $y=x^{m}$,

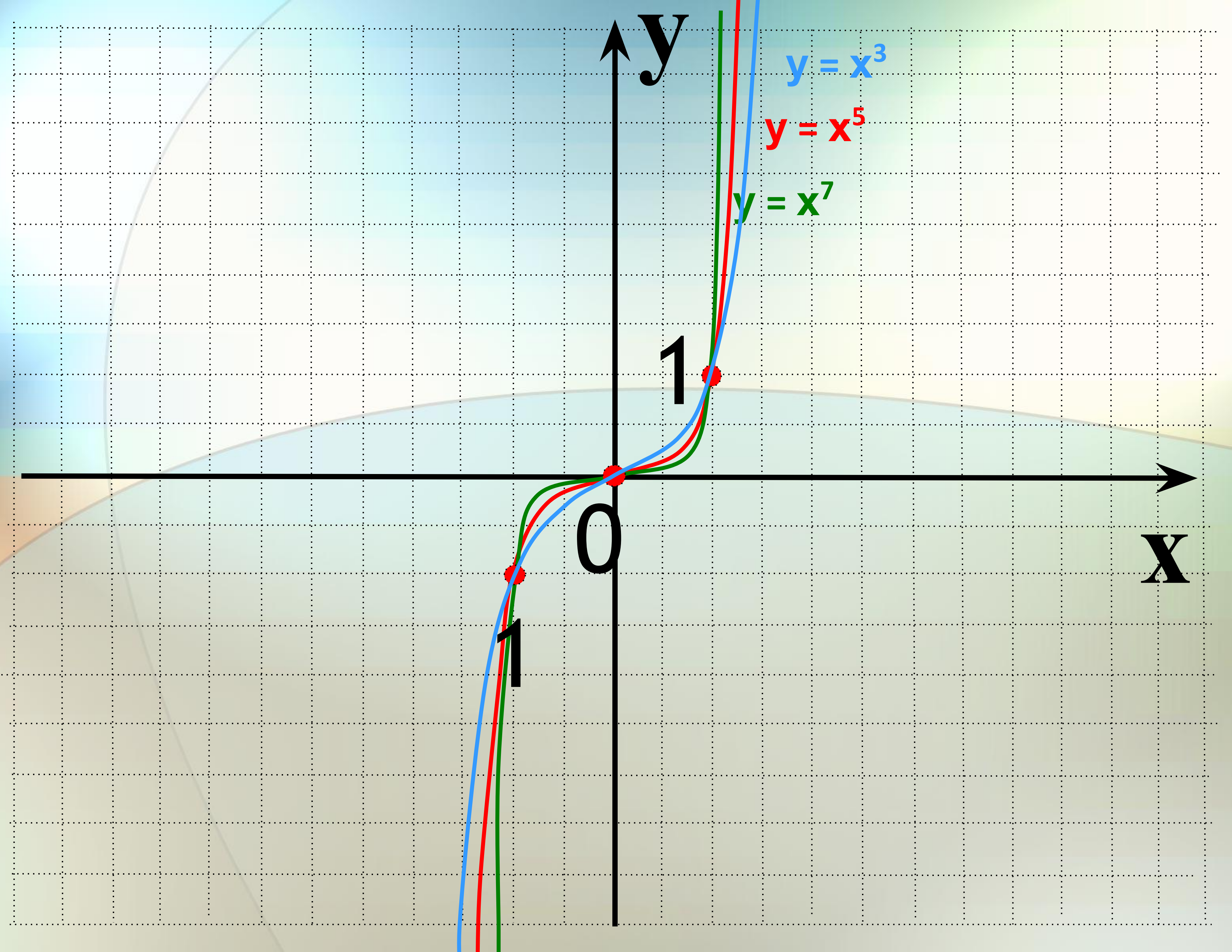
где m - целое число

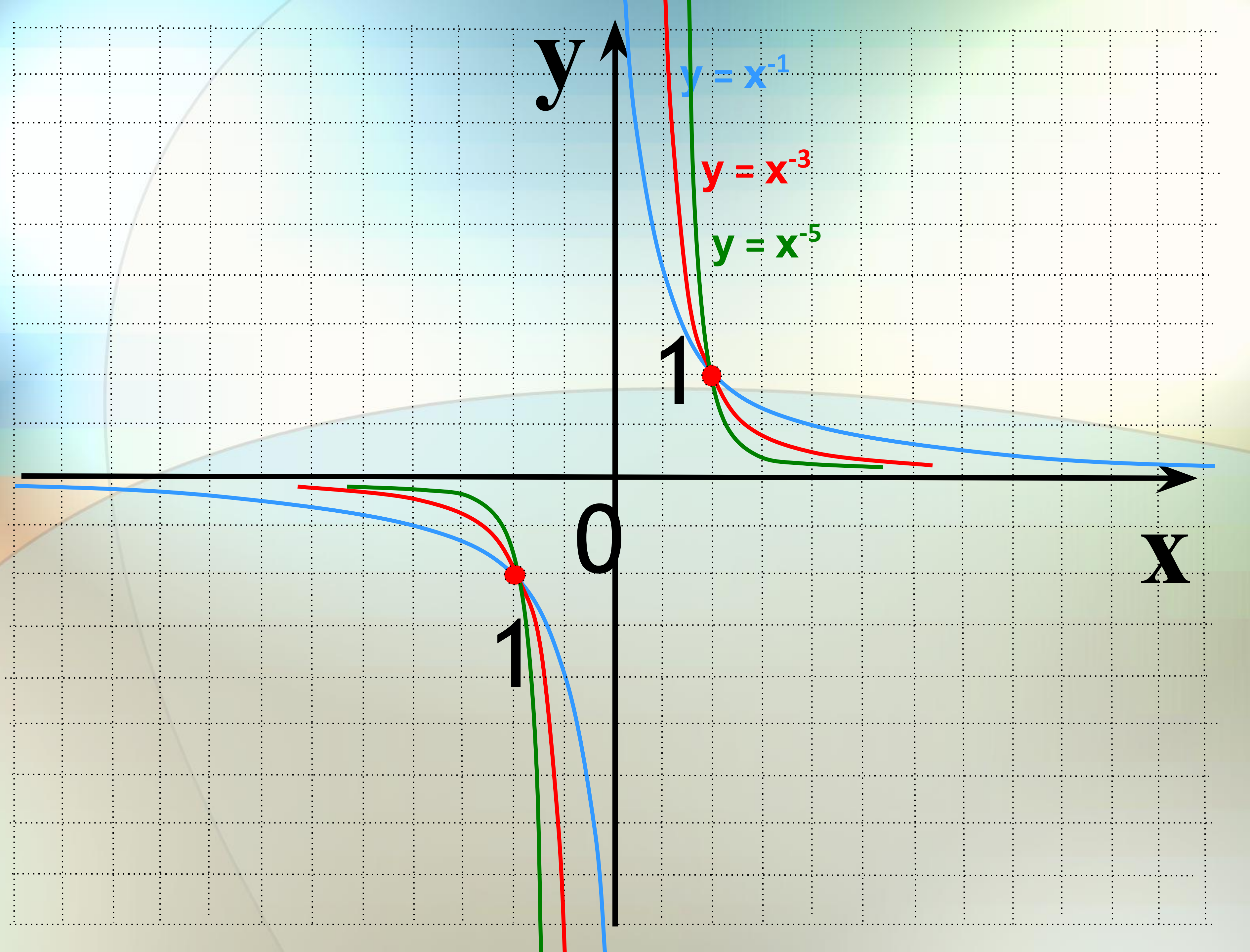


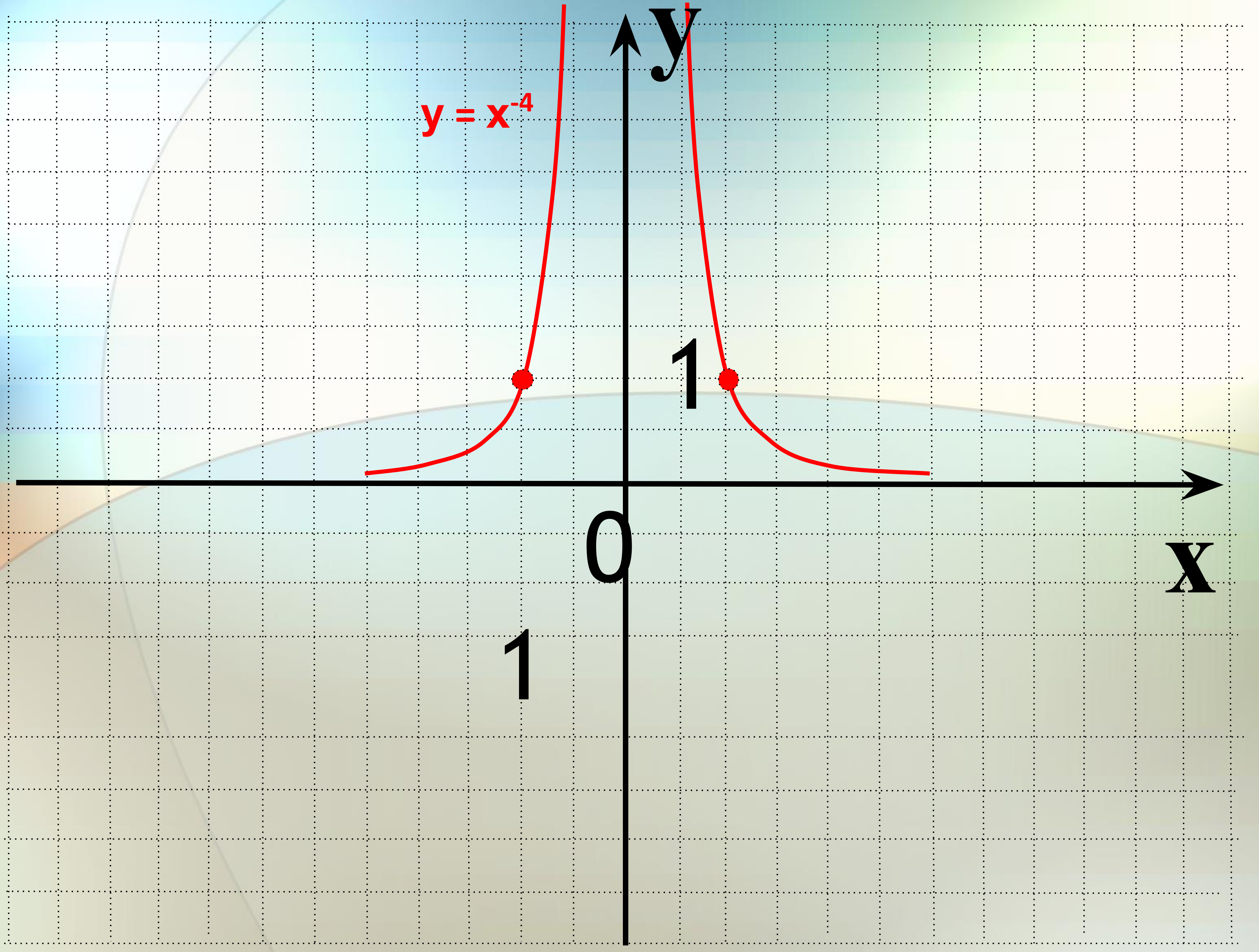

y
x
y = x
1
0
1



y = x2
y = x4
y = x6
y
x
1
0
1


y
y = x3
y = x5
y = x7
1
0
1
x

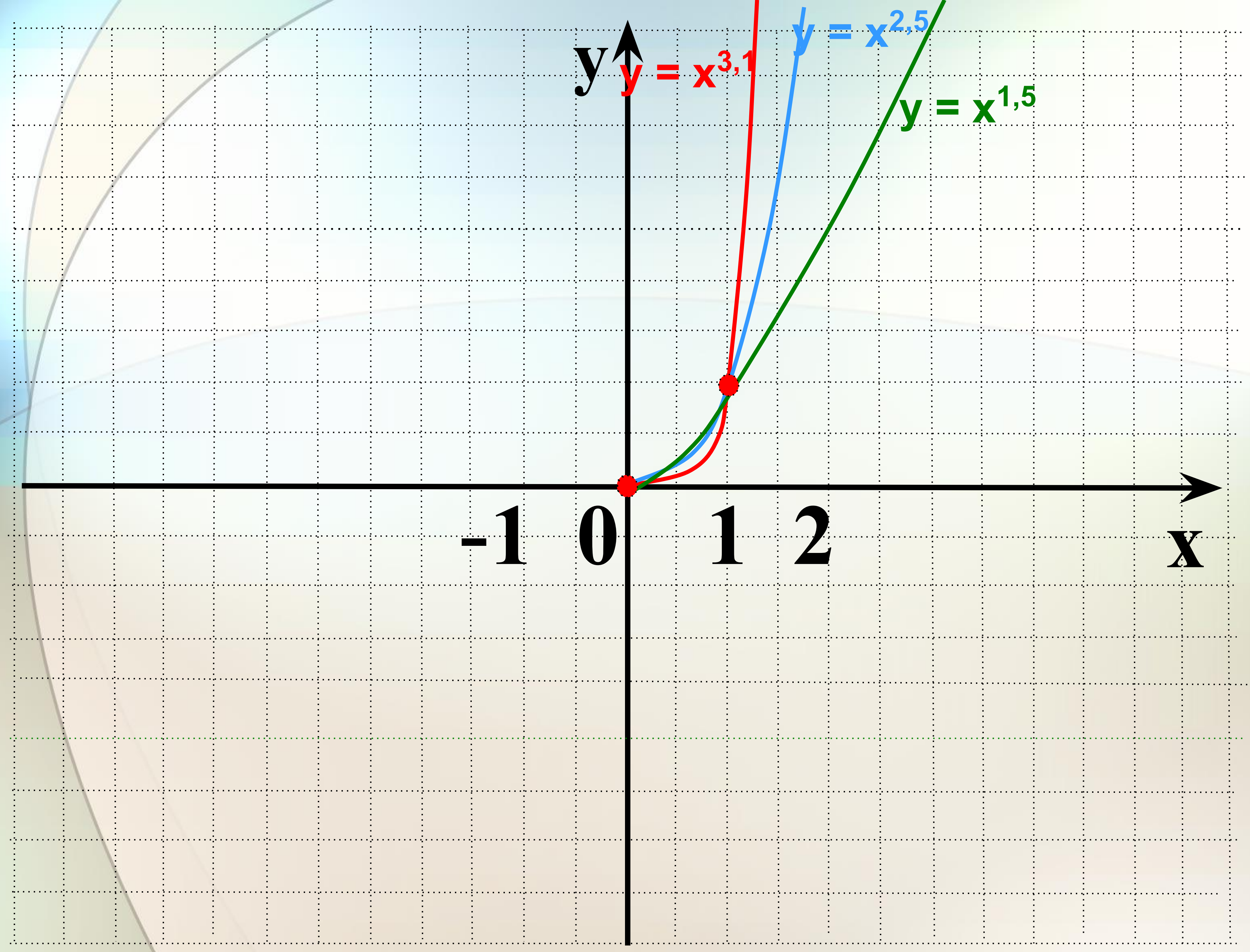

y
$y = x^{-1}$
$y = x^{-3}$
$y = x^{-5}$
1
0
x
1



y
$y = x^{-4}$
1
0
x
1

« Степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$

где $\frac{m}{n} > 1$ »



y
$y = x^{3,1}$
$y = x^{2,5}$
$y = x^{1,5}$
-1
0
1
2
x

Свойства функции

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, где \frac{m}{n} > 1$$

- $D(f) = [0;+\infty)$;
- не является ни четной, ни нечетной;
- возрастает на $[0;+\infty)$;
- не ограничена сверху, ограничена снизу;
- не имеет наибольшего значения; $y_{наим} = 0$;
- непрерывна;
- $E(f) = [0;+\infty)$;
- выпукла вниз;

Докажем третье свойство:

Пусть $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $0 \le x_1 < x_2$.

Тогда $x_1^m < x_2^m, \sqrt[n]{x_1^m} < \sqrt[n]{x_2^m}$, т.е. $x_1^{\frac{m}{n}} < x_2^{\frac{m}{n}}$.

Итак, из $0 \le x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$,

т.е. функция возрастает.

Выводы:

- Особенности графика функции $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$: расположен в I координатной четверти, проходит через точки (0;0), (1;1), похож на «ветвь» параболы.

