ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

(в помощь учителям математики, работающим в выпускных классах

Косенко Наталья Михайловна
учитель математики

На свете ни единому уму,
Имевшему учительскую прыть,
Глаза не удалось открыть тому,
Кто сам не собирался их открыть.

И. Губерман

Задачи с параметрами, традиционно включаются в варианты письменных экзаменов по математике.

К сожалению, решению задач с параметрами в школьной программе отведено очень мало времени, поэтому практика показывает, что решение задач данного вида вызывает у выпускников большие затруднения.

АНАЛИЗ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Анализируя задачи с параметрами, которые предлагаются в тестах ЕГЭ, можно увидеть, что большинство уравнений можно свести к квадратным, корни которых находятся на ограниченном множестве переменной величины. Ограничения возникают в области определения и области значений функций, входящих в уравнение (логарифмические, показательные, иррациональные, модульные).

Рассмотрение класса задач, связанных с исследованием корней квадратного трёхчлена, позволяет решить следующие задачи:

- ***стимулировать более глубокое изучение темы «Квадратный трёхчлен»;***
- ***развивать у школьников навыки аналитического мышления;***
- ***обеспечить необходимый тренинг при подготовке к экзамену по математике.***

КАК РЕШАТЬ?

Решение в «лоб»
(подстановка корней уравнения на множество ограничений)

Применение косвенных приемов
(теоремы Виета, теорем о расположении корней квадратного уравнения, графических методов)

Первый путь применяется для корней линейного уравнения.

Второй путь при решении квадратных уравнений. Он проще и более универсален.

ТЕОРЕМЫ О РАСПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

ТЕОРЕМА 1

Пусть дан трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где $a \neq 0$ и d-любое действительное число.

Если выполняется условие:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0; \\ a \cdot f(d) > 0; \\ -\dfrac{b}{2a} < d. \end{cases}$$

то этот трехчлен имеет два действительных корня x_1 и x_2, которые меньше числа d

ТЕОРЕМА 2

Пусть дан трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c,$ где $a \neq 0$ и d-любое действительное число.

Если выполняется условие:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0; \\ a \cdot f(d) > 0; \\ -\dfrac{b}{2a} > d. \end{cases}$$

то этот трехчлен имеет два действительных корня x_1 и x_2, которые меньше числа d

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ 1 И 2

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2, где $d_1 < d_2$. Если для квадратного трёхчлена $f(x)$ из (1) выполняются условия:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ a \cdot f(d_1) > 0, \\ a \cdot f(d_2) > 0, \\ d_1 < -\dfrac{b}{2a} < d_2, \end{cases}$$

то этот трёхчлен имеет два действительных корня x_1 и x_2, принадлежащие промежутку

$$(d_1, d_2).$$

ТЕОРЕМА 3

Пусть дано некоторое действительное число d. Если для квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c,$ где выполняется условие $a\neq 0,$ то он имеет два действительных корня x_1 и x_2, расположенных на вещественной оси по разные стороны от d .

$$a\cdot f(d)<0$$

ТЕОРЕМА 4

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2, где $d_1 < d_2$.

Если для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, выполняется условие $f(d_1) \cdot f(d_2) < 0$, то квадратный трехчлен имеет два действительных корня x_1 и x_2, один из которых принадлежит промежутку $(d_1; d_2)$, а другой не принадлежит промежутку $[d_1; d_2]$.

ТЕОРЕМА 5

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2, где $d_1 < d_2$. Если для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, где выполняется условие

$$\begin{cases} a \cdot f(d_1) < 0 \\ a \cdot f(d_2) < 0 \end{cases}$$

то он имеет два действительных корня x_1 и x_2, один из которых меньше числа d_1, а другой больше числа d_2

ЗАМЕЧАНИЯ

Условия теорем 1-5 являются необходимыми и достаточными условиями для исследования случаев расположения корней квадратного трёхчлена.

Данные теоремы позволяют по единой методике решать большой класс задач.

ПРИМЕР

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет действительные корни

$$ax^2+(a+3)x+2a+1=0$$

a) меньше «5»;
b) больше «-3»;
c) принадлежащие промежутку $[0;3]$;
d) находящиеся на вещественной оси по разные стороны от числа «1»;
e) один из которых принадлежит промежутку $[0;3]$ а другой не принадлежит;
f) расположенные на вещественной оси по разные стороны от промежутка $[0;3]$.

ПРИ ПОМОЩИ ДАННЫХ УРАВНЕНИЙ МОЖНО РЕШАТЬ БОЛЬШОЙ КЛАСС ЗАДАЧ.

Пример 1

- Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$
- имеет единственный корень.

Пример 2

- При каких значениях параметра a, уравнение $\left(4^{t-1} - (a-3)\cdot 2^{t-1} + 9\right)\cdot \lg\left(5 - 2^{t}\right) = 0$ имеет 2 корня.