

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Алгебра и начала анализа. 11 А класс.

Учитель математики – Михайленко Л.Л.

МБУ СОШ №15 г. Тольятти



СОДЕРЖАНИЕ

- Понятие первообразной
- Неопределенный интеграл
- Таблица первообразных
- Три правила нахождения первообразных
- Определенный интеграл
- Вычисление определенного интеграла
- Площадь криволинейной трапеции
- Площадь криволинейной трапеции Площадь криволинейной трапеции (1)
- Площадь криволинейной трапеции Площадь криволинейной трапеции (2)
- Площадь криволинейной трапеции Площадь криволинейной трапеции (3)
- Площадь криволинейной трапеции Площадь криволинейной трапеции (Площадь



1. Определение первообразной

В курсе алгебры и начал анализа 10-го класса мы, руководствуясь различными формулами и правилами, находили производную заданной функции и убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: производная — это скорость движения, скорость протекания любого процесса (или, обобщая, скорость изменения функции), производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; производная помогает решать задачи на оптимизацию.



Но в реальной жизни приходится решать и обратные задачи: например, наряду с задачей об отыскании скорости по известному закону движения встречается и задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.



В ЧЁМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ ПРОБЛЕМА?

- **Как по скорости движения тела найти закон его движения?**



Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$.
Найти закон движения.



Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt . Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g}{2} (t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.



Сразу заметим, что пример решен верно, но неполно. Мы получили, что $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определенной, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем: $s(0) = 0 + C$, т. е. $C = s_0$. Теперь закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения: например, возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня (\sqrt{x}), синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс отыскания производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс отыскания функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или *первообразная*.



ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на нем производная функции $F(x)$ равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Операцию, обратную дифференцированию называют **интегрированием**.



Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.



Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$
 $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$
 $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$
 $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \operatorname{tg} x$
 $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$



Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных:

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
$x^r, r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$



КАК СОСТАВЛЕНА ЭТА ТАБЛИЦА?



Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно). Например, для функции $y = x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y = \frac{x^6}{6}$ (см. четвертую строку таблицы).

Особого разговора заслуживает лишь пятая строка таблицы, в которой написано, что первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и, следовательно, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$,



то $\ln |x| = \ln (-x)$ и, следовательно, $(\ln |x|)' = (\ln (-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) =$
 $= \frac{1}{x}$. Итак, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$,

т. е. первообразной для функции $y = \frac{1}{x}$ является функция $y = \ln |x|$.



З а м е ч а н и е 1. Ниже мы докажем теорему о том, что если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$. Поэтому правильнее было бы во втором столбце таблицы всюду, начиная с третьей строчки, добавить слагаемое C — произвольное действительное число.

З а м е ч а н и е 2. Ради краткости иногда вместо фразы «функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ » говорят: « $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ ».



ПРАВИЛА ОТЫСКАНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

ПРАВИЛО 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.



Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2 ; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$). ■



Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5 \sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.



Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5 \sin x$ первообразной будет функция $y = -5 \cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3} \cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3} \sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$.

Используя первое и второе правила отыскания первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$ (и вообще любая функция $y = 3x^4 + 4x^2 - x + C$). ■



З а м е ч а н и е 3. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному от производных. Нет и правил для отыскания первообразной от произведения или первообразной от частного двух функций. Будьте внимательны!



Получим еще одно правило отыскания первообразных. Мы знаем, что производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 3. Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$.

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + m)\right)' = \frac{kF'(kx + m)}{k} = F'(kx + m) = f(kx + m).$$



Это и означает, что $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

Смысл третьего правила заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для $f(x)$ является $F(x)$, а вам нужно найти первообразную для $f(kx + m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F , но вместо аргумента x подставьте выражение $kx + m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.



Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \frac{1}{5x - 6}$;


б) $y = e^{\frac{2x}{3} + 1}$;

в) $y = 2^{5 - 3x}$.



Решение. а) Первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$, значит, для заданной функции $y = \frac{1}{5x-6}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{5} \ln|5x-6|$.

б) Первообразной для e^x является e^x , значит, для заданной функции $y = e^{\frac{2x}{3}+1}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2x}{3}+1}$, т. е. $y = \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{2x}{3}+1}$.