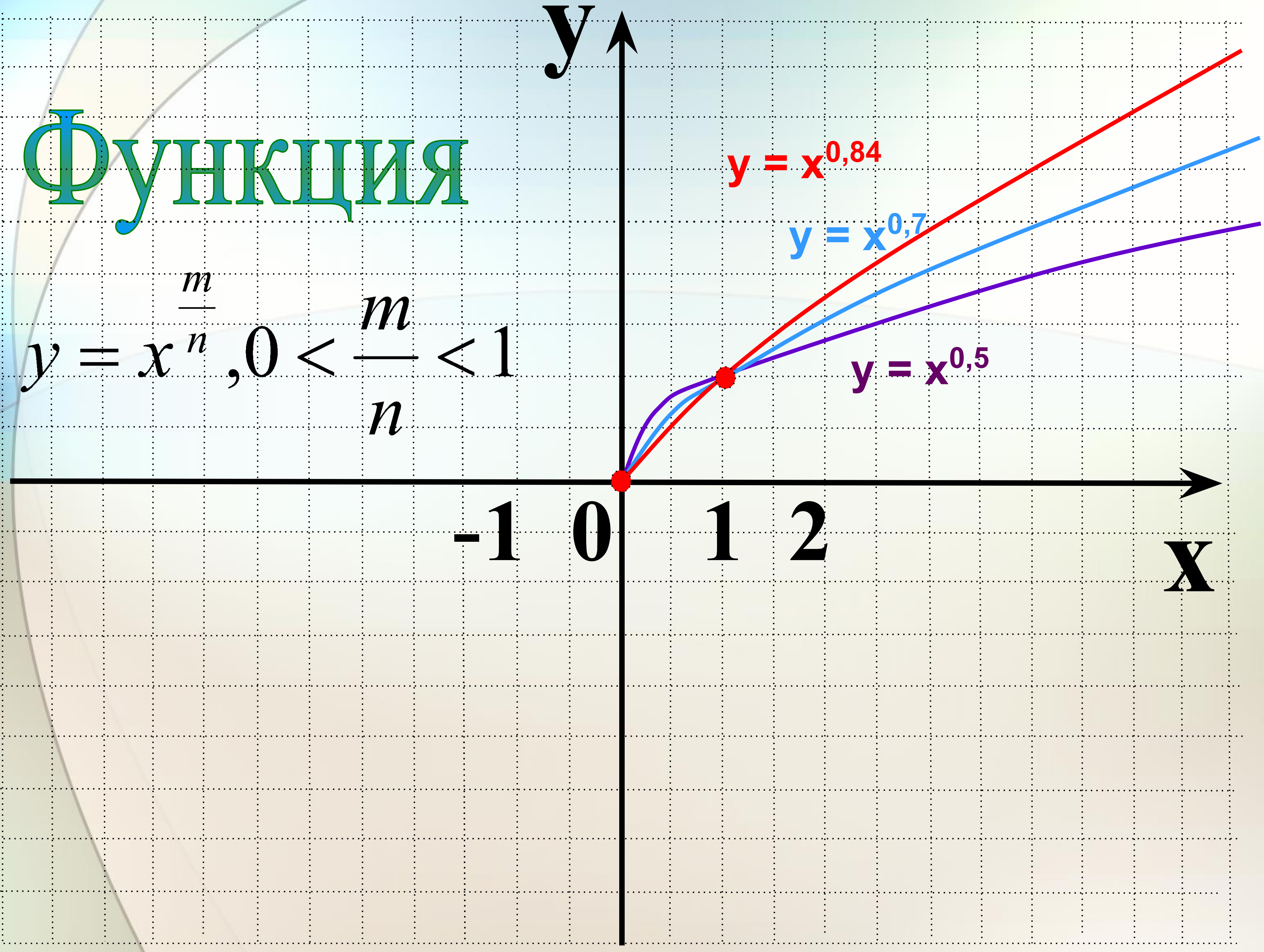
Степенные функции

$$y = x^{\frac{m}{n}}, 0 < \frac{m}{n} < 1,$$

их свойства и графики

Функция

$$y = x^{\frac{m}{n}}, 0 < \frac{m}{n} < 1$$



Выводы:

- Особенности графика функции $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$: расположен в I координатной четверти, проходит через точки (0;0), (1;1), похож на график функции $f(x) = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$, обладает такими же свойствами.

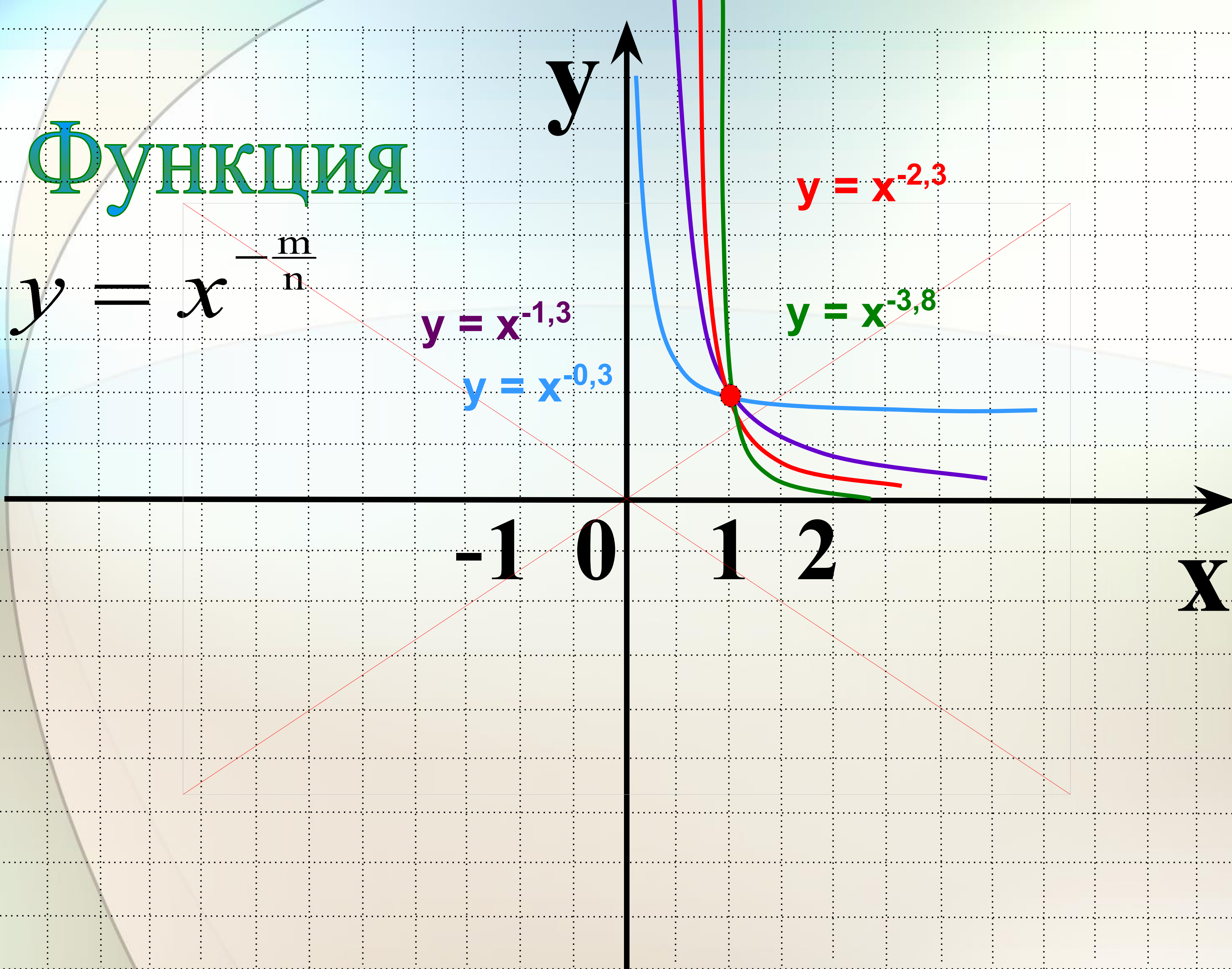
Степенные функции

$$y = x^{-\frac{m}{n}},$$

их свойства и графики

Функция

$$y = x^{-\frac{m}{n}}$$



Выводы:

- Особенности графика функции $f(x) = x^{-\frac{m}{n}}$:

расположен в I координатной четверти,

проходит через точки (0;0), (1;1),

похож на «ветвь» гиперболы.

График данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

2. Практическое применение

1. Решите уравнение $x^{\frac{4}{3}} = 2 - x.$

Решение.

1) Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: $x = 1$.

$$1^{\frac{4}{3}} = 2 - 1$$ – верное равенство.

2) Т.к. степенная функция $y = x^{\frac{4}{3}}$ возрастает, а линейная функция $y = 2 - x$ убывает, то других корней у уравнения нет.

Ответ : $x = 1.$

2). Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$y = x^{\frac{5}{2}}$ на отрезке [1;2].

