Производная, ее геометрический и физический смысл. Правило дифференцирования сложной функции. Дифференцирование функций. Производные обратной функции и композиции функции. Использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Формулы дифференцирования функций

$(c)' = 0$	$(x)' = 1$		
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$		
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$		
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования функций

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Правила можно сформулировать и словами

- Производная суммы равна сумме производных.
- Постоянный множитель можно выносить за знак производной.
- Производная произведения равна "производная первого сомножителя, умноженная на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый".
- Производная дроби равна "производная числителя, умноженная на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, и деленные на знаменатель в квадрате".

Задачи на геометрический смысл производной

- Геометрический смысл производной заключается в том, что её значение в рассматриваемой точке равняется угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в этой точке.
- Касательная - это предельное положение секущей.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0))$ на графике этой функции. Пусть известно, что при $x = x_0$ существует производная этой функции $f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной в точке с абсциссой x0 имеет вид: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

Однако для решения ряда задач, проще применять не само уравнение, а те соображения, из которых его выводили:
1) уравнение любой прямой имеет вид $y = kx + b$;
2) если прямая является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, то её угловой коэффициент совпадает с производной функции в этой точке, т.е. $k = f'(x_0)$;
3) точка касания принадлежит как прямой, так и графику функции, это означает, что её координаты должны удовлетворять обоим уравнениям, и подставляя в уравнение прямой и в выражение для функции значение абсциссы x0, мы должны получить одинаковые значения для ординаты y, т. е. $kx_0 + b = f(x_0)$.

Задача 1

Прямая $y = 5x - 3$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение

Прямая параллельная касательной имеет одинаковый с ней угол наклона к оси абсцисс. т.е., угловой коэффициент касательной (он же тангенс угла наклона) равен 5, как у заданной прямой. С другой стороны, мы знаем, что угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания. Найдем производную:

$y'(x) = (x^2 + 2x - 4)' = 2x + 2.$

Составим уравнение, подставив в выражение для производной неизвестную абсциссу точки касания x_0.