в) Первообразной для 2^x является $\frac{2^x}{\ln 2}$, значит, для заданной функции $y = 2^{5-3x}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{-3} \cdot \frac{2^{5-3x}}{\ln 2}$, т. е. $y = -\frac{2^{5-3x}}{3 \ln 2}$. ■ 

ЧТО УЗНАЛИ НОВОГО НА УРОКЕ?

- Что уже знали из рассмотренного на уроке?
- Что вызвало затруднение в работе на уроке?
- Оцените урок



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Парагр.48
- №48-устно.
- №48.4-письм.



НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ называют любую ее **первообразную** функцию.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где C – произвольная постоянная (**const**).



Примеры

$$1. \int A dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

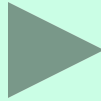
$$2. \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ



$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	x^n	$a^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	\sqrt{x}	$\frac{1}{x} + C$	$\ln x $
$\sin x + C$	$\cos x$	$e^x + C$	e^x
$-\cos x + C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x + C$	$\frac{1}{x \ln a}$
$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Три правила нахождения первообразных

- 1° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.
- 2° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf .
- 3° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k} F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.



ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПЕРВООБРАЗНОЙ



ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,
и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.



ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

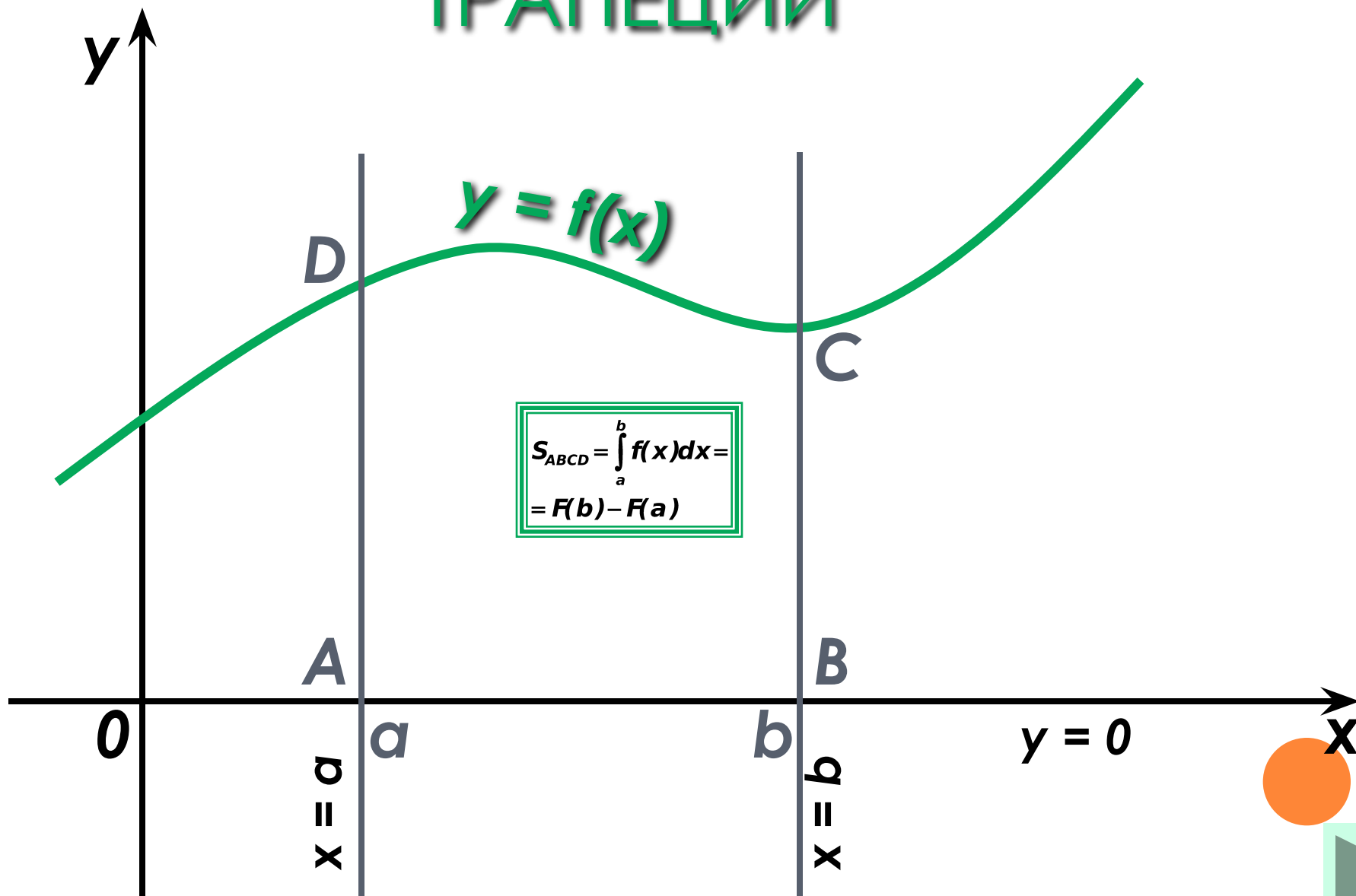
$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 =$$
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3} \Big|_3^{10} =$$