Решение:

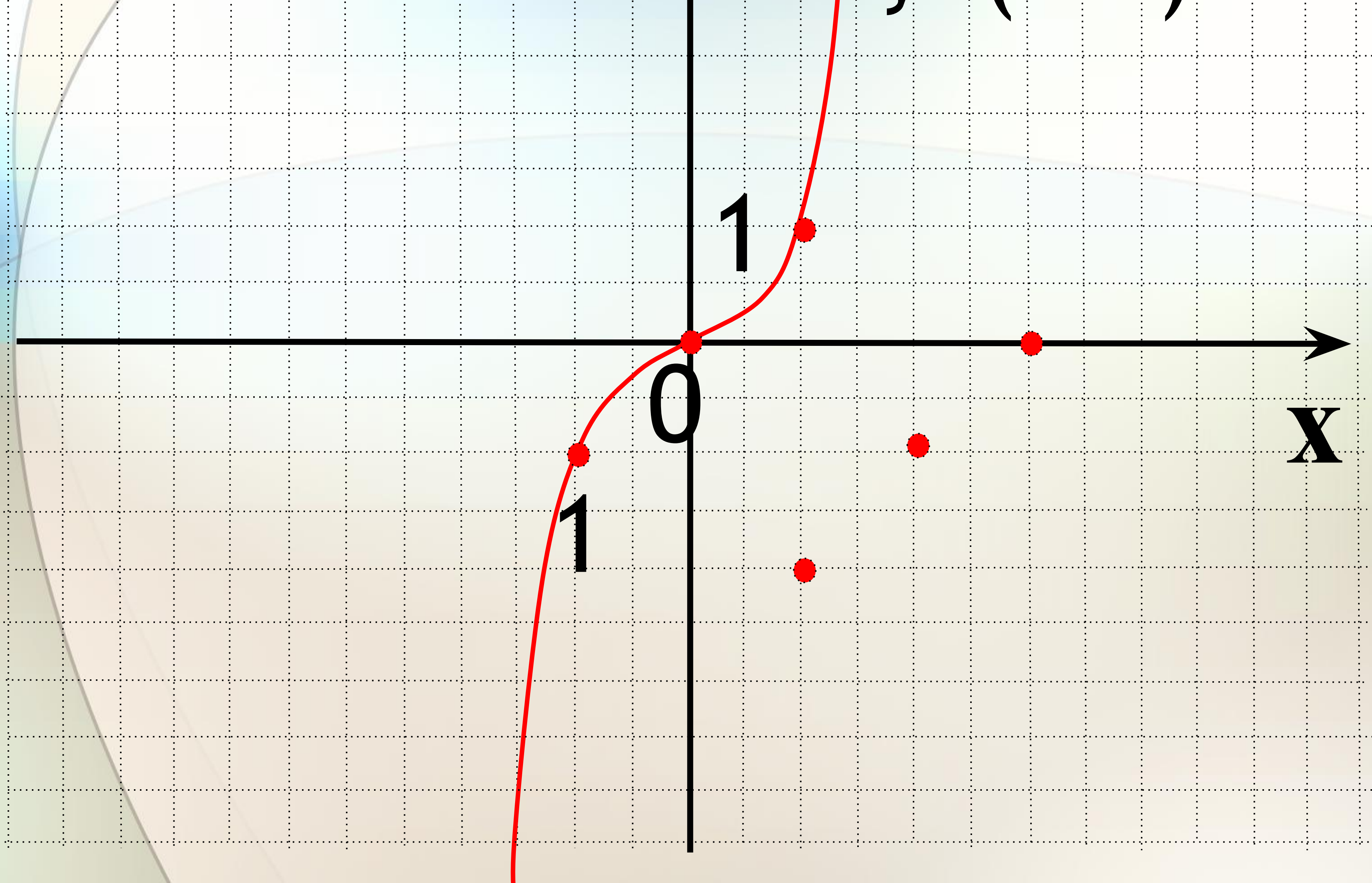
Воспользуемся тем, что функция возрастает и, следовательно, свои наименьшее и наибольшее значения достигает соответственно в левом и правом концах заданного промежутка, если концы промежутка принадлежат самому промежутку.

$$y_{наим.} = 1^{\frac{5}{2}} = \sqrt{1^5} = 1$$

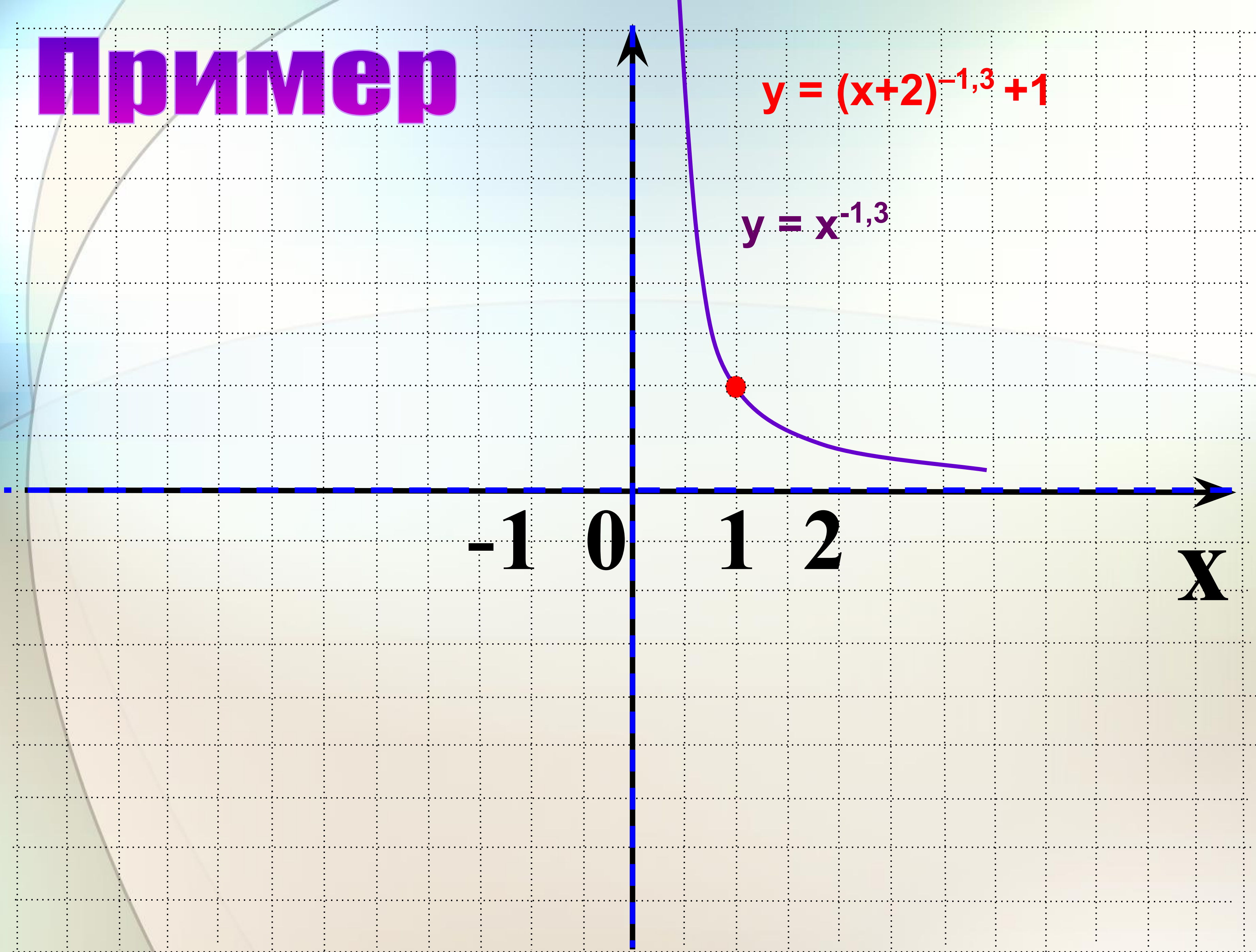
$$y_{наиб.} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Задание.