$2x_0 + 2 = 5$

$2x_0 = 5 - 2 = 3$

$x_0 = 3/2 = 1{,}5.$

Ответ: 1,5

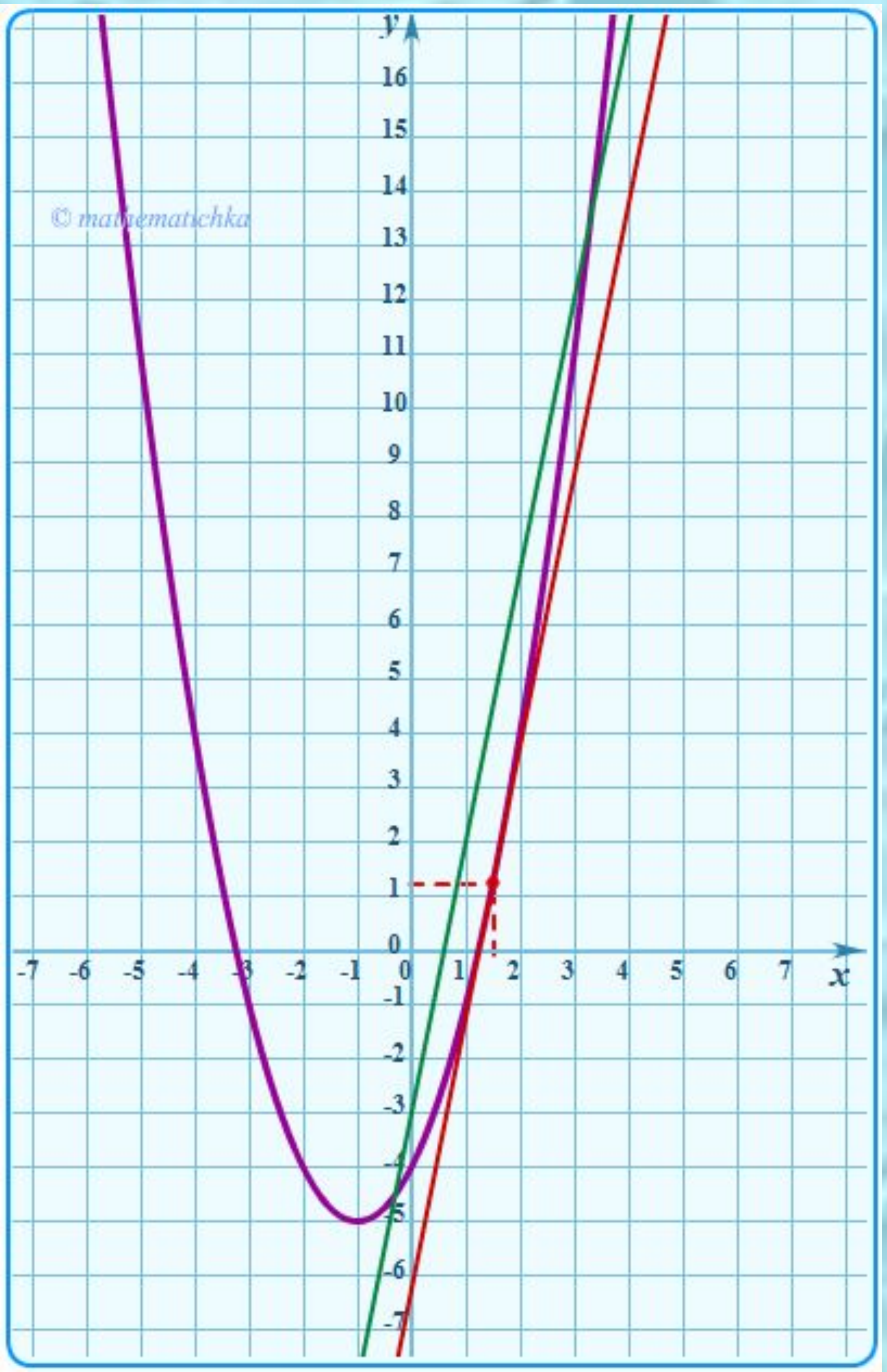

График заданной функции - фиолетовая линия.

График заданной прямой - зеленая линия.

График искомой касательной - красная линия.

Пунктир - координаты точки касания.

Задачи на физический смысл производной

- Физический смысл производной заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$.
- Это может означать, например, следующее:
  Если нас интересует движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной мы получим зависимость скорости от времени.
  Если же мы рассматриваем в качестве функции мгновенную скорость автомобиля, то производная задает изменение его ускорения.
  Если мы рассматриваем функцию, задающую зависимость объема произведенной продукции от времени, то производная позволит узнать, как изменялась со временем производительность труда на этом предприятии.
  Если мы рассматриваем электромагнитные волны, то нам могут потребоваться функции, характеризующие изменение со временем электрического и магнитного полей, а также их производные - скорости изменения этих полей, ведь величина магнитного поля пропорциональна скорости изменения электрического поля и т.п.
- Решая конкретные текстовые задачи на скорость процесса с применением производной, следует не забывать о размерностях величин. Если переменная y, заданная функцией $f(x)$ измеряется в некоторых единицах $[y]$, а её аргумент в единицах $[x]$, то производная (скорость) измеряется в единицах $[y/x]$.

Задача 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$с.

Решение

- Находимпроизводную
  $x'(t) = (6t^2 - 48t + 17)' = 12t - 48$.
  Таким образом мы получили зависимость скорости от времени. Чтобы найти скорость в заданный момент времени, нужно подставить его значение в полученную формулу:
  $x'(t) = 12t - 48$.
  $x'(9) = 12\cdot 9 - 48 = 60$.Ответ: **60**

- ***Замечание:*** Убедимся, что не ошиблись с размерностью величин. Здесь единица измерения расстояния (функции) [x] = метр, единица измерения времени (аргумента функции) [t] = секунда, следовательно единица измерения производной [x/t] = [м/с], т.е. производная даёт скорость как раз в тех единицах, которые упомянуты в вопросе задачи.