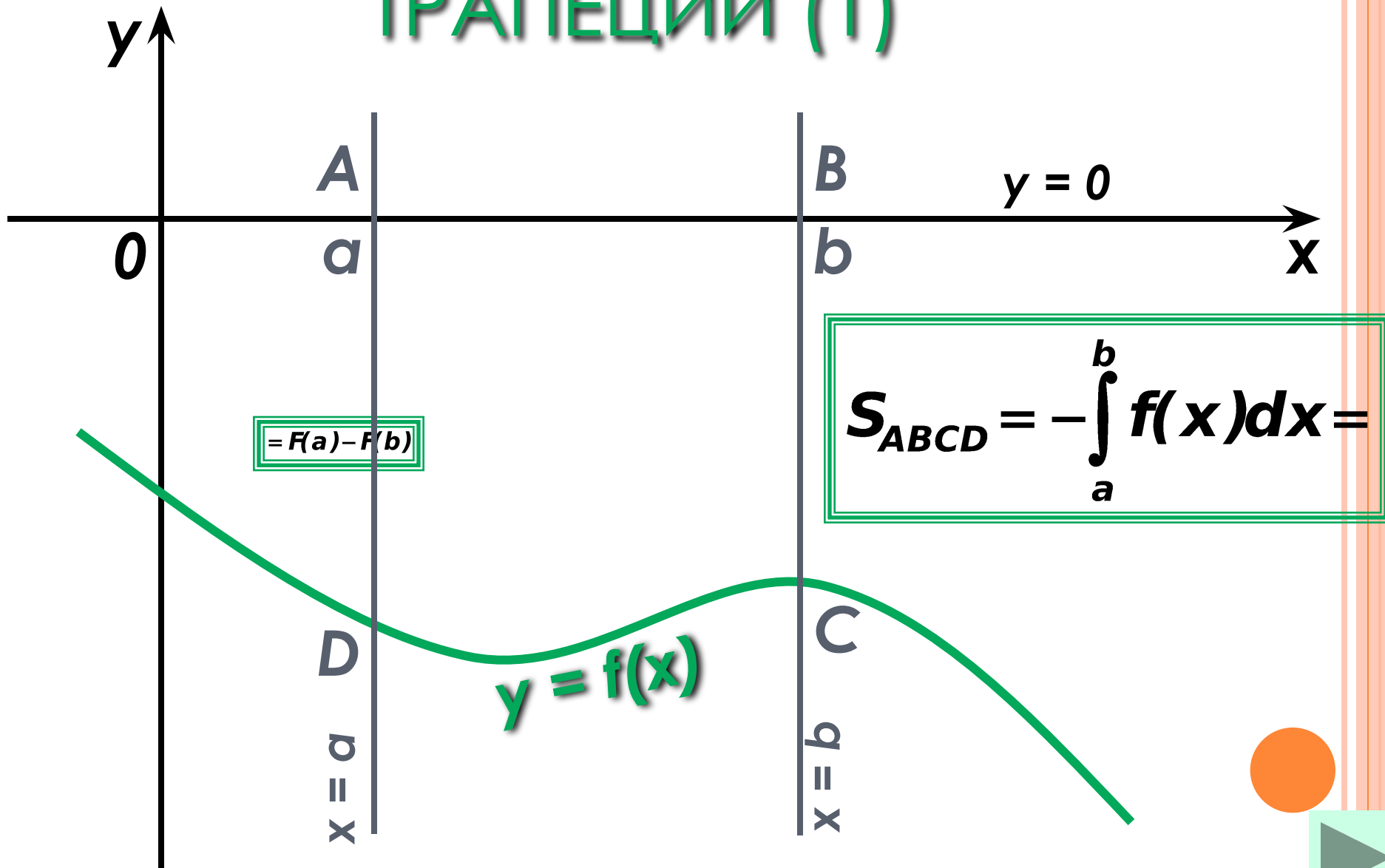
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$