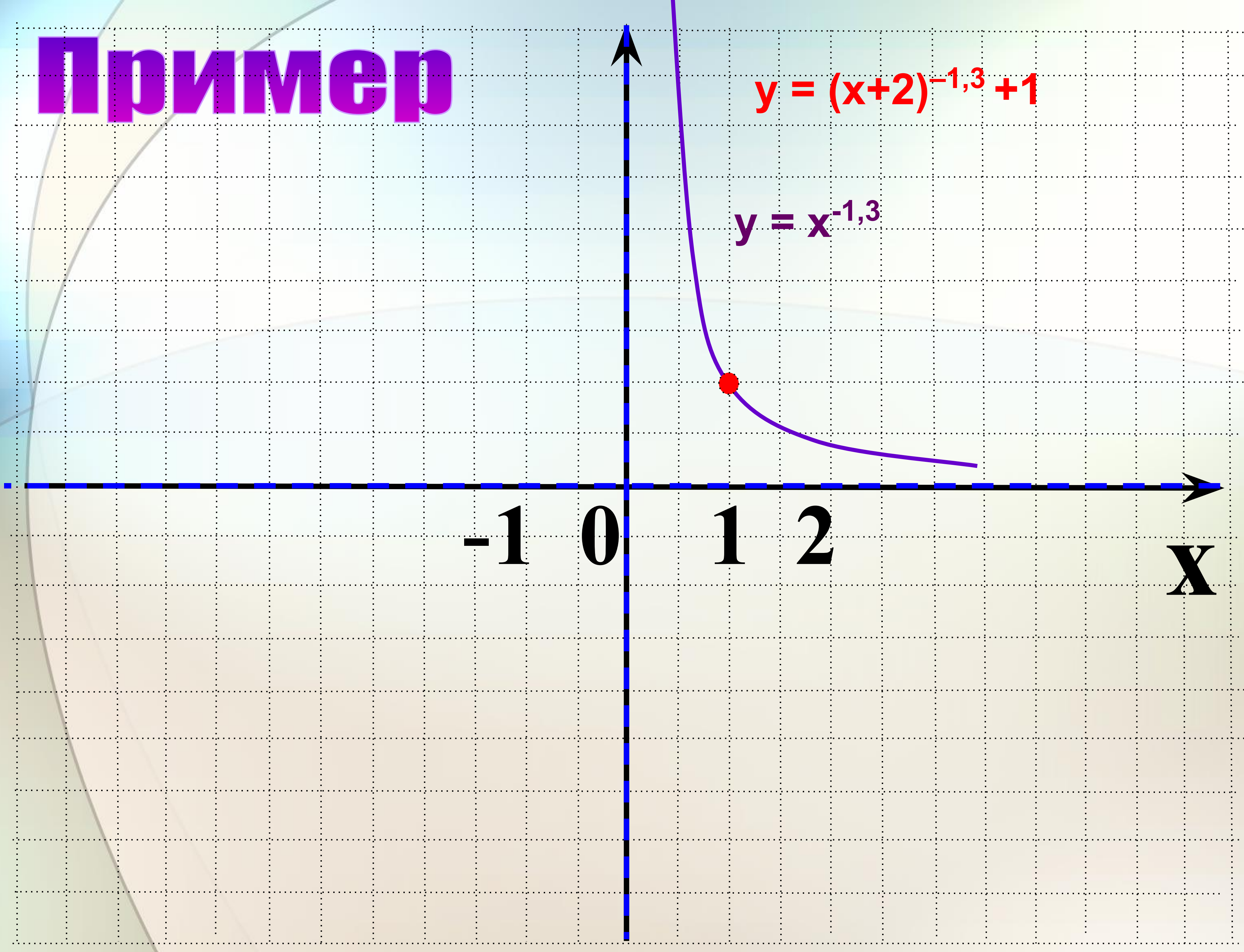
Построить график функции $y=(x-2)^3-1$



Пример



Пример



Задания для самостоятельного решения

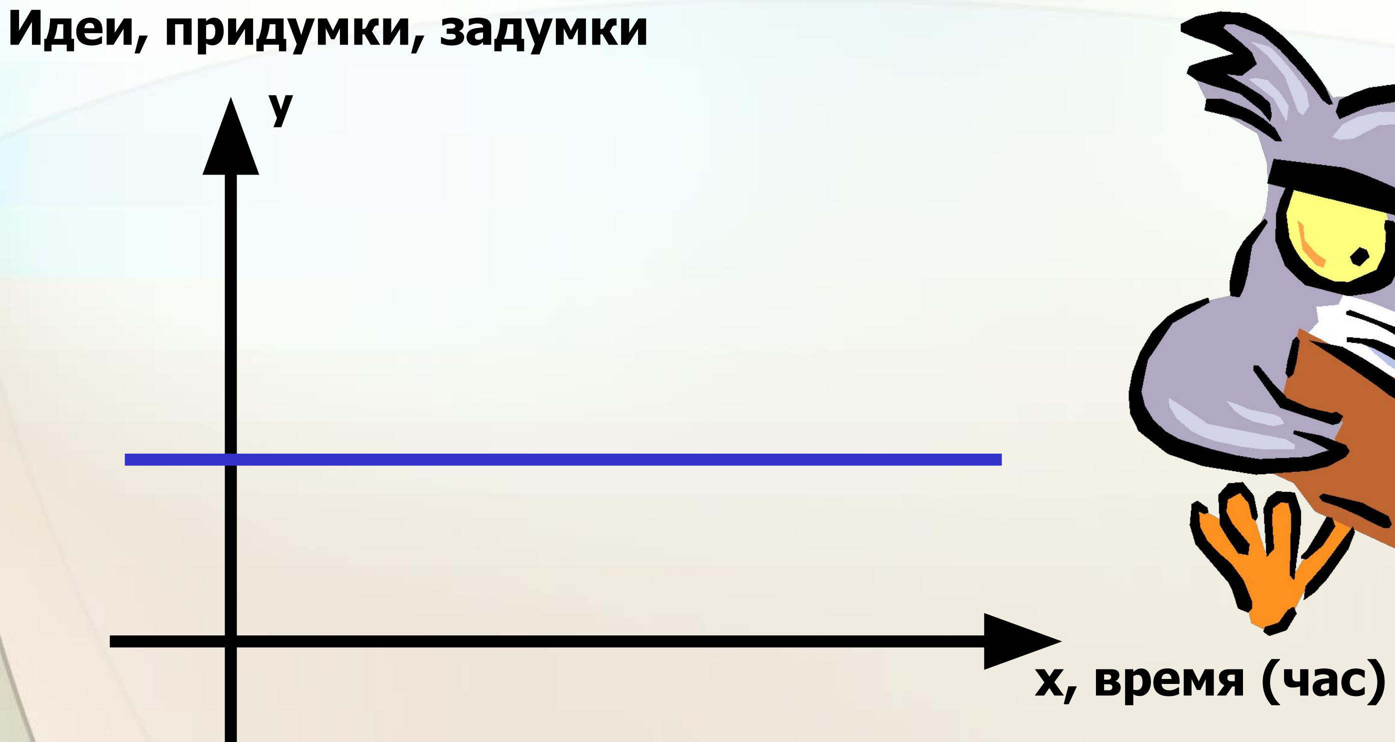
- Решите уравнение $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}$.
- Постройте и прочитайте график функции

$$y = \begin{cases} x^2, если\_x \le 0, \\ x^{\frac{2}{3}}, если 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{x}, x > 1. \end{cases}$$

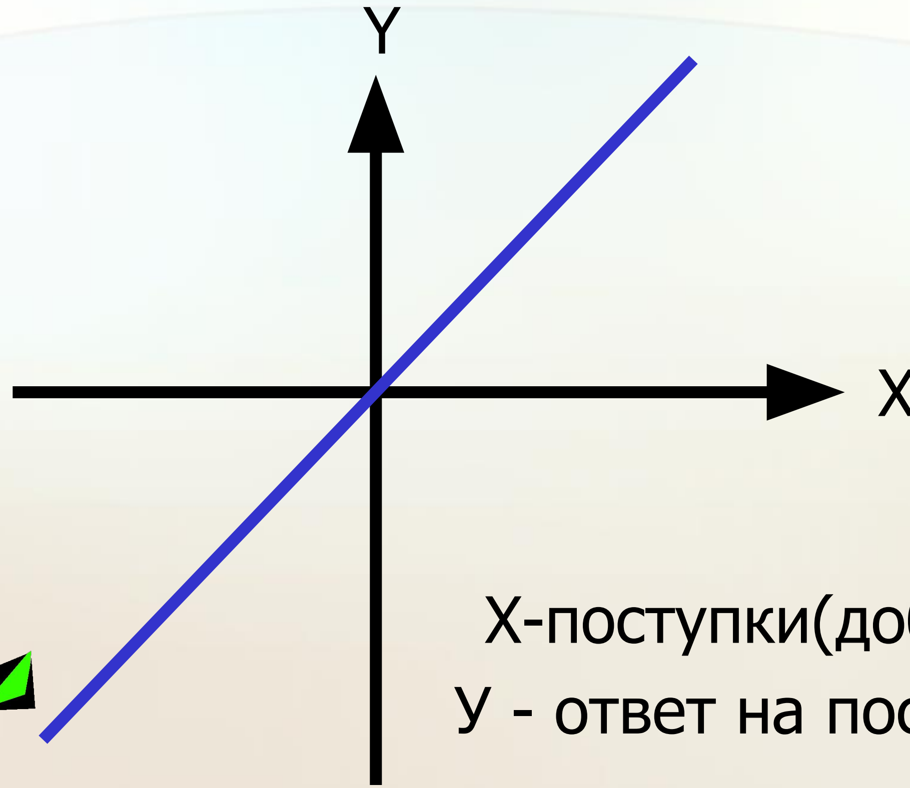
- Решите неравенство $x^{-\frac{1}{4}} \le x^3$.

Функции в пословицах

«Долго думал, да ничего не выдумал»



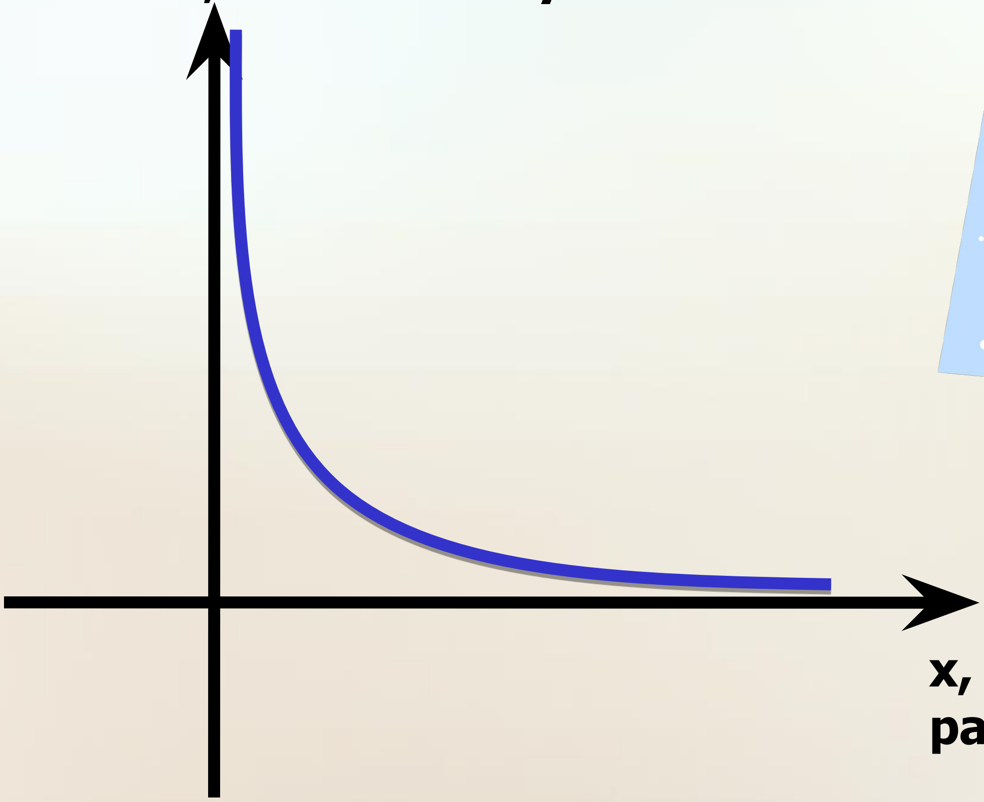
«Как аукнется, так и откликнется»



X-поступки(добрые, злые)

У - ответ на поступки

«Поменьше говори, побольше услышишь»



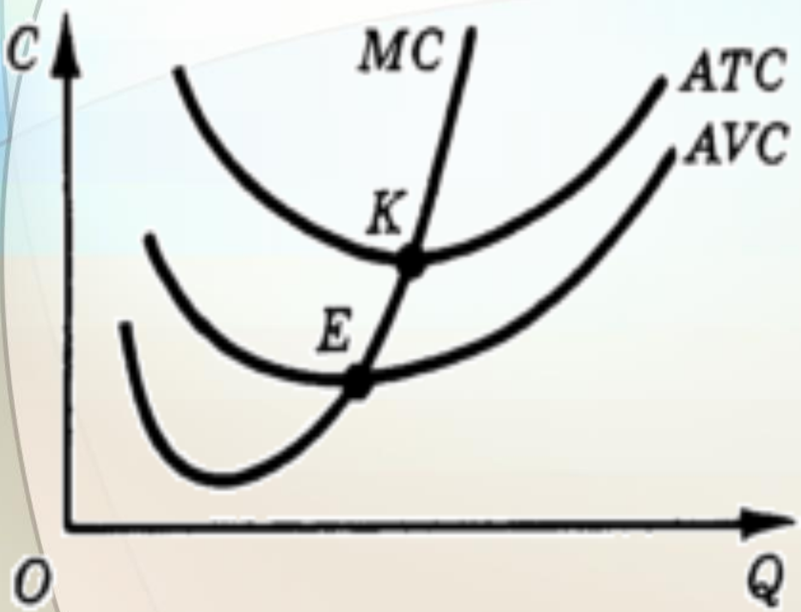
Применение степенной функции в физике

- $S = \frac{\pi}{4} d^2$, где *S* - площадь поперечного сечения провода диаметра *d*

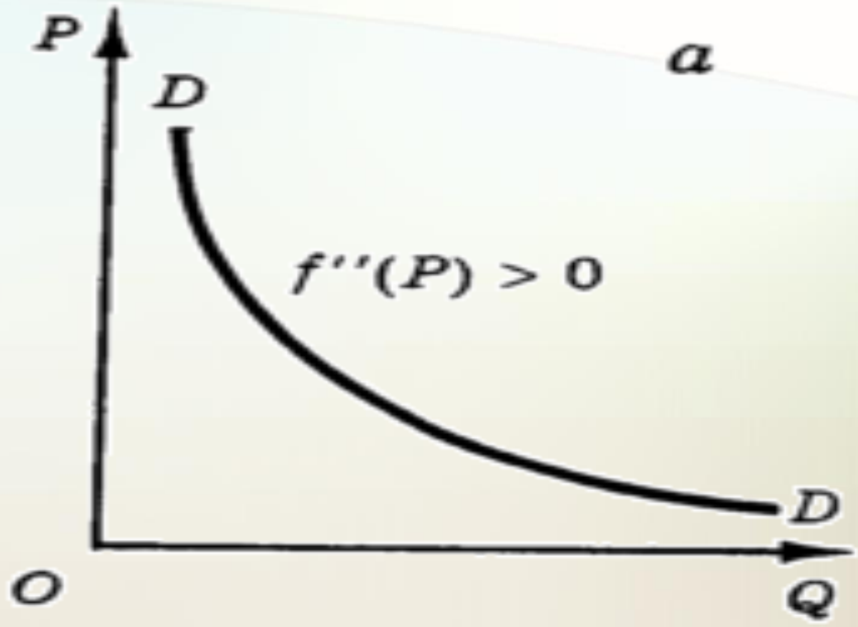
- $F = Qm_1m_2r^{-2}$, *где F* - сила притяжения между двумя телами с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии *r*, *Q*-постоянная гравитационная величина

Траектория движения тела, брошенного вверх

Применение степенной функции в экономике

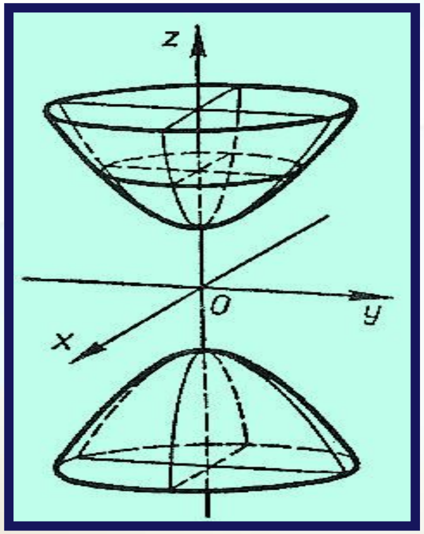


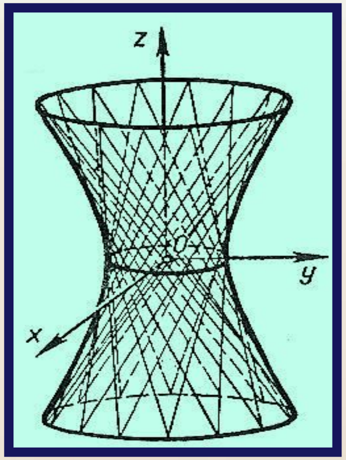
Графики издержек



Функция спроса

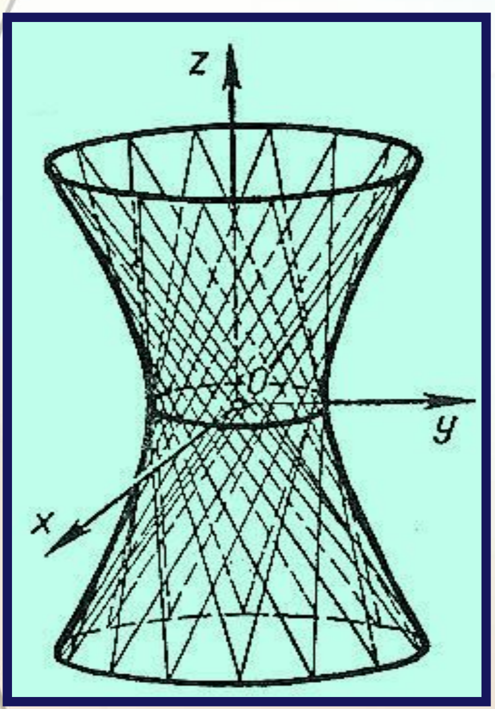
3. Степенные функции в окружающей жизни. Гиперболоиды вращения





- Вращая гиперболу вокруг каждой из этих осей, получают два гиперболоида вращения - однополостной и двуполостной.