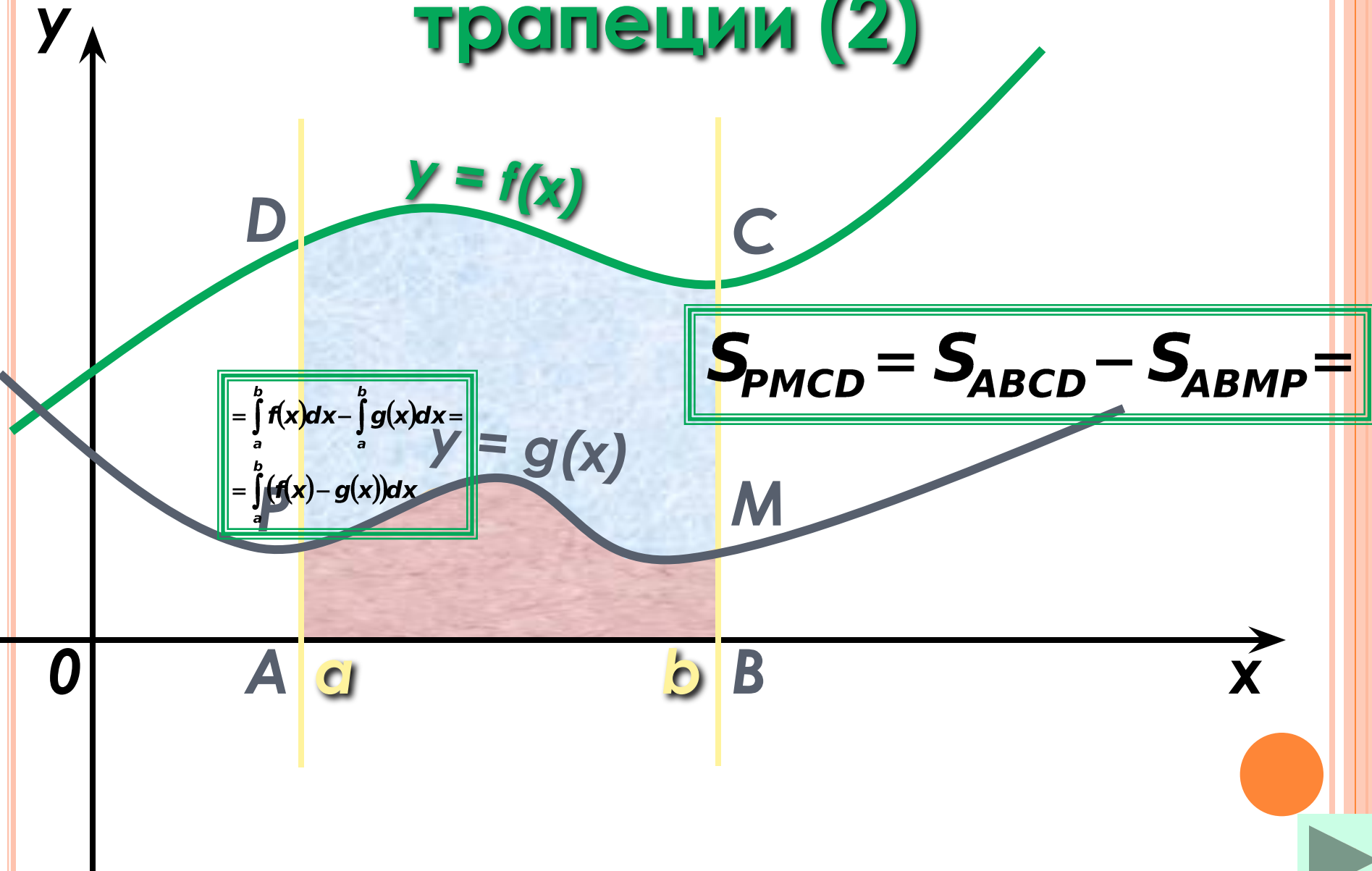
ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ



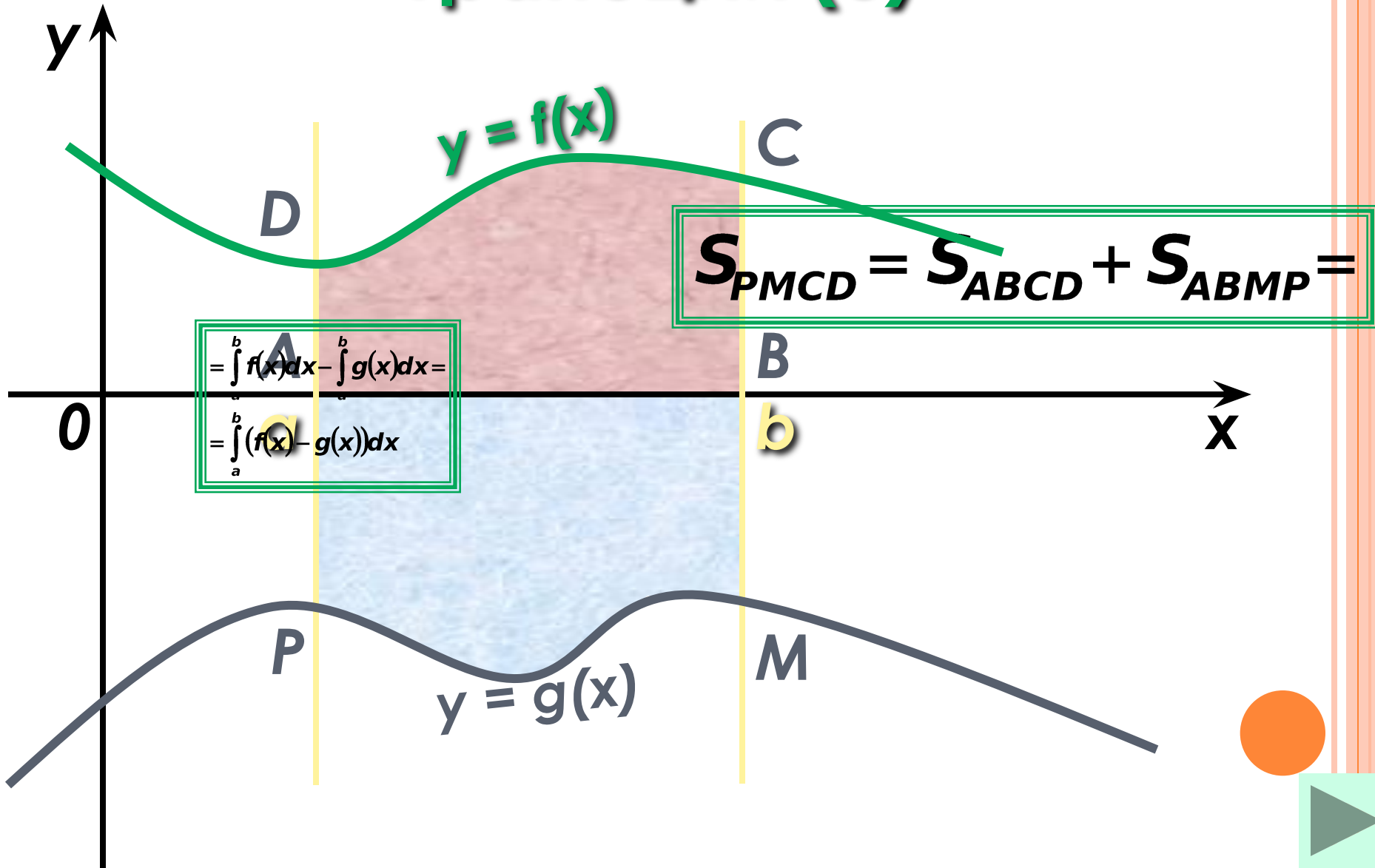
ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ (1)