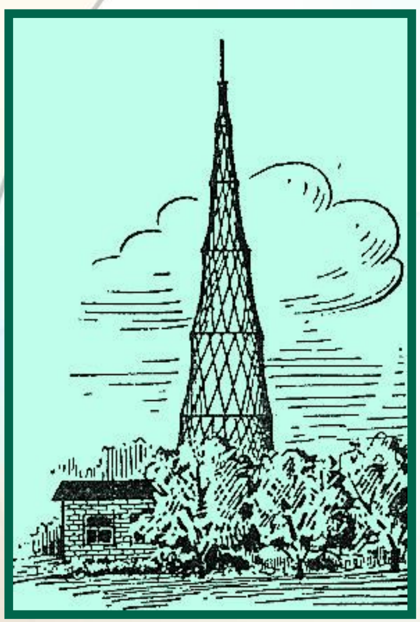
Однополостной гиперболоид



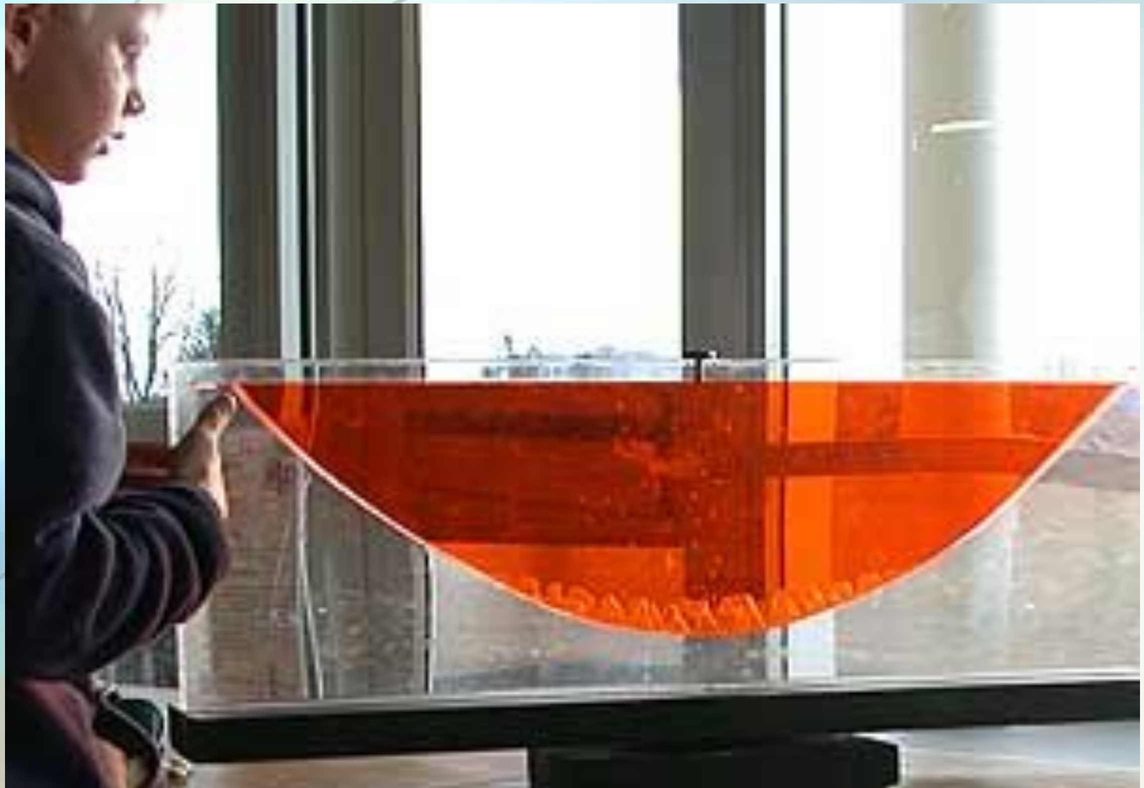
- Однополостной гиперболоид вращения обладает замечательным свойством — через каждую точку этого гиперболоида проходят две прямые линии, целиком лежащие на нём.

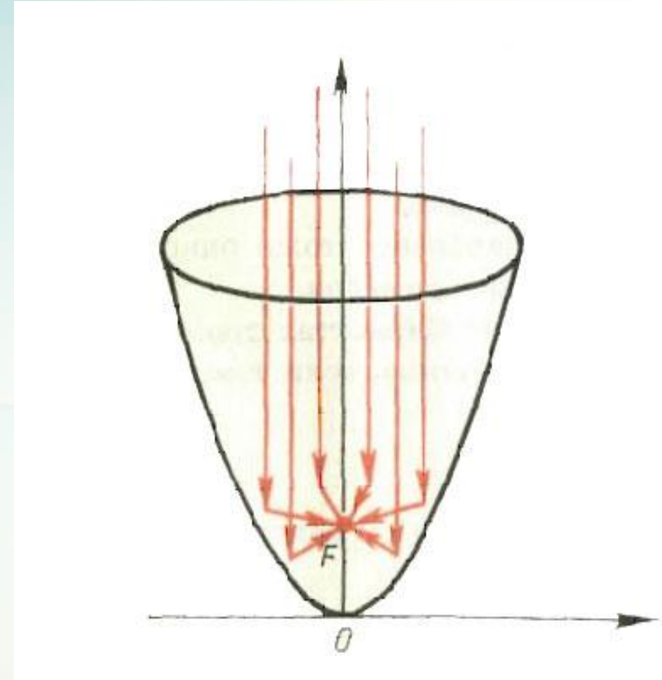
  Поэтому однополостной гиперболоид как бы соткан из прямых линий.

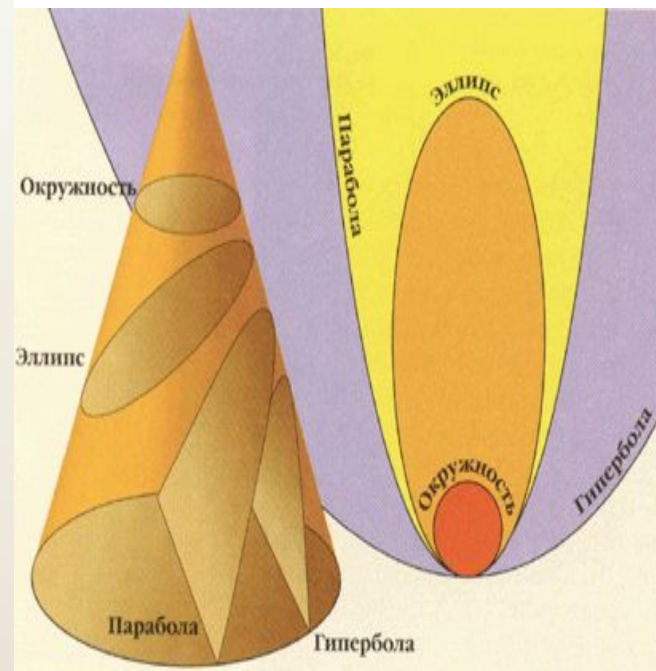
Применение гиперболоидов



- Свойства однополостного гиперболоида использовал русский инженер В.Г. Шухов при строительстве радиостанции в Москве (башни Шухова). Она состоит из нескольких поставленных друг на друга однополостных гиперболоидов.
- Также устроена и Эйфелева башня в Париже.