Площадь криволинейной трапеции (2)

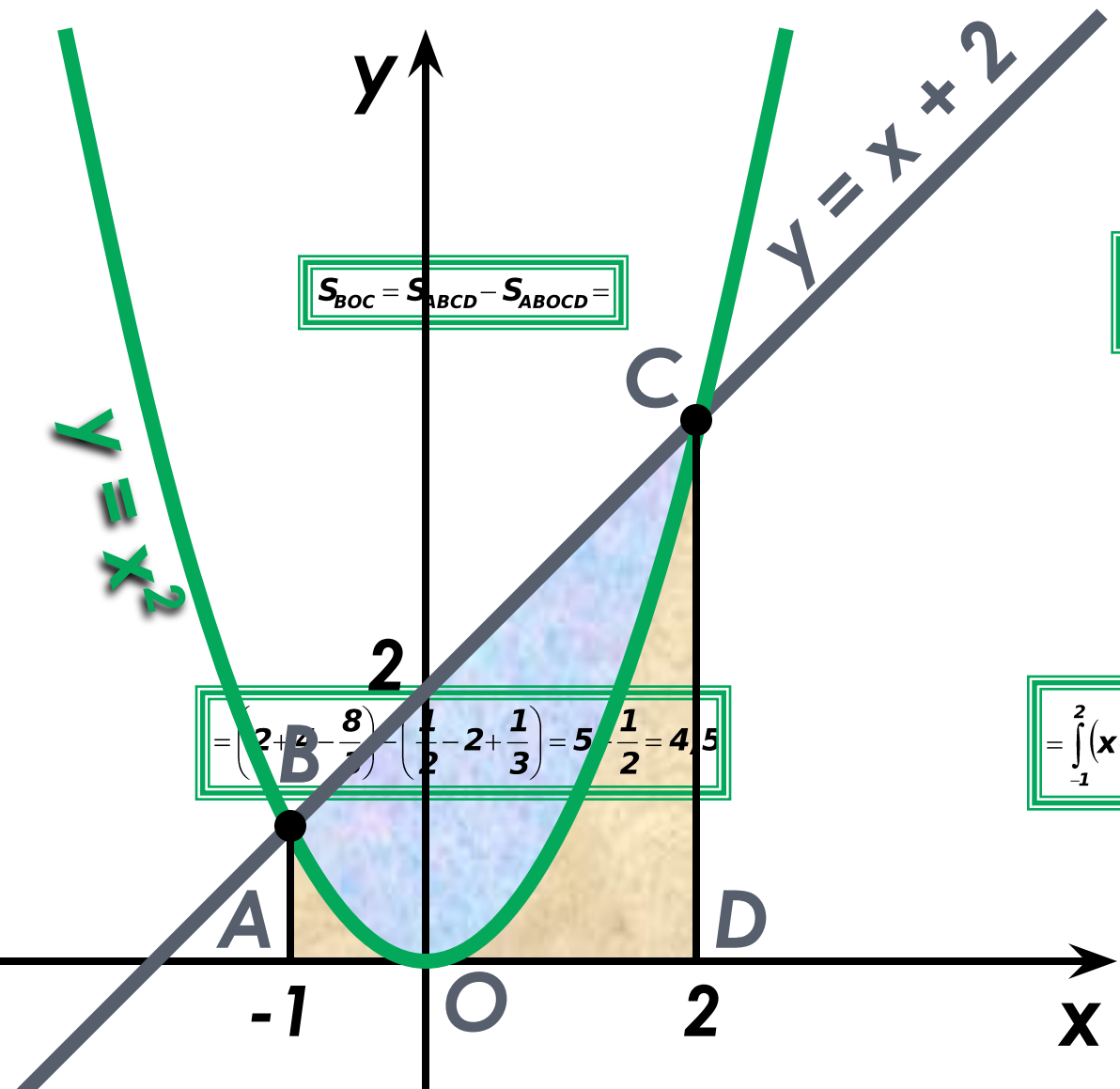


Площадь криволинейной трапеции (3)





ПРИМЕР 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

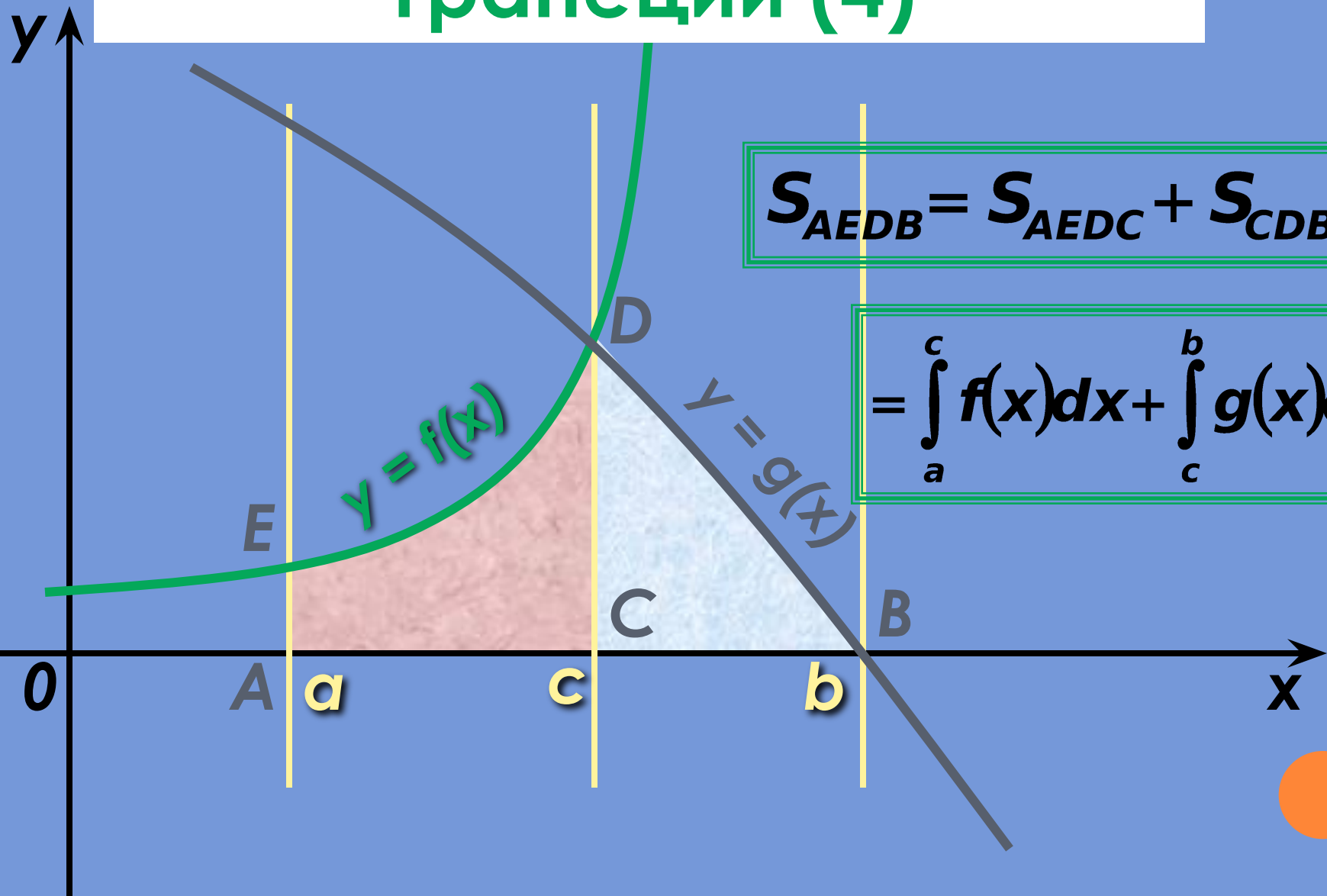
$$= \int_{-1}^2 (x+2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \left(2 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

$$= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$



Площадь криволинейной трапеции (4)