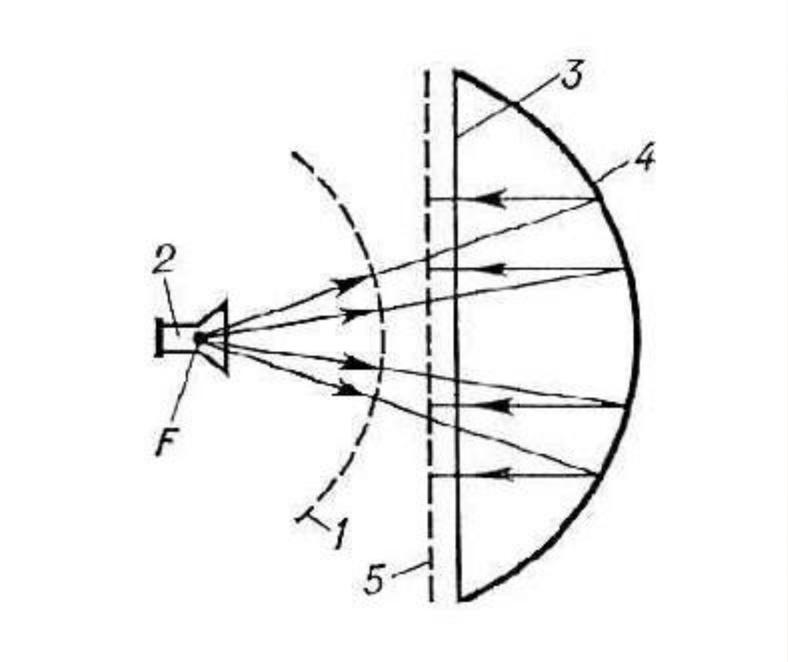




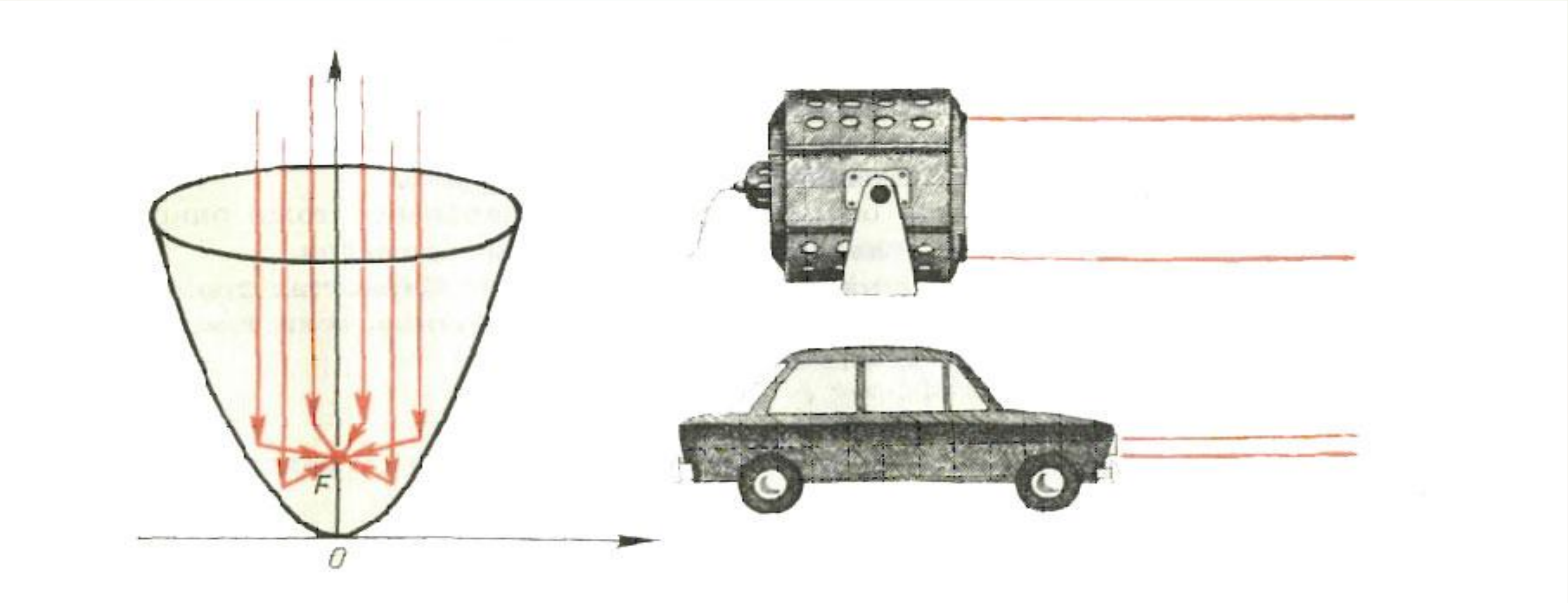


При вращении тонкого прямоугольного сосуда с жидкостью вокруг его горизонтального центра поверхность жидкости в сосуде принимает форму параболы

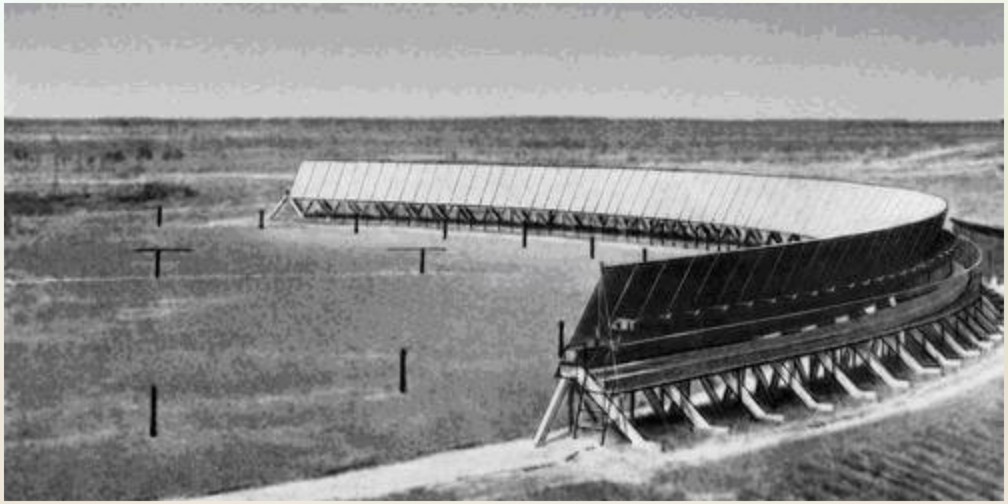
Свойство параболы о фокусировании параллельного пучка прямых используется в конструкции прожекторов, фонарей, фар, а так же телескопов-рефлекторов (оптических, инфракрасных, радио…), в конструкции узконаправленных (спутниковых и других) антенн, необходимых для передачи данных на большие расстояния, солнечных электростанций и в других областях.



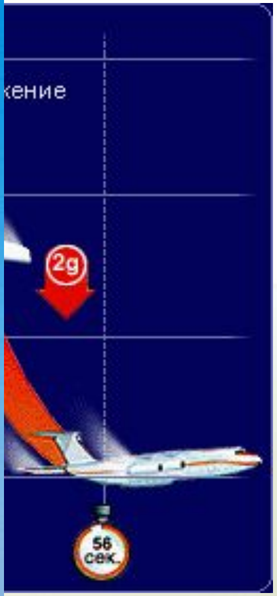
Если теперь сделать внутреннюю поверхность параболоида зеркальной и направить поток света по направлению оси ординат, то все лучи света соберутся в одной точке, которую, называют фокусом. А если в фокус поставить источник света, например, электрическую лампочку, то получится самая обыкновенная фара, или прожектор, или часть карманного фонарика.



Одно из очень важных применений параболы на практике связано с антенными устройствами.

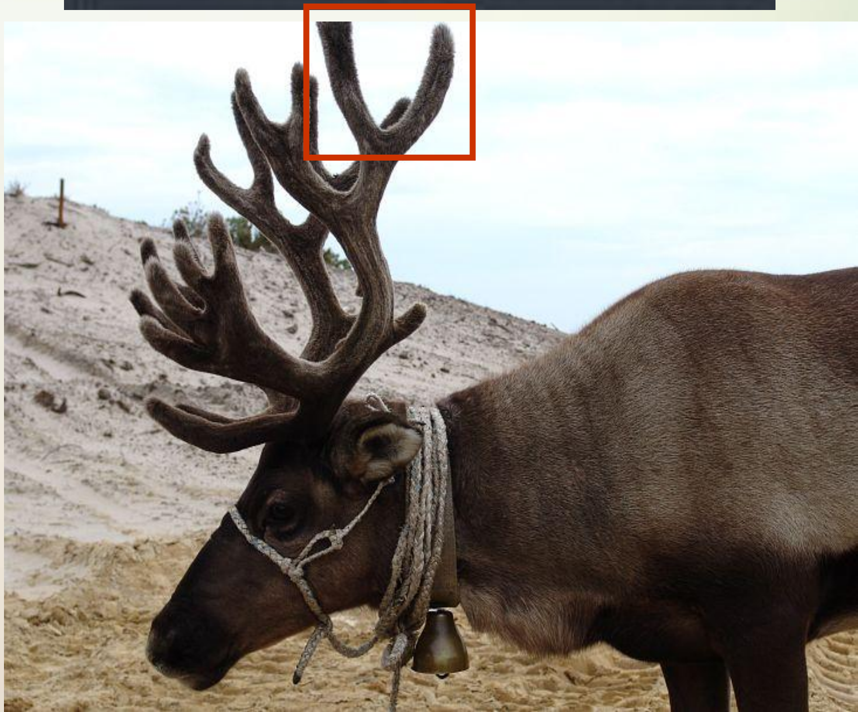


Траектория движения - парабола



Парабола вокруг нас

Перевал Нижняя Парабола




EAU DE TOILETTE
PARIS
Parabole
PARABOLE

Парабола в архитектуре и строительстве

Выводы:

- Рассмотренные свойства функций можно применить на практике при решении уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.
- Степенные функции находят широкое применение в окружающей жизни, в смежных дисциплинах.