$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

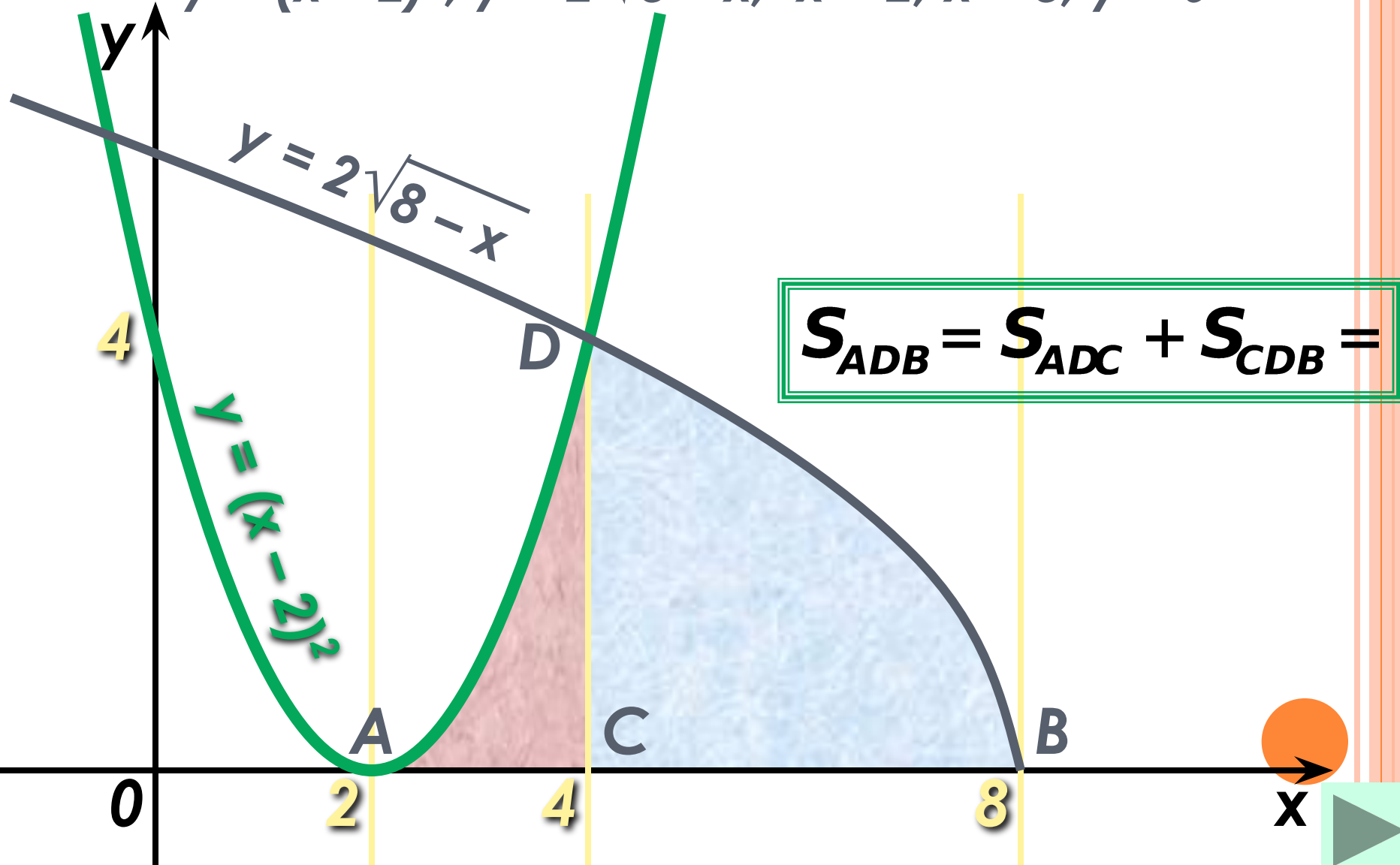
$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



Пример 2:

ВЫЧИСЛИТЬ ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ,
ОГРАНИЧЕННОЙ ЛИНИЯМИ

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$

$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_2^4 - \frac{4(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \Big|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(2 - 2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8 - 8)\sqrt{8 - 8}}{3} - \frac{4(8 - 4)\sqrt{8 - 4}}{3} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

